Übungsblatt 7
Algebraische Topologie II

Bitte schreiben Sie ihren Namen auf ihre Lösung. Abgabe ist am 13.6. (im Briefkasten von Jonas Schnitzer, 3. Stock, Ernst-Zermelo-Straße)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Es gilt $H_0(X) \cong [X, \mathbb{Z}]$.

(ii) Es gilt $H^1(X) \cong [X, S^1]$.

(iii) Es sei $f\colon \mathbb{C}P^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$ beliebig. Dann ist $f^*\colon H^k(\mathbb{C}P^\infty) \to H^k(\mathbb{C}P^\infty)$ genau dann bijektiv für alle k, wenn f^* bijektiv für $k = 2$ ist.

(iv) Es seien X, Y topologische Räume und R ein Ring so, dass $H^\bullet(X; R) \cong H^\bullet(Y; R)$ als Ringe, dann sind X und Y homotopieäquivalent.

(v) Es gibt eine Abbildung $f\colon \mathbb{C}P^5 \to \mathbb{C}P^5$, die auf $H^6(\mathbb{C}P^5)$ durch Multiplikation mit -18 wirkt.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Bestimmen Sie f"ur alle $n \geq 1$ die Kohomologieringe (insbes. ihre multiplikative Struktur)

$$\tilde{H}^\bullet_{\mathrm{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \qquad \text{und} \qquad \tilde{H}^\bullet_{\mathrm{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2)\ .$$

Aufgabe 3 (10 Punkte) Es bezeichne $[\mathbb{C}P^n] \in H_{2n}(\mathbb{C}P^n; R)$ die von der $2n$-Zelle erzeugte Homologieklasse. Zeigen Sie, dass $\big(H_\bullet(\mathbb{C}P^n; R), \frown\big)$ ein freier $(H^\bullet(\mathbb{C}P^n; R), \smile)$-Modul mit Erzeuger $[\mathbb{C}P^n]$ ist.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst das Kronecker-Produkt $\langle [\mathbb{C}P^n], \omega^n \rangle$.

Aufgabe 4 (10 Punkte = 5+5 Punkte) Wir betrachten die Räume aus Beispiel 5.69.

(i) Berechnen Sie die Kohomologie-Algebra von $S^2 \times S^4$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ oder einem K"orper $\Bbbk$, und zeigen Sie insbesondere, dass das Cup-Produkt von zwei Kohomologieklassen von Grad 2 verschwindet.

(ii) Folgern Sie, dass $\mathbb{C}P^3$ und $S^2 \times S^4$ nicht homotopieäquivalent sind.