Übungsblatt 8
Algebraische Topologie II

Bitte schreiben Sie ihren Namen auf ihre Lösung. Abgabe ist am 20.6. (im Briefkasten von Jonas Schnitzer, 3. Stock, Ernst-Zermelo-Straße)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ mit $z \mapsto \exp(2\pi i z)$ definiert ein triviales Prinzipalbündel mit Strukturgruppe $\mathbb{Z}$.

(ii) Ein Prinzipalbündel $p\colon P \to M$ ist genau trivial, wenn p einen Schnitt besitzt.

(iii) Ein Vektorbündel mit Faser V ist ein Prinzipalbündel mit Strukturgruppe $(V, +)$.

(iv) Sei $E \to B$ ein S^1-Prinzipalbündel. Dann existiert immer eine Überlagerung $\tilde{E} \to B$, die auf jeder Faser die universelle Überlagerung ist.

(v) Die Kleinsche Flasche ist ein assoziiertes Bündel mit Faser S^1 und Strukturgruppe $\mathbb{Z}/2$.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Zeigen Sie: die radiale Projektion vom "topologischen Huhn" X aus Beispiel 4.52 auf S^1 ist nicht zusammenziehbar. Folgern Sie, dass $\tilde{H}^1(X) = [X, H\mathbb{Z}_1] \neq 0$ mit der "naiven" Interpretation von $[\cdot,\cdot]$ gilt, obwohl X schwach zusammenziehbar ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Zeigen Sie: Die Konstruktionen vor Definition 6.46, die jeder Gruppe G einen schwach zusammenziehbaren Raum EG mit freier G-Wirkung und einen klassifizierenden Raum BG zuordnen, so dass $BG = EG/G$, sind Funktoren von der Kategorie der topologischen Gruppen in die Kategorie $kw\mathcal{H}$.

Aufgabe 4 (10 Punkte = 4+3+3 Punkte) Wir betrachten die Gruppe $O(1) \cong \mathbb{Z}/2 \cong S^0$. Zeigen Sie:

(i) Der Raum $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist homöomorph zum Verbund von n Kopien der S^0.

(ii) Der Raum $BO(1)$ ist homotopieäquivalent zu $\mathbb{R}P^\infty \cong K(\mathbb{Z}/2, 1)$, siehe Beispiel 5.42 (4).

(iii) Für jeden topologischen Raum gilt $\mathrm{Bun}_{O(1)}(X) \cong H^1(X, \mathbb{Z}/2)$.

Die einem reellen Vektorbündel $V \to X$ vom Rang 1 entsprechende Kohomologieklasse $w_1(V) \in H^1(X, \mathbb{Z}/2)$ heißt auch *erste Stiefel-Whitney-Klasse*.