Übungsblatt 9
Algebraische Topologie II

Bitte schreiben Sie ihren Namen auf ihre Lösung. Abgabe ist am 27.6. (im Briefkasten von Jonas Schnitzer, 3. Stock, Ernst-Zermelo-Straße)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Komplexe K-Theorie $K^0 = [-_+, \mathbb{Z} \times BU]$ erfüllt das Summenaxiom.

(ii) Komplexe K-Theorie $K^0_{\mathbb{C}}$ im Sinne von Definition 6.51 erfüllt das Summenaxiom.

(iii) Für kompakte Räume X und kompakte Lie-Gruppen G gilt $\mathrm{Bun}_G(S^1 \times X) = [X, G]$.

(iv) Jede geschlossene Fläche lässt sich in den $\mathbb{R}^3$ einbetten und hat daher triviales stabiles Normalenbündel.

(v) Der Kreis S^1 trägt genau eine stabile normale komplexe Struktur.

Aufgabe 2 (10 Punkte = 3+2+3+2) Die übliche Wirkung von $U(n+1)$ auf $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ induziert eine Abbildung

$$p\colon U(n+1) \ni g \mapsto g \cdot e_1 \in S^{2n+1} .$$

(i) Zeigen Sie, dass p ein Faserbündel mit Faser $U(n) \subset U(n+1)$ ist.

(ii) Folgern Sie, dass $\iota_n\colon U(n) \hookrightarrow U(n+1)$ eine $(2n)$-zusammenhängende Abbildung ist.

(iii) Bestimmen Sie $\pi_k(U(n))$ für $k = 0$, 1 und alle n.

(iv) Aufgrund von Bott-Periodizität gilt

$$\varinjlim \pi_k(U(n)) = \varinjlim \pi_{k+2}(U(n))$$

für alle k, wobei der Limes über n läuft. Welche $\pi_k(U(n))$ können Sie mit dieser Information bestimmen?

Aufgabe 3 (10 Punkte) Es sei $H \subset G$ Untergruppe einer topologischen Gruppe. Zeigen Sie, dass der Raum EG/H zu BH homotopieäquivalent ist. Folgern Sie, dass der Quotient G/H die Homotopiefaser der natürlichen Abbildung $BH \to BG$ ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte = 4+3+3 Punkte) Wir betrachten die Gruppe $U(1) \cong SO(2) \cong S^1 \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(i) Der Raum $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ ist homöomorph zum Verbund von n Kopien der S^1.

(ii) Der Raum $BU(1)$ ist homotopieäquivalent zu $\mathbb{C}P^\infty \cong K(\mathbb{Z}, 2)$, siehe Beispiel .

(iii) Für jeden topologischen Raum gilt $\mathrm{Bun}_{U(1)}(X) \cong H^2(X, \mathbb{Z})$.

Die einem komplexen Vektorbündel $V \to X$ vom Rang 1 entsprechende Kohomologieklasse $c_1(V) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ heißt auch *erste Chern-Klasse.*