1. Übungsblatt
Lineare Algebra II
im SS 2026 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe bis Donnerstag 30.4, 10:15 in den Briefkästen. Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie dürfen in Zweiergruppen abgeben.

Begründen Sie alle Aussagen. Sie dürfen Behauptungen aus der Aufgabenstellung vorangegangener Teilaufgaben benutzen, auch wenn Sie sie nicht bewiesen haben.

Aufgabe 1 (3+3+4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenräume der folgenden Abbildungen ohne zu rechnen.

(a) Es sei F eine Spiegelung der Ebene $\mathbb{R}^2$ an einer Geraden $g = \{v.r \mid r \in \mathbb{R}\}$ durch den Nullpunkt in Richtung v.

(b) Es sei G eine Drehung des Raumes $\mathbb{R}^3$ um den Winkel $\pi/3 = 60°$ um die Gerade $h = \{w.r \mid r \in \mathbb{R}\}$ durch den Nullpunkt in Richtung w.

(c) Es sei H eine Drehung des Raumes $\mathbb{R}^3$ um den Winkel $\pi = 180°$ um die Gerade h aus (b).

Aufgabe 2 (8+2 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -6 \\ -3 & 2 & 3 \\ 9 & 0 & -7 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ gegeben.

(a) Überprüfen Sie, ob $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 2$ Eigenwerte von A sind. Falls ja, bestimmen Sie jeweils den Eigenraum.

(b) Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 3

Es sei $\mathbb{k}$ ein Körper, V, W zwei n-dimensionale $\mathbb{k}$-Vektorräume und $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(V)$, $G \in \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(W)$ Endomorphismen. Der Endomorphismus F habe die paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{k}$. Zeigen Sie, dass es genau dann einen Isomorphismus $\Phi : V \to W$ mit $\Phi \circ F = G \circ \Phi$ gibt, wenn G auch die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ hat.

Aufgabe 4 (3+3+4 Punkte)

Berechnen Sie

(a) in $\mathbb{Q}[X]$: $(X-7)\cdot(X^2+3X-2)$

(b) in $\mathbb{C}[X]$: $(X-2-i)(X-2+i)$

(c) in $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$: $(X-[1])\cdot X+X^2+[1]$

1. Präsenzaufgaben
Lineare Algebra II
im SS 2026 bei Prof. Dr. S. Goette

Aufgabe 1

Gegeben seien Zahlen $x, a_0, \dots, a_n \in \Bbbk$. Berechnen Sie einen Wert $y \in \Bbbk$ nach folgendem Algorithmus.

(1) Beginnen Sie mit $i = n$ und $y = a_n$.

(2) Falls $i = 0$ gilt, geben Sie y aus.
Andernfalls:

(3) Setzen Sie $i := i - 1$.

(4) Setzen Sie $y := y \cdot x + a_i$.

(5) Weiter mit Schritt (2).

(a) Zeigen Sie: am Ende gilt $y = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$.

(b) Berechnen Sie $P(x) = x^2 - 123456788 \cdot x - 123456788$ für $x = 123456789$ einmal mit einem Taschenrechner oder einer entsprechenden App, und einmal von Hand nach obigem Verfahren.

(c) Wieviele Multiplikationen mussten Sie in (b) jeweils durchführen? Wieviele Multiplikationen bräuchten Sie bei einem normierten Polynom von Grad n?

Aufgabe 2

Sei $\Bbbk$ ein Körper und $x_0, x_1, \dots, x_n \in \Bbbk$. Zeigen Sie, dass $\det A = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Gegeben sei die Abbildung $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $F(w) = i\overline{w}$. Betrachten Sie $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum und F als $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Bestimmen Sie die Matrix von F bezüglich der $\mathbb{R}$-Basis $B = (1, i)$ von $\mathbb{C}$. Beschreiben Sie die Abbildung geometrisch.

Aufgabe 4

Sei $\mathbb{k}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{k}$-Vektorraum und $F : V \to V$ eine $\mathbb{k}$-lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\ker(F) \subset \ker(F \circ F)$ und $\operatorname{im}(F \circ F) \subset \operatorname{im}(F)$.

(b) Es gilt $\ker(F) = \ker(F \circ F)$ genau dann, wenn $\operatorname{im}(F \circ F) = \operatorname{im}(F)$.