2. Übungsblatt
Lineare Algebra II
im SS 2026 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe bis Donnerstag 7.4, 10:15 in den Briefkästen. Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie dürfen in Zweiergruppen abgeben.

Begründen Sie alle Aussagen. Sie dürfen Behauptungen aus der Aufgabenstellung vorangegangener Teilaufgaben benutzen, auch wenn Sie sie nicht bewiesen haben.

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Machen Sie, wenn möglich, die Probe. Skizzieren Sie die Eigenräume.

Aufgabe 2

Es seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}).$$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

Aufgabe 3

Es seien R und S Ringe mit Eins, und R sei kommutativ. Es sei $\varphi : R \to S$ eine Abbildung, die die Bedingungen (2)–(5) aus Bemerkung 5.18 erfüllt. Zeigen Sie: dann ist $(S, \cdot)$ eine assoziative Algebra über R mit $a.r = a \cdot \varphi(r)$ für alle $a \in S, r \in R$.

Aufgabe 4 (4+4+2 Punkte)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $V = \{\sum_{i=0}^n a_i X^i \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}\} \subset \mathbb{K}[X]$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$. Es seien $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ paarweise verschieden.

(a) Finden Sie Polynome $P_0, \dots, P_n \in V$, so dass $P_i(x_j) = 0$ genau dann, wenn $i \neq j$.

(b) Zeigen Sie, dass $P_0, \ldots, P_n$ linear unabhängig sind.

(c) Folgern Sie: wenn ein Polynom $P \in V$ mehr als n paarweise verschiedene Nullstellen hat, gilt $P = 0$.

2. Präsenzaufgaben
Lineare Algebra II
im SS 2026 bei Prof. Dr. S. Goette

Aufgabe 1

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Für eine quadratische Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(R)$ definieren wir die Spur als $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ für alle $A \in M_{m,n}(R)$ und $B \in M_{n,m}(R)$.

(b) Für $B \in M_{n,m}(R)$ und $C \in M_{m,n}(R)$ gilt: wenn $BC = E_n$ ist, dann gilt für alle $A \in M_n(R)$ die Gleichung $\operatorname{tr}(CAB) = \operatorname{tr}(A)$.

(c) Sei nun $R = \mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis B und $F : V \to V$ eine lineare Abbildung mit darstellender Matrix A bezüglich der Basis B. Dann ist $\operatorname{tr}(F) := \operatorname{tr}(A)$ unabhängig von der Wahl der Basis B.

Aufgabe 2

(a) Sei R ein Integritätsbereich. Wir identifizieren R mit den konstanten Polynomen in $R[X]$. Zeigen Sie, dass $R[X]^\times = R^\times$ gilt. Die Einheiten im Polynomring über R sind also genau die Einheiten von R.

(b) Finden Sie eine Einheit vom Grad 1 in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]$.