3. Übungsblatt
Lineare Algebra II
im SS 2026 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe bis Donnerstag 14.5, 10:15 in den Briefkästen. Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie dürfen in Zweiergruppen abgeben.

Begründen Sie alle Aussagen. Sie dürfen Behauptungen aus der Aufgabenstellung vorangegangener Teilaufgaben benutzen, auch wenn Sie sie nicht bewiesen haben.

Aufgabe 1 (2+6+2 Punkte)

Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler $S \in \mathbb{Q}[X]$ von

$$P(X) = X^5 - 6X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 3X + 10 \qquad \text{und} \qquad Q(X) = X^4 + X^3 - 7X^2 - X + 6$$

und finden Sie $C, D \in \mathbb{Q}[X]$, so dass

$$C(X)P(X) + D(X)Q(X) = S(X).$$

Zur Probe bestimmen Sie anschließend $T, U \in \mathbb{Q}[X]$, so dass

$$P(X) = S(X) \cdot T(X) \qquad \text{und} \qquad Q(X) = S(X) \cdot U(X).$$

Aufgabe 2

Beweisen Sie Satz 5.30 zum erweiterten Euklidischen Algorithmus.

Aufgabe 3 (4+2+4 Punkte)

Es sei $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und $P = X^2 - X \in R[X]$.

(a) Finden Sie alle Nullstellen von P.

(b) Auf wieviele Weisen lässt sich P in Linearfaktoren zerlegen?

(c) An welcher Stelle scheitert der Eindeutigkeitsbeweis für die Primfaktorzerlegung?

Aufgabe 4

Es sei $P \in \mathbb{K}[X]$. Wir definieren $R := \mathbb{K}[X]/P\mathbb{K}[X]$ analog zu Beispiel 2.9 als $\mathbb{K}[X]/\sim$, wobei $S \sim T \Leftrightarrow P \mid T - S$. Zeigen Sie:

(a) “ $\sim$ “ ist eine Äquivalenzrelation.

(b) R ist ein Ring.

(c) R ist genau dann ein Körper, wenn P irreduzibel ist.

3. Präsenzaufgaben
Lineare Algebra II
im SS 2026 bei Prof. Dr. S. Goette

Aufgabe 1

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $n = \dim V < \infty$ und $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Zeigen Sie:

(a) Sei $k = \deg \mu_F$, dann sind alle F^l für $l \in \mathbb{N}$ linear abhängig von $\mathrm{id} = F^0, F^1, \dots, F^{k-1} \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

(b) Es sei $A = {}_BF_B$ die darstellende Matrix von F bezüglich einer Basis B von V. Das Minimalpolynom von F lässt sich berechnen, indem man die Matrizen $E_n = A^0, A^1, \dots, A^{n-1}$ als Spalten nebeneinander schreibt und dann das Gauß-Verfahren anwendet.

(c) Der Rechenaufwand in (b) beträgt weniger als $2n^4$ Multiplikationen. Für hinreichend große n ist das weniger Aufwand als bei der Berechnung von χ_A mit Hilfe der Laplace-Entwicklung.

Aufgabe 2

Welche Rechenschritte sind nötig, um ein Polynom P durch einen Linearfaktor $X - x_0$ mit Rest zu dividieren? Vergleichen Sie sie mit dem Verfahren in Präsenzaufgabe 3 auf Blatt 1.