Algebraische Topologie
Wintersemester 2019/2020

Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Severin Barmeier
Dr. Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ws19/AT/

Übungsblatt 10

Abgabetermin 16.01.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1. Konstruieren Sie die natürlichen Transformationen α, λ und ρ aus Definition 4.26, zeigen Sie, dass sie Isomorphismen sind, und beweisen die Axiome (1) und (2)

(*i*) entweder für $(\mathcal{C}, \times, E)$, falls endliche Produkte in $\mathcal{C}$ existieren und E das terminale Objekt ist;

(*ii*) oder für $(\mathcal{C}, \sqcup, E)$, falls endliche Koprodukte in $\mathcal{C}$ existieren und E das initiale Objekt ist.

Benutzen Sie dazu nur die universellen Eigenschaften des (Ko-) Produktes und des terminalen/initialen Objektes.

Aufgabe 2. Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ eine abgeschlossene monoidale Kategorie.

(*i*) Benutzen Sie die Adjunktion $\cdot \otimes Y \dashv \hom(Y, \cdot\,)$ und die Funktorialität von $\otimes$ im zweiten Argument, um zu zeigen, dass $\hom(\,\cdot\,, Z)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ein kontravarianter Funktor ist.

(*ii*) Zeigen Sie, dass $\hom(\,\cdot\,, \cdot\,)$ ein *Bifunktor* ist, das heißt, dass für alle $f\colon Z \to W$, $g\colon X \to Y$ gilt

$$\hom(X, f) \circ \hom(g, Z) = \hom(g, W) \circ \hom(Y, f)\colon\ \hom(Y, Z) \to \hom(X, W).$$

Aufgabe 3. Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ eine abgeschlossene monoidale Kategorie. Beweisen Sie die universellen Eigenschaften des internen hom-Funktors und des Tensorproduktes aus Bemerkung 4.28 mit Hilfe von Bemerkung 4.2. Zeigen Sie außerdem, dass die Zuordnungen $f \mapsto g$ in (1) und $g \mapsto f$ in (2) zueinander invers sind.

Aufgabe 4. Beweisen Sie Proposition 4.36, orientieren Sie sich dabei am Beweis von Proposition 3.59.