Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Severin Barmeier
Dr. Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ws19/AT/

Übungsblatt 12

Abgabetermin 30.01.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(i) Schwach homotopieäquivalente CW-Komplexe sind homotopieäquivalent.

(ii) Schwach homotopieäquivalente topologische Räume haben homotopieäquivalente CW-Approximationen.

Aufgabe 2. Es sei $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ eine Modellstruktur auf einer Kategorie $\mathcal{M}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ gerade die Menge aller $p\colon E \to B$ in $\mathcal{M}$ ist, die für alle trivialen Kofaserungen $i\colon A \to X$ die Liftungseigenschaft

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & B \end{tikzcd}$$

erfüllen.
Hinweis: Wenn p die Liftungseigenschaft hat, zerlegen Sie $p = q \circ j$ wie in Axiom (M4) und schreiben Sie p als Retrakt von q.

Aufgabe 3. Es sei $f\colon A \to B$ ein Retrakt von $g\colon X \to Y$ im Sinne von Übung 3.113 in einer beliebigen Kategorie $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "I"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[r, "R"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f"'] \\ B \arrow[r, "i"'] & Y \arrow[r, "r"'] & B \end{tikzcd}$$

Zeigen Sie:

(i) Wenn g ein Isomorphismus ist, dann ist auch f ein Isomorphismus.

(*ii*) Sei $\mathcal{C} = \mathcal{T}op$. Wenn g eine Homotopieäquivalenz ist, dann auch f.

(*iii*) Sei $\mathcal{C} = \mathcal{T}op$. Wenn g eine schwache Homotopieäquivalenz ist, dann auch f.

Hinweis: (*ii*) und (*iii*) folgen aus (*i*) dank Funktorialität.

Aufgabe 4. Es sei $(\mathcal{M}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ eine Modellkategorie und A ein Objekt von $\mathcal{M}$. Die Kategorie $A \downarrow M$ "unter A" enthält als Objekte Morphismen der Form $A \to X$ in $\mathcal{M}$, und als Morphismen kommutative Diagramme der Form

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{M}$.

(*i*) Zeigen Sie, dass $(A \downarrow \mathcal{M}, A \downarrow \mathcal{W}, A \downarrow \mathcal{C}, A \downarrow \mathcal{F})$ wieder eine Modellkategorie bildet.

(*ii*) Überlegen Sie sich, dass eine Homotopieäquivalenz in $(A \downarrow \mathcal{M})_{cf}$ nicht notwendigerweise eine Homotopieäquivalenz relativ zu A ist.

Hinweis zu (*ii*)*:* Verwenden Sie (ohne Beweis), dass Objekte von $(A \downarrow \mathcal{M})_{cf}$ genau dann schwach äquivalent sind, wenn sie im Sinne von Bemerkung 4.61 homotopieäquivalent sind.