Algebraische Topologie
Wintersemester 2019/2020

Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Severin Barmeier
Dr. Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ws19/AT/

Übungsblatt 14

Abgabetermin 13.02.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1. Es sei $X = \{0, \dots, n\}$ versehen mit der diskreten Topologie, und $0 \in X$ sei der Basispunkt. Es sei $\tilde{h}_\bullet$ ein reduzierter Homologiefunktor. Beschreiben Sie die Abbildung p_* aus Bemerkung 5.5 (1) in Termen von $\tilde{h}_n(S^0)$ mit Hilfe des Summenaxioms 5.2 (3), indem Sie X und X_+ darstellen als

$$X = \bigvee_{i=1}^{n} S^0 \qquad \text{und} \qquad X_+ = \bigvee_{i=0}^{n} S^0.$$

Aufgabe 2. Beweisen Sie die Exaktheit der Mayer-Vietoris-Sequenz 5.6 an einer der beiden fehlenden Stellen, also bei $\tilde{h}_n(X)$ oder bei $\tilde{h}_n(A \cap B)$.

Aufgabe 3. Es sei $X = A \cup B$, so dass $(A, A \cap B)$ und $(B, A \cap B)$ Kofaserungen seien, und es gelten Zusammenhangsvoraussetzungen wie in Folgerung 3.65. Konstruieren Sie ein Analogon zur Mayer-Vietoris-Sequenz 5.6 für die „unstabilen“ Homotopiegruppen $\pi_\bullet$ wie in Bemerkung 5.9.

Wie weit lässt sich diese Sequenz nach links beziehungsweise rechts fortsetzen? Für π_1 kennen wir bereits den Satz 2.42 von Seifert-van Kampen. Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen lässt er sich in diese Sequenz „einbauen“?

Aufgabe 4. Es seien X, Y punktierte CW-Komplexe und M ein R-Modul. Eine zelluläre Homotopie zwischen zellulären Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ ist eine zelluläre Abbildung $h\colon I_+ \wedge X \to Y$, wobei I die CW-Struktur mit einer 1- und zwei 0-Zellen trage. Zeigen Sie: zelluläre Homotopien induzieren Kettenhomotopien zwischen den Abbildungen $f_\#, g_\#\colon \tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(X; M) \to \tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(Y; M)$.