

Übungsblatt 2

Abgabetermin 7.11.2019

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1. Zeigen Sie für exakte Sequenzen von Gruppen:

(i) Die Sequenz

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

ist genau dann bei A und B exakt, wenn f einen Isomorphismus $A \cong \ker g$ induziert.

(ii) Die Sequenz

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

ist genau dann bei B und C exakt, wenn g einen Isomorphismus $\operatorname{coker} f \cong C$ induziert.

(iii) Was folgt für A und f in den exakten Sequenzen $0 \rightarrow A \rightarrow 0$ beziehungsweise $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$?

Aufgabe 2. Zeigen Sie die Exaktheit der langen Homotopiesequenz eines Paares

$$\cdots \leftarrow \{*\} \leftarrow \pi_0(X, A) \leftarrow \pi_0(X) \leftarrow \pi_0(A) \xleftarrow{\partial} \pi_1(X, A) \leftarrow \pi_1(X) \leftarrow \pi_1(A) \leftarrow \cdots$$

aus Satz 3.19 an mindestens einer im Beweis fehlenden Stelle.

Aufgabe 3. Beweisen Sie Lemma 3.20 (Vierer- und Fünferlemma). Achten Sie dabei darauf, nur diejenigen Mengen als Gruppen und nur diejenigen Abbildungen als Gruppenhomomorphismen vorauszusetzen, die in der neuesten Version (vom 30.10.) des Skripts als solche vorausgesetzt werden; alles andere ist in der Kategorie \mathbf{Set}_+ zu betrachten.

Aufgabe 4. Es seien $Z \subset Y \subset X$ Räume mit Basispunkt in Z . Wir betrachten die Verkettung

$$\partial: \pi_k(X, Y) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(Y) \rightarrow \pi_{k-1}(Y, Z)$$

als Verbindungshomomorphismus in der Sequenz

$$\cdots \leftarrow \pi_{k-1}(Y, Z) \xleftarrow{\partial} \pi_k(X, Y) \leftarrow \pi_k(X, Z) \leftarrow \pi_k(Y, Z) \xleftarrow{\partial} \pi_{k+1}(X, Y) \leftarrow \cdots$$

wobei die unmarkierten Pfeile von Inklusionen induziert werden.

- (i) Zeichnen Sie die obige Sequenz zusammen mit den exakten Sequenzen der Paare (X, Y) , (X, Z) und (Y, Z) so in ein kommutatives Diagramm, dass keine Homotopiegruppe zweimal erscheint.
- (ii) Beweisen Sie die Exaktheit der Sequenz, indem Sie nach Möglichkeit vom Diagramm aus (i) Gebrauch machen.