Algebraische Topologie
Wintersemester 2019/2020

Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Severin Barmeier
Dr. Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ws19/AT/

Übungsblatt 3

Abgabetermin 14.11.2019

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1. Im Folgenden bedeute Faserung entweder Serre- oder Hurewicz-Faserung. Zeigen Sie:

(*i*) Sei $p\colon E \to B$ eine Faserung, und sei $f\colon X \to B$ stetig. Seien die Abbildungen $f^*p\colon f^*E \to X$ und $\bar{f}\colon f^*E \to E$ durch

$$f^*E = \{(e,x) \in E \times X \mid p(e) = f(x) \in B\} \qquad (f^*p)(e,x) = x \qquad \bar{f}(e,x) = e$$

gegeben, dann ist f^*p wieder eine Faserung.

(*ii*) Die konstante Abbildung $F \to \mathrm{pt}$ ist eine Faserung für alle F. Die Projektion $B \times F \to B$ ist eine Faserung für alle F und alle B.

(*iii*) Seien $p\colon E \to B$ und $q\colon Y \to E$ Faserungen. Dann ist auch $p \circ q\colon Y \to B$ eine Faserung.

Aufgabe 2. Eine *Retraktion* von einer Abbildung $p\colon E \to B$ zu einer Abbildung $q\colon D \to A$ ist ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "I"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[r, "R"] \arrow[d, "p"'] & D \arrow[d, "q"'] \\ A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "r"] & A \end{tikzcd}$$

so dass $r \circ i = \mathrm{id}_A$ und $R \circ I = \mathrm{id}_D$.

Zeigen Sie: Wenn p die Homotopieliftungseigenschaft für einen Raum X besitzt, dann gilt das auch für q. Insbesondere sind Retrakte von Serre- beziehungsweise Hurewicz-Faserungen wieder Serre- beziehungsweise Hurewicz-Faserungen. Man sagt auch, $q\colon D \to A$ ist ein *Retrakt* von $p\colon E \to B$.

Aufgabe 3. Es seien X, Y topologische Räume. Definiere den *Verbund* von X und Y als Quotienten

$$X * Y = (X \times Y \times I)/\sim$$

wobei die Relation $\sim$ erzeugt wird durch

$$\begin{matrix} (x, y, 0) \sim (x, y', 0) \\ (x, y, 1) \sim (x', y, 1) \end{matrix} \qquad \text{für alle } x, x' \in X \text{ und alle } y, y' \in Y.$$

Geben Sie Homöomorphismen $S^k * \mathrm{pt} \cong D^{k+1}$ und $S^k * S^\ell \cong S^{k+\ell+1}$ für alle k, ℓ an.

Aufgabe 4. Es seien $(X, x_0), (Y, y_0)$ punktierte Räume, und es sei $X * Y$ definiert wie in Aufgabe 3. Wir identifizieren X, Y mit Unterräumen von $X * Y$ durch

$$\begin{aligned} x &\mapsto [(x, y_0, 0)] && \text{für alle } x \in X \\ y &\mapsto [(x_0, y, 1)] && \text{für alle } y \in Y, \end{aligned}$$

wählen als Basispunkt von $X * Y$ den Punkt $[(x_0, y_0, \frac{1}{2})]$ und setzen

$$\begin{aligned} U &= X * Y \setminus Y \\ V &= X * Y \setminus X. \end{aligned}$$

(*i*) Zeigen Sie, dass $U, V, U \cap V$ jeweils zu $X, Y, X \times Y$ homotopieäquivalent sind.

(*ii*) Bestimmen Sie die von den Inklusionen induzierten Abbildungen

$$\pi_k(U \cap V) \to \pi_k(U), \qquad \pi_k(V) \to \pi_k(X * Y)$$

und die Gruppen $\pi_k(U, U \cap V)$.

(*iii*) Die Räume X und Y seien p- beziehungsweise q-zusammenhängend. Wie hoch zusammenhänged ist dann $X * Y$?