Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Severin Barmeier
Dr. Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ws19/AT/

Übungsblatt 4

Abgabetermin 21.11.2019

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1. Zeigen Sie: die Hintereinanderausführung von punktierten Abbildungen $S^n \to S^n$ macht die Gruppe $\pi_n(S^n)$ zu einem Ring isomorph zu $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2. Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle $n \geq 1$.

(*i*) Betrachte $D^n \subset \mathbb{R}^n$. Es sei $f\colon D^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(\partial D^n) \subset S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ und $\deg f|_{\partial D^n} \neq 0$ gegeben. Dann gilt $D^n \subset \operatorname{im}(f)$.

(*ii*) Es seien $f_1, \dots, f_n\colon I^n \to \mathbb{R}$ gegeben, so dass $f_i(x) < 0$ falls $x_i = 0$ und $f_i(x) > 0$ falls $x_i = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$ und alle $x \in I^n$. Dann existiert ein $x_0 \in I^n$ mit $f_1(x_0) = \dots = f_n(x_0) = 0$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie folgende Aussage. Für einen Punkt x in einer Mannigfaltigkeit M mit Rand gibt es genau zwei Möglichkeiten:

(*i*) Für jede offene Umgebung $U \subset M$ von x und jeden Homöomorphismus $\phi\colon U \to \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ gilt $\phi(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$ — in diesem Fall heißt x ein *innerer Punkt* von M, oder

(*ii*) es gibt keine offene Umgebung von x in M, die zu $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist, und für jede offene Umgebung $U \subset M$ von x und jeden Homöomorphismus $\phi\colon U \to \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ gilt $\phi(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ — in diesem Fall heißt x ein *Randpunkt* von M.

Aufgabe 4. Zeigen Sie: die Abbildung $\mathrm{U}(n) \to S^{2n-1}$ mit $g \mapsto ge_1 \in S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ ist ein Faserbündel mit Faser $\mathrm{U}(n-1)$.

Folgern Sie, dass $\pi_k(\mathrm{U}(n)) \cong \pi_k(\mathrm{U}(n-1))$ für $k < 2n-2$.