

<http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ws19/AT/>

Übungsblatt 5

Abgabetermin 28.11.2019

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- (i) Es seien $A \subset B \subset X$ Teilmengen. Wenn (B, A) und (X, B) Kofaserungen sind, dann ist auch (X, A) eine Kofaserung.
- (ii) Es sei (X, A) eine (abgeschlossene) Kofaserung und $f: A \rightarrow B$ eine stetige Abbildung. Dann ist $(X \cup_f B, B)$ wieder eine (abgeschlossene) Kofaserung.
- (iii) Ein Paar (X, A) sei *Retrakt* von (Y, B) , das heißt, es gebe Abbildungen $i: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ und $r: (Y, B) \rightarrow (X, A)$ mit $r \circ i = \text{id}_X$. Wenn (Y, B) eine Kofaserung ist, dann ist auch (X, A) eine Kofaserung.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: jede Kofaserung $i: A \rightarrow X$ ist eine Einbettung (siehe Definition 1.44 im Skript). Zeigen Sie dazu, dass

$$\iota_1: A \cong A \times \{1\} \hookrightarrow Zi \quad \text{und} \quad \bar{\iota}_1: X \cong X \times \{1\} \hookrightarrow X \times I$$

Einbettungen sind, und betrachten Sie das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota_1} & Zi \\ i \downarrow & & \bar{\iota} \uparrow \bar{r} \\ X & \xrightarrow{\bar{\iota}_1} & X \times I. \end{array}$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie: wenn X ein Hausdorff-Raum und (X, A) eine Kofaserung ist, dann ist $A \subset X$ abgeschlossen. Betrachten Sie dazu die stetigen Abbildungen

$$f: X \cong X \times \{1\} \hookrightarrow X \times I \quad \text{und} \quad g: X \cong X \times \{1\} \xrightarrow{r} Zi \hookrightarrow X \times I$$

und zeigen Sie zunächst

$$A = \{x \in X \mid f(x) = g(x) \in X \times I\}.$$

Aufgabe 4. Betrachten Sie $A = \{a\} \subset X = \{a, b\}$ mit der Topologie $\mathcal{O}_X = \{\emptyset, A, X\}$, und zeigen Sie:

- (i) Das Paar (X, A) ist eine Kofaserung, $(X^2, A \times X \cup X \times A)$ jedoch nicht.
- (ii) Überprüfen Sie, ob es Abbildungen $u: X \rightarrow I$ und $h: X \times I \rightarrow X$ wie in Proposition 3.59 (1) im Skript gibt.