Algebraische Topologie
Wintersemester 2019/2020

Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Severin Barmeier
Dr. Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ws19/AT/

Übungsblatt 7

Abgabetermin 12.12.2019

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(*i*) Die stabile Homotopiegruppe $\pi_3^{\mathrm{s}}(S^2) \cong \pi_1^{\mathrm{s}}(S^0)$ wird von der Hopf-Faserung $p\colon S^3 \to S^2$ erzeugt.

(*ii*) Es bezeichne $\iota\colon \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^2$ die Inklusion mit $(z_0 : z1) \mapsto (z_0 : z_1 : 0)$. Dann ist $\iota_*[p] = 0 \in \pi_3(\mathbb{C}P^2)$.

(*iii*) Es gilt dann auch $\iota_*[p] = 0 \in \pi_3^{\mathrm{s}}(\mathbb{C}P^2)$.

Aufgabe 2. (*i*) Zeigen Sie mit der stabilen Homotopiesequenz 3.80 für $(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1})$, dass $\pi_k^{\mathrm{s}}(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_k^{\mathrm{s}}(\mathbb{C}P^{n-1})$ für alle $k < 2n-1$.

(*ii*) Bestimmen Sie $\pi_2^{\mathrm{s}}(\mathbb{C}P^n)$ für alle $n \geq 2$.

(*iii*) Bestimmen Sie $\pi_3^{\mathrm{s}}(\mathbb{C}P^n)$ für alle $n \geq 2$.

Aufgabe 3. Es sei $p\colon S^3 \to S^2$ die Hopf-Faserung aus Beispiel 3.33. Bestimmen Sie die gerahmte Untermannigfaltigkeit (M, τ), die das Bild von $[p]$ unter der Pontryagin–Thom-Konstruktion repräsentiert.

Aufgabe 4. Der Pontryagin–Thom-Isomorphismus induziert eine Verknüpfung auf dem gerahmten Bordismus $\Omega_k^{\mathrm{fr},n}$, die der Addition in den Homotopiegruppen $\pi_n(S^{n-k})$ entspricht. Geben Sie eine geometrische Beschreibung dieser "Addition von gerahmten Mannigfaltigkeiten".

Zusatz: Beschreiben Sie auch die Addition auf $\Omega_k^{\mathrm{fr}}(X)$.