

Algebraische Topologie — WS 19/20

Sebastian Goette

Inhaltsverzeichnis

Einführung	1
Kapitel 1. Kapitel 1 — Grundbegriffe	3
1.a. Metrische Räume	3
1.b. Topologische Räume	5
1.c. Trennungseigenschaften	8
1.d. Basen und Abzählbarkeitseigenschaften	10
1.e. Konstruktionen topologischer Räume	13
1.f. Kompaktheit	18
1.g. Zusammenhang	23
1.h. Quotienten und Verklebung	24
1.i. CW-Komplexe und topologische Mannigfaltigkeiten	27
1.j. Übungen zu Kapitel 1	36
Kapitel 2. Fundamentalgruppe und Überlagerungen	43
2.a. Homotopien und Homotopieäquivalenz	43
2.b. Die Fundamentalgruppe	46
2.c. Die Fundamentalgruppe der S^1	50
2.d. Der Satz von Seifert-van Kampen	54
2.e. Die Fundamentalgruppe eines CW-Komplexes	62
2.f. Überlagerungen	66
2.g. Die universelle Überlagerung	71
2.h. Übungen zu Kapitel 2	74
Kapitel 3. Homotopiegruppen	79
3.a. Höhere Homotopiegruppen	79
3.b. Die lange exakte Homotopiesequenz eines Paares	84
3.c. Faserungen	88
3.d. Der Ausschneidungssatz	93
3.e. Der Satz von Brouwer und Hopf	97
3.f. Kofaserungen und Quotienten	102
3.g. Der Freudenthalsche Einhängungssatz	107
3.h. Stabile Homotopiegruppen	109
3.i. Gerahmter Bordismus	114
3.j. Die erste stabile Homotopiegruppe der Sphären	121
3.k. Übungen zu Kapitel 3	125
Kapitel 4. Elementare Homotopietheorie	131
4.a. Adjungierte Funktoren, Limiten und Kolimiten	131
4.b. Eine angenehme Kategorie topologischer Räume	136
4.c. Das Exponentialgesetz	140

4.d.	CW-Komplexe und der Satz von Whitehead	145
4.e.	Modellkategorien	155
4.f.	Faser- und Kofaser-Sequenzen	159
4.g.	Übungen zu Kapitel 4	164
Kapitel 5.	Homologie	169
5.a.	Die Eilenberg-Steenrod-Axiome	169
5.b.	Zelluläre Homologie	176
5.c.	Homologiefunktoren und Spektren	188
5.d.	Das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum	193
5.e.	Die abgeleiteten Funktoren Tor und Ext	198
5.f.	Das Moore-Spektrum und ein universelles Koeffizienten-Theorem	206
5.g.	Produkräume und die Künneth-Formel	210
5.h.	Übungen zu Kapitel 5	216
Kapitel 6.	Kohomologie	223
6.a.	Axiome für Kohomologiefunktoren	223
6.b.	Der abgeleitete inverse Limes	225
6.c.	Zelluläre Kohomologie und ein universelles Koeffiziententheorem	228
6.d.	Produkte	234
6.e.	Spektren und Kohomologiefunktoren	239
6.f.	Vektorbündel	241
6.g.	Topologische K -Theorie	248
6.h.	Bordismus	254
6.i.	Übungen zu Kapitel 6	255
Kapitel 7.	Ringspektren und Multiplikative Kohomologiefunktoren	259
7.a.	Die stabile CW-Kategorie	259
7.b.	Eigenschaften der stabilen Homotopiekategorie	263
7.c.	Das reduzierte Produkt von Spektren	268
7.d.	Ringspektren und Produkte	279
7.e.	Allgemeine singuläre Homologie und Kohomologie	284
7.f.	Übungen zu Kapitel 7	287
Kapitel 8.	Dualität	291
8.a.	Spanier-Whitehead-Dualität	291
8.b.	Orientierungen und Thom-Isomorphismen	295
8.c.	Poincaré-Lefschetz-Dualität	298
8.d.	Eulerklasse und Gysin-Sequenz	304
8.e.	Euler- und Lefschetzzahl	306
8.f.	Übungen zu Kapitel 8	313
Kapitel 9.	Simpliziale Theorie	315
9.a.	Simpliziale Komplexe	315
9.b.	Simpliziale Objekte	316
9.c.	Geometrische Realisierung und Singuläre Simplexe	320
9.d.	Realisierungen und interne Hom-Funktoren	322
Literatur		325
Stichwortverzeichnis		327

Einführung

Bevor wir mit dem eigentlichen Stoff der Vorlesung beginnen, möchte ich Ihnen ein paar Beispiele geben, zum einen Aussagen, die sich in der Sprache der Topologie formulieren lassen, zum anderen Aussagen aus anderen Gebieten der Mathematik, die sich aber topologisch beweisen lassen. Nicht alle diese Beispiele werden in der Vorlesung tatsächlich auftreten, weil sie zum Teil etwas mehr Hintergrundwissen brauchen — sei es topologisch, sei es aus einem anderen Gebiet der Mathematik — als wir in dieser Vorlesung lernen können.

0.1. BEISPIEL. Sei

$$B^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1 \}$$

die (offene) Einheitskreisscheibe, und sei

$$D^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1 \}$$

ihr Abschluss.

Der *Brouwersche Fixpunktsatz* besagt:

0.2. SATZ (Brouwer). *Jede stetige Abbildung $f: D^n \rightarrow D^n$ der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe auf sich selbst hat mindestens einen Fixpunkt.*

Das heißt, es existiert $x_0 \in D^n$ mit

$$f(x_0) = x_0 .$$

Hierbei bedeutet stetig das gleiche wie in der Analysis.

Vergleichen Sie diesen Satz mit dem Fixpunktsatz von Banach:

0.3. SATZ (Banach). *Sei X ein vollständiger normierter Vektorraum, und sei $F: X \rightarrow X$ eine Abbildung zu der ein $\lambda < 1$ existiert, so dass*

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \lambda \|x - y\| \tag{*}$$

für alle $x, y \in X$. Dann hat F einen eindeutigen Fixpunkt.

Wir vergleichen die Sätze von Banach und Brouwer.

- (1) Der Satz von Banach ist insofern allgemeiner, als das er für mehr Räume funktioniert, denn der Satz von Brouwer gilt nur für gewisse Teilmengen des \mathbb{R}^n . Er ist schärfer, denn er liefert einen *eindeutigen* Fixpunkt. Außerdem liefert der Beweis ein Verfahren zur approximativen Bestimmung des Fixpunkts.
- (2) Der Satz von Brouwer ist insofern allgemeiner, als er mehr Abbildungen zulässt. Wir könnten nämlich den Satz von Brouwer auch für Abbildungen $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ formulieren, so dass $F(D^n) \subset D^n$. Aus dem Banachschen Satz folgt ja unter anderem, dass der Einheitskreis um den Fixpunkt in sich abgebildet wird. Auf der anderen Seite kann eine Abbildung den Einheitskreis in sich abbilden, ohne dass sie die Lipschitz-Bedingung (*) erfüllt. Der Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes sagt uns allerdings nicht, wie wir den Fixpunkt auffinden können.

Die Sätze sind also verschieden. Der Banachsche Fixpunktsatz ist ein „metrischer“ Satz, während der Brouwersche Fixpunktsatz ein „topologischer“ Satz ist.

0.4. BEISPIEL. Unter der n -dimensionale Einheitssphäre verstehen wir die Menge

$$S^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1 \} .$$

Ein Einheitsvektorfeld auf der S^n ist eine stetige Abbildung $V: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass

$$|V(x)| = 1 \quad \text{und} \quad V(x) \perp x .$$

0.5. SATZ (vom Igel). *Sei n gerade, dann existiert kein stetiges Einheitsvektorfeld auf S^n .*

Mit anderen Worten: ein gerade-dimensionaler Igel ohne Glatzpunkt lässt sich nicht kämmen (Igel lassen sich sowieso nicht kämmen — sie stellen ihre Stacheln auf, wenn man's versucht).

Auf der anderen Seite existiert solch ein Vektorfeld immer, wenn n ungerade ist. In diesem Fall identifizieren wir $\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{C}^{\frac{n+1}{2}}$ und setzen einfach $V(x) = ix$.

0.6. BEISPIEL. Das folgende Beispiel ist mit dem zweiten verwandt, auch wenn man das nicht auf den ersten Blick erkennen kann. Sei A eine Algebra über \mathbb{R} , d.h., A ist ein reeller Vektorraum, und es existiert eine \mathbb{R} -bilineare Multiplikationsabbildung $*$: $A \times A \rightarrow A$. Diese muss weder assoziativ noch kommutativ sein.

Wir nennen A eine *Divisionsalgebra*, wenn zu jedem $a \in A \setminus 0$ ein $a' \in A$ existiert, so dass

$$a' * (a * b) = (b * a) * a' = b$$

für alle $b \in A$ gilt.

0.7. SATZ (Kervaire, Milnor). *Die einzigen endlich-dimensionalen Divisionsalgebren über \mathbb{R} sind \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} (die Quaternionen) und $\mathbb{C}a$ (die Oktaven).*

Diesen Satz werden wir in der Vorlesung sicherlich nicht beweisen. Genau wie beim Fundamentalsatz der Algebra handelt es sich hier um einen rein algebraischen Satz, der sich aber nur mit analytischen / topologischen Methoden beweisen lässt. Die Liste der algebraischen Resultate, die mit topologischen Methoden bewiesen werden, wird immer länger.

Kapitel 1 — Grundbegriffe

Wir lernen in diesem Kapitel den Begriff des topologischen Raumes und der stetigen Abbildungen kennen. Außerdem definieren wir noch zahlreiche Eigenschaften von topologischen Räumen und Abbildungen, und beweisen ein paar kleine Sätze, die wir in späteren Kapiteln benötigen werden. Einiges sollte aus Analysis bekannt sein — zumindest im metrischen Fall.

1.a. Metrische Räume

Wir erinnern uns kurz an die Definition von metrischen Räumen und stetigen Abbildungen im Sinne der Analysis. Wenn wir von einer Definition „im Sinne der Analysis“ sprechen, meinen wir damit eine Definition, die mit „für alle $\varepsilon > 0$ existiert ...“ beginnt.

1.1. DEFINITION. Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) aus einer Menge X und einer Abbildung $d: X \times X \rightarrow [0, \infty]$, die

- (1) *positiv* ist, das heißt, $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,
- (2) *symmetrisch* ist, das heißt, $d(x, y) = d(y, x)$, und
- (3) die *Dreiecksungleichung* $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ erfüllt,

jeweils für alle $x, y, z \in X$.

1.2. BEISPIEL. Es folgen einige einfache Beispiele von Metriken.

- (1) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und \mathbb{C} , jeweils mit $d(x, y) = |y - x|$.
- (2) Jeder normierte Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ ist metrisch mit $d(x, y) = \|y - x\|$.
- (3) Jede Menge M trägt eine Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \text{ und} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (4) Jede Teilmenge Y eines metrischen Raumes (X, d) ist wieder ein metrischer Raum mit der induzierten Metrik $d|_Y = d|_{Y \times Y}$.

Weitere Beispiele folgen in den Übungen 1.95 und 1.97.

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $\varepsilon > 0$ und $x \in X$. Der ε -Ball um x ist die Menge

$$B_\varepsilon(x) = \{x' \in X \mid d(x, x') < \varepsilon\}.$$

1.3. DEFINITION. Seien $(X, d), (Y, d')$ metrische Räume. Eine Abbildung $F: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ heißt *stetig am Punkt* $x \in X$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$F(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(F(x)).$$

F heißt *stetig*, wenn F an allen Punkten $x \in X$ stetig ist.

Das ist genau die Definition, die Sie aus Analysis kennen. Wir erinnern uns an eine weitere Definition. Im folgenden bezeichne $\mathcal{P}X$ die Potenzmenge von X . Da wir es in der Topologie häufig mit Mengen von Mengen — wie der Potenzmenge — zu tun haben, verwenden wir für solche Mengen kalligraphische Buchstaben, um sie zum Beispiel von Punktmenge zu unterscheiden.

1.4. DEFINITION. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *offen in X* , wenn zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$. Die Gesamtheit aller offenen Mengen $\mathcal{O}_d \subset \mathcal{P}X$ heißt die *metrische Topologie*. Sei $x \in X$, dann heißt eine beliebige Teilmenge $V \subset X$ eine *Umgebung von x* , wenn es eine offene Menge U gibt mit $x \in U \subset V$.

1.5. BEMERKUNG. Die Offenheit einer Menge U hängt ab vom umgebenden Raum X und der gewählten Metrik d . So ist etwa die Menge $[-\pi, \pi] \cap \mathbb{Q}$ offen in \mathbb{Q} , aber nicht in \mathbb{R} .

1.6. BEMERKUNG. Zu Definition 1.4 äquivalent ist die folgende Charakterisierung offener und abgeschlossener Mengen in metrischen Räumen. Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Folge $(a_i)_i$ in A , die in (X, d) im Sinne der Analysis konvergiert, der Grenzwert $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i$ in A liegt. Eine Teilmenge $U \subset X$ ist offen, wenn $X \setminus U$ abgeschlossen ist.

Zur Erinnerung: zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem Vektorraum V heißen *äquivalent*, wenn es Konstanten $0 < c, C < \infty$ gibt, so dass

$$c \|v\| \leq \|v\|' \leq C \|v\|$$

für alle v . Sei $V \cong \mathbb{R}^n$ endlich dimensional, dann sind alle Normen äquivalent. Auf unendlich-dimensionalen Vektorräumen gibt es hingegen viele paarweise inäquivalente Normen, und entsprechend viele verschiedene Topologien.

1.7. BEMERKUNG. Zwei Normen auf einem \mathbb{R} - oder \mathbb{C} -Vektorraum induzieren genau dann die gleiche Topologie, wenn sie äquivalent sind.

BEGRÜNDUNG. Seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ äquivalent. Aus

$$d(x, y) = \|y - x\| \leq \frac{1}{c} \|y - x\|' = \frac{1}{c} d'(x, y)$$

folgt $B'_{c\varepsilon}(x) \subset B_\varepsilon(x)$, wobei $B'_{c\varepsilon}(x)$ einen Ball bezüglich d' bezeichne. Somit enthält jeder metrische Ball bezüglich d' einen metrischen Ball bezüglich d . Die umgekehrte Behauptung zeigt man genauso. Hieraus folgt die Gleichheit der Topologien.

Wir nehmen jetzt an, dass $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ die gleiche Topologie induzieren. Bälle $B_r(x) \subset V$ sind offen, denn für jeden Punkt $y \in B_r(x)$ folgt $B_{r-\|x-y\|}(y) \subset B_r(x)$ aus der Dreiecksungleichung. Insbesondere ist $B_1(0) \subset V$ offen. Da $\|\cdot\|'$ die gleiche Topologie induziert, existiert $r > 0$, so dass der $\|\cdot\|'$ -Ball $B'_r(0)$ vom Radius r um 0 in $B_1(0)$ enthalten ist. Aus $\|x\|' < r$ folgt also $\|x\| < 1$, und mit $c = \frac{1}{r}$ erhalten wir daraus

$$c \|v\| \leq \|v\|'$$

für alle $v \in V$. Die andere Ungleichung folgt entsprechend. \square

Wir wollen jetzt zeigen, wie man Stetigkeit auch definieren kann, wenn man nicht die Metrik kennt, sondern nur ihre offenen Mengen.

1.8. SATZ. Seien (X, d) und (Y, d') metrische Räume. Eine Abbildung $F: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ ist genau dann stetig, wenn die Urbilder aller offenen Teilmengen von Y in X wiederum offen sind.

Zusammen mit Bemerkung 1.7 folgt, dass die Stetigkeit einer Abbildung $F: (V, d) \rightarrow (W, d')$ zwischen zwei normierten Vektorräumen nur von den Äquivalenzklassen der Normen d und d' abhängt. Dieses Faktum ist aus Analysis bekannt.

BEWEIS. Wir nehmen an, dass F stetig ist im Sinne von Definition 1.3. Sei $V \subset Y$ offen, und sei $x \in F^{-1}(V) \subset X$ beliebig. Da V offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(F(x)) \subset V$. Aufgrund der Stetigkeit von F existiert ein $\delta > 0$, so dass $F(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(F(x)) \subset V$ gilt, insbesondere folgt $B_\delta(x) \subset F^{-1}(V)$. Da x beliebig war, ist also $F^{-1}(V)$ offen in X .

Wir nehmen jetzt an, dass Urbilder offener Mengen offen sind. Seien jetzt $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da der Ball $B_\varepsilon(F(x))$ in Y offen ist, ist auch $U = F^{-1}(B_\varepsilon(F(x)))$ offen in X , und natürlich liegt x in U . Also existiert ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset U$ gilt. Es folgt $F(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(F(x))$. Da x und ε beliebig waren, ist F also stetig im Sinne von Definition 1.3. \square

1.b. Topologische Räume

Wir erinnern uns an die Definition topologischer Räume und stetiger Abbildungen aus der Analysis.

1.9. BEMERKUNG. Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei \mathcal{O}_d die von d definierte Topologie auf X .

- (1) Die leere Menge \emptyset und X selbst sind nach Definition 1.4 offen, gehören also zu \mathcal{O} .
- (2) seien U_1, \dots, U_k offen, und sei $x \in U_1 \cap \dots \cap U_k$. Da die U_i offen sind, existieren $\varepsilon_i > 0$, so dass $B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$. Sei $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$, dann ist $\varepsilon > 0$, und es gilt $B_\varepsilon(x) \subset U_1 \cap \dots \cap U_k$. Da x beliebig war, ist $U_1 \cap \dots \cap U_k$ also wieder offen.
- (3) Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_d$ eine beliebig grosse Ansammlung offener Mengen. Sei

$$x \in \bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U,$$

dann existiert also ein $U \in \mathcal{U}$, so dass $x \in U$. Da U offen ist, existiert $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U \subset \bigcup \mathcal{U}$. Da x beliebig war, ist $\bigcup \mathcal{U}$ also wieder offen.

Wir benutzen diese drei Beobachtungen über \mathcal{O}_d , um den allgemeinen Begriff einer Topologie zu definieren.

1.10. DEFINITION. Sei X eine Menge. Eine *Topologie* auf X ist eine Teilmenge \mathcal{O} der Potenzmenge $\mathcal{P}X$ mit folgenden Eigenschaften.

- (1) Die leere Menge \emptyset und X selbst liegen in \mathcal{O} .
- (2) Seien $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{O}$, dann liegt auch $U_1 \cap \dots \cap U_k \in \mathcal{O}$.
- (3) Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$, dann liegt auch $\bigcup \mathcal{U}$ in \mathcal{O} .

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar (X, \mathcal{O}) aus einer Menge X und einer Topologie \mathcal{O} auf X .

1.11. BEISPIEL. Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann definiert \mathcal{O}_d nach Bemerkung 1.9 eine Topologie auf X . Umgekehrt heißt eine Topologie \mathcal{O} auf X *metrisierbar*, wenn es eine Metrik d auf X gibt, so dass $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$. Die meisten topologischen Räume, denen wir später begegnen, werden metrisierbar sein. Dennoch gibt es interessante und wichtige topologische Räume, die nicht metrisierbar sind.

1.12. BEISPIEL. Sei X eine beliebige Menge. Wir definieren zwei "triviale" Topologien auf X .

- (1) Sei $\mathcal{O}_\delta = \mathcal{P}X$, dann ist jede Teilmenge von X offen bezüglich \mathcal{O}_δ . Wir nennen \mathcal{O}_δ die *diskrete Topologie* auf X . Die diskrete Topologie wird von der Metrik aus Beispiel 1.2 (3) induziert.
- (2) Das andere Extrem ist $\mathcal{O}_K = \{\emptyset, X\} \subset \mathcal{P}X$. Diese Topologie heißt *Klumpentopologie* (*indiskrete Topologie*). Diese Topologie ist nur metrisierbar, wenn X höchstens einen Punkt enthält, wie wir später sehen werden.

Die Topologie ist die Menge aller offenen Teilmengen. Wir definieren entsprechend die Begriffe „Umgebung“ und „abgeschlossene Menge“ wie gehabt.

1.13. DEFINITION. Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *offen* bezüglich \mathcal{O} , falls $U \in \mathcal{O}$. Sei $x \in X$ und $V \subset X$ mit $x \in V$, dann heißt V eine *Umgebung* von x

bezüglich \mathcal{O} , falls es eine offene Menge $U \in \mathcal{O}$ gibt, so dass $x \in U \subset V$ gilt. Sei $A \subset X$, dann heißt A *abgeschlossen* bezüglich \mathcal{O} , falls das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

1.14. DEFINITION. Sei (X, \mathcal{O}) topologischer Raum, und sei $Y \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Das *Innere* $\overset{\circ}{Y}$ von Y ist die größte offene Teilmenge von X , die ganz in Y enthalten ist. Der *Abschluss* \overline{Y} von Y ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X , die Y enthält. Der *Rand* von Y ist die Menge $\partial Y = \overline{Y} \setminus \overset{\circ}{Y}$.

1.15. BEMERKUNG. Sei (X, \mathcal{O}) topologischer Raum, und sei $Y \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Es gilt

$$\overset{\circ}{Y} = \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{O} \\ U \subset Y}} U \quad \text{und} \quad \overline{Y} = \bigcap_{\substack{X \setminus A \in \mathcal{O} \\ A \supset Y}} A.$$

Die erste Menge ist offen nach Definition 1.10 (3). Für die zweite zeigt man analog, dass das Komplement abgeschlossen ist. Ausserdem ist

$$\overline{X \setminus Y} = X \setminus \overset{\circ}{Y}, \quad (X \setminus Y)^\circ = X \setminus \overline{Y}, \quad \text{und} \quad \partial(X \setminus Y) = \partial Y.$$

1.16. BEISPIEL. Das Innere und der Abschluss einer Menge hängen vom umgebenden Raum und seiner Topologie ab. Sei $V = [-\pi, \pi] \cap \mathbb{Q}$, dann gilt

$$\begin{array}{lll} \text{in } \mathbb{Q} : & \overset{\circ}{V} = V, & \overline{V} = V, & \partial V = \emptyset, \\ \text{und in } \mathbb{R} : & \overset{\circ}{V} = \emptyset, & \overline{V} = [-\pi, \pi], & \partial V = [-\pi, \pi]. \end{array}$$

Falls es klar ist, von welcher Topologie \mathcal{O} auf X wir reden, lassen wir den Zusatz „bezüglich \mathcal{O} “ in der Regel weg. Wir haben in Satz 1.8 ein „topologisches“ Kriterium für die Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen kennengelernt. Wir erheben dieses Kriterium zur Definition.

1.17. DEFINITION. Eine Abbildung $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ zwischen topologischen Räumen heißt *stetig* genau dann, wenn Urbilder offener Mengen offen sind, wenn also $F^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ für alle $U \in \mathcal{O}_Y$. Es bezeichne $C(X, Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen von X nach Y .

Wenn eine stetige Abbildung $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ bijektiv ist und $F^{-1}: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ ebenfalls stetig ist, heißt F ein *Homöomorphismus*.

- 1.18. BEISPIEL. (1) Nach Satz 1.8 sind Abbildungen zwischen metrischen Räumen genau dann im topologischen Sinne stetig, wenn sie im metrischen Sinne stetig sind.
(2) Seien $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, und sei y_0 ein Punkt in Y . Die konstante Abbildung $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ mit $F(x) = y_0$ für alle $x \in X$ ist immer stetig, denn für jede offene Menge $U \subset Y$ gilt

$$F^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{O}_X & \text{falls } y_0 \notin U, \text{ und} \\ X \in \mathcal{O}_X & \text{falls } y_0 \in U. \end{cases}$$

1.19. BEMERKUNG. Seien $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y), (Z, \mathcal{O}_Z)$ topologische Räume.

- (1) Die Identität $\text{id}_X: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ auf X mit $\text{id}_X(x) = x$ für alle $x \in X$ ist immer stetig, denn für alle $U \in \mathcal{O}_X$ gilt

$$\text{id}_X^{-1}(U) = U \in \mathcal{O}_X.$$

- (2) Seien $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ und $G: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetige Abbildungen, dann ist auch $G \circ F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetig. Sei nämlich $U \subset Z$ offen in Z , dann ist $G^{-1}(U)$ offen in Y , und somit ist $F^{-1}(G^{-1}(U))$ offen in X . Da also $(G \circ F)^{-1}(U) = F^{-1}(G^{-1}(U)) \in \mathcal{O}_X$ für alle $U \in \mathcal{O}_Z$, ist $G \circ F$ stetig.

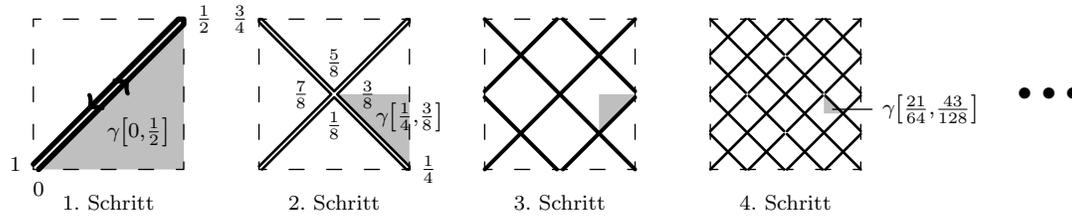


ABBILDUNG 1.1. Eine flächenfüllende Kurve

Mit einer *Klasse* bezeichnen wir eine beliebige Ansammlung von Mengen. Manche Klassen sind Mengen, alle anderen nennt man echte Klassen. Ein Beispiel für eine echte Klasse ist die Klasse aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Da Elemente von Klassen selbst bloß Mengen und keine echten Klassen sind, erhalten wir hier kein Paradoxon.

1.20. DEFINITION. Eine *Kategorie* \mathcal{C} besteht aus

- (1) einer Klasse von *Objekten* $\text{Obj}(\mathcal{C})$,
- (2) zu je zwei Objekten $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ einer Menge $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von *Morphismen*,
- (3) je einem ausgezeichneten Morphismus $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ für jedes Objekt $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$,
und
- (4) zu je drei Objekten $X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ einer *Verkettung*

$$\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \quad \text{mit} \quad (f, g) \mapsto g \circ f,$$

so dass die folgenden zwei Axiome gelten.

Identität. Seien $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ und $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, dann gilt

$$f = f \circ \text{id}_X = \text{id}_Y \circ f.$$

Assoziativität. Für alle $X, Y, Z, W \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ und alle $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$, gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

1.21. BEISPIEL. Es folgen einige typische Beispiele von Kategorien.

- (1) Die Kategorie *Set* hat als Objekte alle Mengen, und als Morphismen alle Abbildungen zwischen Mengen.
- (2) Die Kategorie *Grp* hat als Objekte alle Gruppen, und als Morphismen alle Gruppenhomomorphismen.
- (3) Sei \mathbb{k} ein Körper, dann hat die Kategorie $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$ als Objekte alle \mathbb{k} -Vektorräume, und als Morphismen alle \mathbb{k} -linearen Abbildungen.
- (4) Die Kategorie *Top* hat als Objekte alle topologischen Räume, und als Morphismen alle stetigen Abbildungen, siehe Bemerkung 1.19.

In jedem dieser Beispiele ist die Identität die Identität der zugrundeliegenden Menge, und die Komposition die Hintereinanderschaltung von Abbildungen.

Schließlich wollen wir an ein pathologisches Beispiel erinnern, das uns zeigt, dass stetige Abbildungen mitunter unerwartete Eigenschaften an den Tag legen.

1.22. BEISPIEL. Es gibt stetige, surjektive Abbildungen vom Einheitsintervall $I = [0, 1]$ in die Menge $I \times I \subset \mathbb{R}^2$. Zum Beispiel kann man zwei Kopien der Kochschen Schneeflockenkurve aneinandersetzen, siehe Abbildung 1.1. Die entstehende Kurve γ ist stetig, sogar $\frac{1}{2}$ -Höldersch. In jedem Schritt γ_{i+1} wird jede Strecke der Kurve γ_i durch vier Strecken der halben Länge ersetzt. Man überzeugt sich, dass die Folge $(\gamma_i)_i$ gleichmäßig konvergiert. Den Bildpunkt $\gamma(t)$ kann man durch Intervallschachtelung bestimmen.

Wir können auch verschiedene Topologien auf ein und demselben Raum vergleichen.

1.23. DEFINITION. Seien \mathcal{O} und \mathcal{O}' zwei Topologien auf einer Menge X . Dann ist \mathcal{O}' *feiner* als \mathcal{O} und \mathcal{O} *größer* als \mathcal{O}' , wenn $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$.

1.24. BEMERKUNG. Eine Topologie \mathcal{O}' auf X ist nach Definition 1.17 genau dann feiner als \mathcal{O} , wenn die Identität $\text{id}_X: (X, \mathcal{O}') \rightarrow (X, \mathcal{O})$ stetig ist. Mit Bemerkung 1.19 (2) folgt: Sei die Abbildung $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig, sei \mathcal{O}'_X feiner als oder gleich \mathcal{O}_X , und sei \mathcal{O}'_Y größer als oder gleich \mathcal{O}_Y , dann ist auch $F: (X, \mathcal{O}'_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}'_Y)$ stetig.

1.25. BEISPIEL. Sei $X = \mathbb{R}^n$, sei \mathcal{O}_d die metrische Topologie zur Standardmetrik, und sei \mathcal{O}_f die Topologie zur französischen Eisenbahnmetrik. Dann ist die diskrete Topologie $\mathcal{O}_\delta = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ aus Beispiel 1.12 (1) feiner als \mathcal{O}_f , die Topologie \mathcal{O}_f ist feiner als \mathcal{O}_d , und \mathcal{O}_d ist wiederum feiner als die Klumpentopologie $\mathcal{O}_K = \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$ aus Beispiel 1.12 (2).

1.c. Trennungseigenschaften

Wir untersuchen die Frage, ob es in einem topologischen Raum genug offene Mengen gibt, so dass man vorgegebene Punkte oder Teilmengen voneinander „trennen“ kann.

Wir beantworten diese Frage zunächst für metrische Räume. Sei dazu $I = ([0, 1], \mathcal{O}_d)$ das reelle Einheitsintervall, wie üblich versehen mit der metrischen Topologie.

1.26. SATZ. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt bezüglich \mathcal{O}_d :

- (1) *einpunktige Teilmengen von X sind abgeschlossen;*
- (2) *seien $A_0, A_1 \subset X$ abgeschlossen und disjunkt, dann existieren disjunkte offene Mengen $U_0, U_1 \in \mathcal{O}$ mit $A_0 \subset U_0$ und $A_1 \subset U_1$;*
- (3) *seien $A_0, A_1 \subset X$ abgeschlossen und disjunkt, dann gibt es eine stetige Funktion $f: X \rightarrow I$ mit $A_0 = f^{-1}\{0\}$ und $A_1 = f^{-1}\{1\}$.*

BEWEIS. Zu (1). Zu zeigen ist die Offenheit von $X \setminus \{x\}$ für ein beliebiges $x \in X$. Sei dazu $x \neq y \in X$, dann folgt

$$B_{d(x,y)}(y) \subset X \setminus \{x\}.$$

Also ist $X \setminus \{x\}$ offen nach 1.4.

(3) \longrightarrow (2). Wähle f wie in (3). Da f stetig ist, sind die Mengen $U_0 = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ und $U_1 = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ disjunkt und offen in X , da $[0, \frac{1}{2})$ und $(\frac{1}{2}, 1]$ disjunkt und offen in I sind.

Punkt (3) lassen wir als Übung 1.103. □ □

1.27. DEFINITION. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) hat die *Trennungseigenschaft* oder erfüllt das *Trennungsaxiom*

- (T0) wenn es zu je zwei Punkten $x \neq y$ in X eine offene Menge $U \in \mathcal{O}$ gibt mit $x \in U, y \notin U$ oder $x \notin U, y \in U$,
- (T1) wenn alle einpunktigen Mengen $\{x\}$ für $x \in X$ abgeschlossen sind,
- (T2) oder ist ein *Hausdorff-Raum*, wenn es zu je zwei Punkten $x \neq y$ in X disjunkte offene Mengen $U, V \in \mathcal{O}$ mit $x \in U$ und $y \in V$ gibt,
- (T3) wenn es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$ und jedem Punkt $x \in X \setminus A$ disjunkte offene Mengen $U, V \in \mathcal{O}$ mit $A \subset U$ und $x \in V$ gibt,
- (T3a) wenn es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$ und jedem Punkt $x \in X \setminus A$ eine stetige Funktion $f: (X, \mathcal{O}) \rightarrow I$ mit $f(A) \subset \{0\}$ und $f(x) = 1$ gibt,
- (T4) wenn es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subset X$ disjunkte offene Mengen $U, V \in \mathcal{O}$ mit $A \subset U$ und $B \subset V$ gibt.

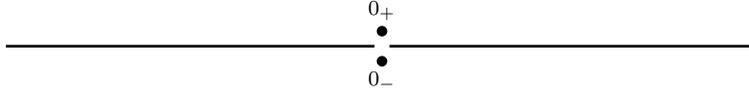


ABBILDUNG 1.2. Ein nicht Hausdorffscher Raum

Ein topologischer Raum heißt *regulär*, wenn er die Eigenschaften (T1) und (T3) erfüllt, *vollständig regulär*, wenn er die Eigenschaften (T1) und (T3a) erfüllt, und *normal*, wenn er die Eigenschaften (T1) und (T4) erfüllt.

Die für uns zunächst wichtigste Trennungseigenschaft ist „hausdorffsch“. Bemerkung 1.28 und Beispiel 1.29 sollen das verdeutlichen.

1.28. BEMERKUNG. Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum.

- (1) Wenn (X, \mathcal{O}) hausdorffsch ist, dann hat jede Folge in X höchstens einen Grenzwert. Das heißt, zu jeder Folge $(x_i)_i$ gibt es höchstens einen Punkt $x \in X$, so dass für jede Umgebung U von x fast alle Folgenglieder x_i in U liegen. Denn wäre $y \in X \setminus \{x\}$ ein weiterer Grenzwert, so könnte man x und y durch disjunkte offene Umgebungen U und V trennen, und fast alle Folgenglieder müssten in $U \cap V = \emptyset$ liegen.
- (2) Wenn sich zwei Punkte $x, y \in X$ nicht durch disjunkte offene Umgebungen trennen lassen, gilt $f(x) = f(y)$ für jede stetige Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Denn wäre $f(x) \neq f(y)$, so könnte man $f(x)$ und $f(y)$ in \mathbb{R} durch disjunkte offene Intervalle $I, J \subset \mathbb{R}$ trennen. Aber dann trennten $f^{-1}(I)$ und $f^{-1}(J)$ bereits x und y .

1.29. BEISPIEL. Betrachte den Raum $X = (-1, 0) \cup \{0_+, 0_-\} \cup (0, 1)$ mit der folgenden Topologie \mathcal{O} . Eine Teilmenge $U \subset X$ sei offen, wenn zu jedem Punkt $x \in U \setminus \{0_+, 0_-\}$ ein $\varepsilon_x > 0$ mit $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subset U \setminus \{0_+, 0_-\}$ existiert, und falls $0_- \in U$ oder $0_+ \in U$, ein $\varepsilon_0 > 0$ mit $(-\varepsilon_0, 0) \cup (0, \varepsilon_0) \subset U$ existiert, siehe Abbildung 1.2. Man überzeugt sich leicht, dass (X, \mathcal{O}) die Trennungseigenschaften (T0) und (T1) erfüllt. Die Hausdorff-Eigenschaft (T2) ist jedoch verletzt, da der Schnitt je zweier Umgebungen von 0_+ und 0_- eine kleine Menge der Form $(-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$ enthält. Als Beispiel für eine Folge mit zwei Grenzwerten betrachten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0_+ \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0_- .$$

Ein wichtiges Hilfsmittel in der Topologie ist das Lemma von Urysohn, wonach jeder (T4)-Raum „viele stetige Funktionen“ trägt.

1.30. LEMMA (Urysohn). Sei (X, \mathcal{O}) ein (T4)-Raum. Dann existiert zu je zwei abgeschlossenen, disjunkten Teilmengen $A, B \subset X$ eine stetige Funktion $f: X \rightarrow I$ mit $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$.

BEWEIS. Sei

$$D = \left\{ a 2^{-k} \mid a, k \in \mathbb{N}, 0 \leq a \leq 2^k \right\}$$

die Menge der dyadischen Zahlen im Einheitsintervall I . Wir wollen induktiv zu allen $d \in D$ eine offene Menge U_d konstruieren, so dass $A \subset \bar{U}_d \subset U_{d'} \subset X \setminus B$ für alle $d, d' \in D$ mit $d < d'$. Für $t \in I$ definieren wir dann offene Mengen

$$U_t = \bigcup_{d \in D \cap [0, t]} U_d ,$$

und wiederum gilt $\bar{U}_t \subset U_{t'}$ für alle $t, t' \in I$ mit $t < t'$, da zwischen t und t' noch beliebig viele dyadische Zahlen liegen.

Mit $U_t = \emptyset$ für $t < 0$ und $U_t = X$ für $t > 1$ definieren wir

$$f(x) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid x \in U_t\} \in [0, 1].$$

Aus $A \subset U_0 \subset U_1 \subset X \setminus B$ folgt sofort $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$. Um Stetigkeit zu zeigen, betrachten wir für $t \in I$ und $x \in X$ mit $f(x) = t$ sowie $\varepsilon > 0$ das Intervall $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \cap I$. Sei $0 < \delta < \varepsilon$, dann folgt

$$x \in U_{t+\delta} \setminus \overline{U}_{t-\delta} \subset f^{-1}(t - \varepsilon, t + \varepsilon),$$

also ist f stetig.

Nun zur Konstruktion der Familie $(U_d)_{d \in D}$. Zu (T4) äquivalent ist die folgende Aussage: sei $A \subset Y \subset X$, A abgeschlossen und Y offen, dann existiert eine offene Menge U , so dass $A \subset U \subset \overline{U} \subset Y$.

Wir wählen also zunächst $U_0 \in \mathcal{O}$ mit $A \subset U_0 \subset \overline{U}_0 \subset X \setminus B$, und $U_1 \in \mathcal{O}$ mit $\overline{U}_0 \subset U_1 \subset \overline{U}_1 \subset X \setminus B$. Seien jetzt alle U_d mit Nenner 2^k bestimmt, dann wählen wir $U_{(2a+1)2^{-k-1}}$ induktiv so, dass

$$\overline{U}_{a2^{-k}} \subset U_{(2a+1)2^{-k-1}} \subset \overline{U}_{(2a+1)2^{-k-1}} \subset U_{(a+1)2^{-k}}. \quad \square$$

1.31. BEMERKUNG. Urysohn's Lemma 1.30 ist nicht ganz so stark wie Satz 1.26 (3), denn dort galt sogar $f^{-1}(0) = A$ und $f^{-1}(1) = B$. Wenn nämlich $f^{-1}(0) = A$ gilt, dann können wir die abgeschlossene Menge A als Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen schreiben, etwa

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left[0, \frac{1}{n}\right).$$

Und das muss in allgemeinen (T4)-Räumen nicht gelten.

1.32. BEMERKUNG. Aus Satz 1.26 und den obigen Definitionen ergeben sich die folgenden Implikationen.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{metrisierbar} & \implies & \text{normal} & \implies & \begin{array}{c} \text{vollständig} \\ \text{regulär} \end{array} & \implies & \text{regulär} & \implies & \begin{array}{c} \text{hausdorffsch} \\ \text{(T2)} \end{array} & \implies & \text{(T1)} & \implies & \text{(T0)} \\ & & & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & & & & \\ & & & & \text{(T4)} & & \text{(T3a)} & \implies & \text{(T3)} & & & & & \end{array}$$

Aus metrisierbar folgt normal wegen Satz 1.26. Die drei vertikalen Pfeile beruhen direkt auf den Definitionen. Aus (T3a) folgt (T3) wie (2) aus (3) in Satz 1.26, genauso folgt regulär aus vollständig regulär. Um aus regulär hausdorffsch zu folgern, ersetzen wir die abgeschlossene Menge in (T3) durch einen Punkt, der nach (T1) abgeschlossen ist. Aus normal folgt vollständig regulär mit (T1) und Urysohns Lemma 1.30. Aus hausdorffsch folgt (T1) wie im Beweis von 1.26 (1), und (T1)-Räume sind offensichtlich (T0).

In den Übungen 1.104–1.106 wird deutlich, dass in der Tat die Eigenschaften (T3), (T3a) und (T4) ohne (T1) wenig Aussagekraft besitzen.

1.d. Basen und Abzählbarkeitseigenschaften

Um eine Topologie \mathcal{O} zu definieren, ist es häufig unbequem, alle offenen Mengen anzugeben. Stattdessen sucht man möglichst kleine Teilmengen \mathcal{U} von \mathcal{O} , so dass \mathcal{O} selbst die größte Topologie ist, für die alle Mengen in \mathcal{U} offen sind. So wird man auf die Begriffe „Basis“ und „Subbasis“ geführt. Für spätere Überlegungen ist es oft hilfreich zu wissen, dass manche topologischen Räume eine „kleine“ — sprich abzählbare — Basis besitzen.

1.33. DEFINITION. Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ heißt *Basis* von \mathcal{O} , wenn

$$\mathcal{O} = \left\{ \bigcup \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \subset \mathcal{B} \right\} = \left\{ \bigcup_{i \in I} U_i \mid I \text{ Menge, } U_i \in \mathcal{B} \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Eine Teilmenge $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ heißt *Subbasis* von \mathcal{O} , wenn die Menge

$$\{ U_1 \cap \dots \cap U_k \mid k \in \mathbb{N}, U_1, \dots, U_k \in \mathcal{S} \}$$

eine Basis von \mathcal{O} bildet.

Mit anderen Worten: \mathcal{B} ist eine Basis, wenn sich jede offene Menge als (beliebige) Vereinigung von Elementen aus \mathcal{B} schreiben lässt. \mathcal{S} ist eine Subbasis, wenn sich jede offene Menge als (beliebige) Vereinigung von Durchschnitten je endlich vieler Elemente aus \mathcal{S} schreiben lässt. Insbesondere ist jede Basis auch eine Subbasis.

1.34. BEISPIEL. Es folgen Basen und Subbasen für einige uns wohlbekannte Topologien.

- (1) Sei X eine Menge. Die einpunktigen Teilmengen von X bilden eine Basis der diskreten Topologie \mathcal{O}_δ auf X . Die Menge $\{X\}$ bildet eine Basis der Klumpentopologie \mathcal{O}_K , und die leere Menge bildet eine Subbasis, denn $\bigcap \emptyset = X \in \mathcal{P}X$.
- (2) Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann bildet die Menge \mathcal{B} aller metrischen Bälle mit rationalem Radius eine Basis der metrischen Topologie \mathcal{O}_d . Sei nämlich $U \in \mathcal{O}_d$. Nach Definition 1.4 existiert zu jedem $x \in U$ ein Radius $0 < r_x \in \mathbb{Q}$ so dass $B_{r_x}(x) \subset U$. Also gilt

$$U = \bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x) \quad \text{und} \quad \{ B_{r_x}(x) \mid x \in U \} \subset \mathcal{B}.$$

Darüberhinaus ist eine Teilmenge $V \subset X$ genau dann eine Umgebung von $x \in X$, wenn sie einen der abzählbar vielen offene Bälle $B_r(x)$ mit $0 < r \in \mathbb{Q}$ enthält.

- (3) Sei $X = \mathbb{R}^n$ mit der Standard-Topologie versehen. Dann bildet die Menge aller metrischen Bälle mit rationalem Radius um Mittelpunkte mit rationalen Koordinaten bereits eine Basis der metrischen Topologie. Diese Basis ist abzählbar, während \mathcal{O} selbst überabzählbar ist.

Die letzten beiden Beispiele sollen als Motivation für die folgende Definition dienen.

1.35. DEFINITION. Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Dann hat (X, \mathcal{O}) die *Abzählbarkeitseigenschaft* oder erfüllt das *Abzählbarkeitsaxiom*

- (A1) wenn jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Menge $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{P}X$ von Umgebungen besitzt, so dass $V \subset X$ genau dann eine Umgebung von x ist, wenn es ein $U \in \mathcal{U}_x$ mit $U \subset V$ gibt, und
- (A2) wenn \mathcal{O} eine abzählbare Basis besitzt.

Eine Teilmenge $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{O}$ wie in (A1) heißt auch *Umgebungsbasis*. Aus (A2) folgt (A1), denn sei \mathcal{B} eine abzählbare Basis von X und $x \in X$, dann ist

$$\mathcal{U}_x = \{ U \in \mathcal{B} \mid x \in U \}$$

eine abzählbare Umgebungsbasis von x . Das zweite Abzählbarkeitsaxiom lässt sich benutzen, um topologische Argumente induktiv über kleine Mengen zu führen. Das erste Abzählbarkeitsaxiom wird häufig benötigt, um topologische Begriffe über Folgen zu erklären, so wie im folgenden Satz.

1.36. SATZ. Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum mit der Abzählbarkeitseigenschaft (A1). Dann ist eine Menge $A \subset X$ genau dann abgeschlossen, wenn sie folgenabgeschlossen ist, das heißt, wenn jede Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in A , die in X konvergiert, ihre Grenzwerte in A annimmt.

Beachte, dass der Grenzwert einer Folge nicht eindeutig sein muss, wenn der Raum nicht Hausdorff (T2) ist.

BEWEIS. Sei A abgeschlossen, und sei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X$ eine Folge mit Grenzwert $x \in X \setminus A$. Wir wollen zeigen, dass dann nicht alle a_i in A liegen können. Da $X \setminus A$ eine offene Umgebung von a ist, existiert ein $i_0 > 0$, so dass $a_i \notin A$ für alle $i \geq i_0$.

Sei umgekehrt A nicht abgeschlossen, das heißt, es gibt einen Punkt $x \notin A$, so dass jede Umgebung V von x die Menge A schneidet. Da (A1) gilt, können wir eine abzählbare Umgebungsbasis $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von x wählen. Da endliche Durchschnitte offener Mengen offen sind, sind endliche Durchschnitte von Umgebungen von x wiederum Umgebungen von x , und wir setzen $U_i = V_1 \cap \dots \cap V_i$. Dann ist $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis mit der Eigenschaft, dass $U_j \subset U_i$ für alle $j \geq i$. Sei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_i \in A \cap U_i$. Eine Teilmenge $V \subset X$ ist Umgebung von x genau dann, wenn es ein i_0 gibt mit $U_i \subset V$ für alle $i \geq i_0$. Es folgt $a_i \in V$ für alle $i \geq i_0$. Daraus folgt, dass x ein Grenzwert unserer Folge a_i ist. \square

1.37. BEMERKUNG. Für allgemeine metrisierbare Räume gilt nur (A1), siehe Beispiel 1.34 (2). Es gilt aber der *erste Metrisationssatz von Urysohn*: Wenn (X, \mathcal{O}) die zweite Abzählbarkeitseigenschaft (A2) hat, dann ist (X, \mathcal{O}) genau dann metrisierbar, wenn (X, \mathcal{O}) regulär ist, also (T1) und (T3) erfüllt. Man beachte, dass (X, \mathcal{O}) nach Satz 1.26 dann sogar normal ist.

Die allgemeinen Metrisationssätze von Bing und Nagata-Smirnov geben ein genaues topologisches Äquivalent zur Metrisierbarkeit, sind aber leider nicht ganz so einfach zu formulieren.

Wir können eine Subbasis oder Basis aber auch dazu verwenden, eine Topologie zu definieren.

1.38. SATZ. Sei X eine Menge, und seien $\mathcal{B}, \mathcal{S} \subset \mathcal{P}X$ beliebig.

- (1) Wenn für je endlich viele $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}$ mit $k \geq 0$ eine Untermenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ existiert, so dass $B_1 \cap \dots \cap B_k = \bigcup \mathcal{U}$, dann existiert eine eindeutige Topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ auf X mit Basis \mathcal{B} . Wir nennen $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ die durch die Basis \mathcal{B} definierte Topologie.
- (2) Es existiert eine eindeutige Topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ auf X mit Subbasis \mathcal{S} . Sei \mathcal{O}_X eine beliebige Topologie auf X mit $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}_X$, dann gilt $\mathcal{O}_{\mathcal{S}} \subset \mathcal{O}_X$. Wir nennen $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ die durch die Subbasis \mathcal{S} definierte Topologie.

Insbesondere ist $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ die *kleinste* oder *größte* Topologie auf X , bezüglich der alle Mengen der Subbasis \mathcal{S} offen sind.

BEWEIS. Zu (1). Die Menge $\mathcal{O} = \{ \bigcup \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \subset \mathcal{B} \}$ enthält $\emptyset = \bigcup \emptyset$ und erfüllt Axiom (3) in Definition 1.10. Nach Voraussetzung gilt $X = \bigcap \emptyset \subset \mathcal{O}$, somit ist auch Axiom (1) erfüllt. Um Axiom (2) zu zeigen, seien $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k \subset \mathcal{B}$, dann folgt

$$\left(\bigcup \mathcal{U}_1 \right) \cap \dots \cap \left(\bigcup \mathcal{U}_k \right) = \bigcup_{U_1 \in \mathcal{U}_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}_k} U_1 \cap \dots \cap U_k.$$

Nach Voraussetzung gilt $U_1 \cap \dots \cap U_k \in \mathcal{O}$ für alle Terme auf der rechten Seite, und da Axiom (3) gilt, auch für deren Vereinigung. Also ist \mathcal{O} eine Topologie.

Man sieht leicht, dass jede Topologie \mathcal{O}' , die \mathcal{B} enthält, alle offenen Mengen aus \mathcal{O} enthalten muss, also folgt $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$. Wäre umgekehrt $U \in \mathcal{O}' \setminus \mathcal{O}$, dann liesse U sich nicht als Vereinigung von Elementen aus \mathcal{O} schreiben, \mathcal{B} wäre dann also keine Basis von \mathcal{O}' . Also ist $\mathcal{O}_{\mathcal{B}} = \mathcal{O}$ die einzige Topologie mit Basis \mathcal{B} .

Zu (2) setze

$$\mathcal{B} = \{ U_1 \cap \dots \cap U_k \mid k \geq 0, U_1, \dots, U_k \in \mathcal{S} \},$$

dann erfüllt \mathcal{B} die Voraussetzung von (1) und definiert eine Topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ mit Subbasis \mathcal{S} . Wie unter (1) lässt sich zeigen, dass das die einzige Topologie auf X mit Subbasis \mathcal{S} ist; in der Tat enthält jede Topologie \mathcal{O}_X mit $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}_X$ bereits $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$. \square

1.e. Konstruktionen topologischer Räume

In diesem Abschnitt lernen wir, wie man aus bekannten topologischen Räumen neue topologische Räume gewinnen kann.

Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen, dann bezeichne $\coprod_i X_i$ die disjunkte Vereinigung dieser Mengen, und $\iota_i: X_i \hookrightarrow \coprod_i X_i$ sei die Inklusion der Menge X_i in die disjunkte Vereinigung. Da die Mengen X_i nicht immer paarweise disjunkt sind, müssen wir die disjunkte Vereinigung beliebiger Mengen erst konstruieren, zum Beispiel wie folgt:

$$\coprod_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} \{i\} \times X_i \subset I \times \bigcup_{i \in I} X_i \quad \text{und} \quad \iota_i(x_i) = (i, x_i).$$

1.39. DEFINITION. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die *topologische Summe* der X_i ist definiert als

$$\coprod_i (X_i, \mathcal{O}_i) = \left(\coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup \right) \quad \text{mit} \quad \mathcal{O}_\sqcup = \left\{ U \subset \coprod_i X_i \mid \iota_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Wenn wir X_i mit der Teilmenge $\iota_i(X_i) \subset \coprod_i X_i$ identifizieren, dann ist $U \subset \coprod_i X_i$ genau dann offen, wenn $U \cap X_i$ für alle $i \in I$ in X_i offen ist.

Wir überprüfen, dass \mathcal{O}_\sqcup eine Topologie ist. Dazu nutzen wir elementare Eigenschaften der Urbild-Abbildung ι_i^{-1} aus, nämlich

$$\begin{aligned} \iota_i^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \in \mathcal{O}_i, & \iota_i^{-1}(X) &= X_i \in \mathcal{O}_i, \\ \iota_i^{-1}(U_i \cap \dots \cap U_k) &= \iota_i^{-1}(U_i) \cap \dots \cap \iota_i^{-1}(U_k) \in \mathcal{O}_i & \text{und} & \quad \iota_i^{-1}\left(\bigcup \mathcal{U}\right) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \iota_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i \end{aligned}$$

für $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{O}$ und $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$.

1.40. SATZ. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume.

- (1) Die Topologie \mathcal{O}_\sqcup ist die feinste Topologie auf der disjunkten Vereinigung $\coprod_i X_i$, für die alle Abbildungen $\iota_i: X_i \hookrightarrow \coprod_i X_i$ stetig sind.
- (2) Die Topologie \mathcal{O}_\sqcup ist die einzige Topologie \mathcal{O} auf $\coprod_i X_i$, so dass eine beliebige Abbildung F von $(\coprod_i X_i, \mathcal{O})$ in einen beliebigen topologischen Raum (Z, \mathcal{O}_Z) genau dann stetig ist, wenn alle Abbildungen $F \circ \iota_i: (X_i, \mathcal{O}_i) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetig sind.
- (3) Der Raum $(\coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup)$ zusammen mit den Abbildungen $(\iota_i: X_i \rightarrow \coprod_i X_i)_{i \in I}$ ist ein Koproduct der Räume $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ in der Kategorie Top , das heißt, dass zu jedem Objekt (Z, \mathcal{O}_Z) und jeder Familie von Morphismen $(F_i: X_i \rightarrow Z)_{i \in I}$ genau ein Morphismus $F: \coprod_i X_i \rightarrow Z$ existiert, so dass $F_i = F \circ \iota_i$ für alle $i \in I$.

1.41. BEMERKUNG. Die charakteristische Eigenschaft (2) der topologischen Summe wird durch das linke kommutative Diagramm veranschaulicht.

$$\begin{array}{ccc} (X_i, \mathcal{O}_i) & \xrightarrow{F \circ \iota_i} & (Z, \mathcal{O}_Z) \\ \iota_i \downarrow & \nearrow F & \\ (\coprod_i X_i, \mathcal{O}) & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (X_i, \mathcal{O}_i) & \xrightarrow{F_i} & (Z, \mathcal{O}_Z) \\ \iota_i \downarrow & \nearrow F & \\ (Y, \mathcal{O}_Y) & & \end{array} \quad (1.1)$$

Ein Raum (Y, \mathcal{O}_Y) mit stetigen Abbildungen $\iota_i: X_i \rightarrow Y$ ist genau dann ein *Koproduct* im Sinne von Satz 1.40 (3), wenn zu jedem Raum (Z, \mathcal{O}_Z) mit stetigen Abbildungen $F_i: X_i \rightarrow Z$ genau eine stetige Abbildung F wie im rechten Diagramm existiert.

Wie bei vielen universellen Konstruktionen folgt, dass das Koprodukt bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt ist durch (3). Wenn also ein anderer Raum (Y, \mathcal{O}_Y) mit Abbildungen $(\eta_i: X_i \rightarrow Y)_i$ die Koprodukteigenschaft erfüllt, dann gibt es genau einen Homöomorphismus $G: \coprod_i X_i \rightarrow Y$ mit $\eta_i = G \circ \iota_i$ für alle i . Dazu betrachten wir die folgenden vier Diagramme.

$$\begin{array}{ccc}
(X_i, \mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\eta_i} & (Y, \mathcal{O}_Y) \\
\downarrow \iota_i & \nearrow G & \\
(\coprod_i X_i, \mathcal{O}) & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
(X_i, \mathcal{O}_i) & \xleftarrow{\iota_i} & (\coprod_i X_i, \mathcal{O}) \\
\downarrow \eta_i & \nearrow H & \\
(Y, \mathcal{O}_Y) & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(X_i, \mathcal{O}_i) & \xleftarrow{\iota_i} & (\coprod_i X_i, \mathcal{O}) \\
\downarrow \iota_i & \nearrow \text{id} & \\
(\coprod_i X_i, \mathcal{O}) & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
(X_i, \mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\eta_i} & (Y, \mathcal{O}_Y) \\
\downarrow \eta_i & \nearrow \text{id} & \\
(Y, \mathcal{O}_Y) & &
\end{array}$$

Die ersten beiden Diagramme zeigen die Existenz eindeutiger Abbildungen G und H , die letzten zwei Diagramme zeigen, dass $H = G^{-1}$, so dass G in der Tat ein Homöomorphismus ist. Da dieser Homöomorphismus stets eindeutig ist, kann man mit seiner Hilfe je zwei verschiedene Modelle für das Koprodukt miteinander identifizieren.

BEWEIS des Satzes 1.40. Zu (1) sei \mathcal{O} eine beliebige Topologie auf $\coprod_i X_i$. Es sind genau dann alle Inklusionsabbildungen $\iota_i: X_i \rightarrow \coprod_i X_i$ stetig, wenn

$$\iota_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i \quad \text{für alle } U \in \mathcal{O} \text{ und alle } i \in I$$

gilt, wenn also $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_\sqcup$.

Zu (2) seien (Z, \mathcal{O}_Z) und $F: (\coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ wie im Satz vorgegeben. Wenn F stetig ist, sind alle Abbildungen $F \circ \iota_i$ stetig, da ι_i nach (1) stetig ist.

Seien jetzt alle Abbildungen $F \circ \iota_i$ stetig, und sei $U \subset Z$ offen, dann ist

$$\iota_i^{-1}(F^{-1}(U)) = (F \circ \iota_i)^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i$$

offen in X_i für alle $i \in I$. Nach Definition 1.39 gilt $F^{-1}(U) \in \mathcal{O}_\sqcup$, also ist F stetig.

Zur Eindeutigkeit sei \mathcal{O} eine weitere Topologie auf $\coprod_i X_i$ mit der in (2) geforderten Eigenschaft. Für alle topologischen Räume (Z, \mathcal{O}_Z) ist also jede Abbildung $F: \coprod_i X_i \rightarrow Z$ genau dann stetig, wenn $F \circ \iota_i$ für alle $i \in I$ stetig ist. Wir wählen $Z = \coprod_i X_i$ mit verschiedenen Topologien und $F = \text{id}$ und schließen wie folgt. Da

$$\text{id}: \left(\coprod_i X_i, \mathcal{O} \right) \rightarrow \left(\coprod_i X_i, \mathcal{O} \right)$$

stetig ist, sind alle

$$\iota_i = \text{id} \circ \iota_i: (X_i, \mathcal{O}_i) \rightarrow \left(\coprod_i X_i, \mathcal{O} \right)$$

stetig, und nach (1) ist \mathcal{O} gröber als \mathcal{O}_\sqcup . Da nach (1) alle

$$\text{id} \circ \iota_i: (X_i, \mathcal{O}_i) \rightarrow \left(\coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup \right)$$

stetig sind, ist auch

$$\text{id}: \left(\coprod_i X_i, \mathcal{O} \right) \rightarrow \left(\coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup \right)$$

stetig. Also ist \mathcal{O} nach Bemerkung 1.24 feiner als \mathcal{O}_\sqcup . Insgesamt folgt also $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\sqcup$ wie behauptet.

Zu (3) seien $f_i: X_i \rightarrow Z$ stetig. Die einzige Abbildung $f: \prod_i X_i \rightarrow Z$ mit $f \circ \iota_i = f_i$ für alle i wird gegeben durch

$$f(i, x_i) = f_i(x_i),$$

und f ist stetig nach (2). □

Als nächstes wollen wir Unterräume topologischer Räume betrachten.

1.42. DEFINITION. Sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum, und sei $Y \subset X$. Die *Unterraumtopologie* (auch *Relativ-, Spur- oder induzierte Topologie*) \mathcal{O}_Y ist definiert durch

$$\mathcal{O}_Y = \{ Y \cap U \mid U \in \mathcal{O}_X \}.$$

Man überlegt sich, dass \mathcal{O}_Y eine Topologie ist, denn

$$\emptyset = Y \cap \emptyset \in \mathcal{O}_Y, \quad Y = Y \cap X \in \mathcal{O}_Y,$$

$$(Y \cap U_1) \cap \cdots \cap (Y \cap U_k) = Y \cap (U_1 \cap \cdots \cap U_k) \in \mathcal{O}_Y \quad \text{und} \quad \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (Y \cap U) = Y \cap \bigcup U$$

für alle $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{O}_X$ und $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_X$.

Auch die Unterraumtopologie wird durch eine Eigenschaft charakterisiert.

1.43. SATZ. Sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum und sei $Y \subset X$ versehen mit der Unterraumtopologie \mathcal{O}_Y . Dann gilt:

- (1) \mathcal{O}_Y ist die größte Topologie auf Y , für die die Inklusion $\iota: Y \hookrightarrow X$ stetig ist.
- (2) \mathcal{O}_Y ist die einzige Topologie, für die eine Abbildung F von einem beliebigen topologischen Raum (Z, \mathcal{O}_Z) nach Y genau dann stetig ist, wenn die Abbildung $\iota \circ F: Z \rightarrow X$ stetig ist.

BEWEIS. Da $\iota^{-1}(U) = U \cap Y$ gilt, folgt (1) bereits aus der Definition von \mathcal{O}_Y .

Zu (2) sei zunächst (Z, \mathcal{O}_Z) ein beliebiger topologischer Raum, und sei $F: Z \rightarrow Y$ eine Abbildung. Für eine offene Menge $V = U \cap Y \in \mathcal{O}_Y$ gilt

$$F^{-1}(V) = F^{-1}(\iota^{-1}(U)) = (\iota \circ F)^{-1}(U),$$

also ist F genau dann stetig bezüglich \mathcal{O}_Y , wenn $\iota \circ F$ stetig ist bezüglich \mathcal{O}_X .

Um zu zeigen, dass \mathcal{O}_Y die einzige Topologie mit dieser Eigenschaft ist, wählen wir eine beliebige Topologie \mathcal{O} auf Y , die die in (2) geforderte Eigenschaft besitzt. Wir machen weiter wie im Beweis von Satz 1.40. Da $\text{id}: (Y, \mathcal{O}) \rightarrow (Y, \mathcal{O})$ stetig ist, ist auch $\iota = \iota \circ \text{id}: (Y, \mathcal{O}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ stetig, und nach (1) ist \mathcal{O} feiner als \mathcal{O}_Y . Umgekehrt ist $\iota = \iota \circ \text{id}: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ stetig, also ist auch $\text{id}: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (Y, \mathcal{O})$ stetig, und \mathcal{O} ist gröber als \mathcal{O}_Y nach Bemerkung 1.24. Also stimmen \mathcal{O} und \mathcal{O}_Y überein. □

1.44. DEFINITION. Seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume. Eine *Einbettung* von X nach Y ist eine injektive Abbildung $F: X \hookrightarrow Y$, so dass die induzierte Abbildung von (X, \mathcal{O}_X) nach $F(X) \subset Y$ mit der Unterraumtopologie ein Homöomorphismus ist.

Wir betrachten jetzt die Produkttopologie. Dazu bezeichnen wir mit

$$\prod_i X_i = \{ (x_i)_{i \in I} \mid x_i \in X_i \}$$

das kartesische Produkt einer Familie $(X_i)_{i \in I}$ von topologischen Räumen über einer beliebigen Indexmenge I , und mit $\pi_i: X \rightarrow X_i$ die Projektion auf die i -te Komponente.

1.45. DEFINITION. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Das *topologische Produkt* der X_i ist definiert als

$$\prod_i (X_i, \mathcal{O}_i) = \left(\prod_i X_i, \mathcal{O}_\prod \right),$$

wobei \mathcal{O}_\square erzeugt wird von der Subbasis

$$\mathcal{S}_\square = \bigcup_{i \in I} \{ \pi_i^{-1}(U_i) \mid U_i \in \mathcal{O}_i \} .$$

Da wir \mathcal{O}_\square über mit Hilfe einer Subbasis erklärt haben, wissen wir aus Satz 1.38, dass \mathcal{O}_\square eine Topologie ist. Ein endlicher Durchschnitt von Mengen aus \mathcal{S}_\square hat die Gestalt

$$\prod_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(U_i) \quad \text{mit } U_i \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I \text{ und } U_i = X_i \text{ für fast alle } i \in I .$$

Mit anderen Worten: eine Teilmenge $U \subset \prod_i X_i$ ist genau dann offen, wenn jeder Punkt x eine Umgebung der obigen Form hat. Auch hier haben wir wieder eine universelle Eigenschaft.

1.46. SATZ. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume.

- (1) Die Topologie \mathcal{O}_\square ist die grösste Topologie auf $\prod_i X_i$, für die alle Abbildungen $\pi_i: \prod_i X_i \rightarrow X_i$ stetig sind.
- (2) Die Topologie \mathcal{O}_\square ist die einzige Topologie \mathcal{O} auf dem kartesischen Produkt $\prod_i X_i$, so dass eine Abbildung G von einem beliebigen topologischen Raum (Z, \mathcal{O}_Z) in das Produkt $\prod_i X_i$ genau dann stetig ist, wenn die Abbildungen $\pi_i \circ G$ für alle $i \in I$ stetig sind.
- (3) Der Raum $(\prod_i X_i, \mathcal{O}_\square)$ zusammen mit den Abbildungen $(\pi_i: \prod_i X_i \rightarrow X_i)_{i \in I}$ ist ein Produkt in der Kategorie \mathcal{Top} , das heißt, zu jedem topologischen Raum (Z, \mathcal{O}_Z) und jeder Familie stetiger Abbildungen $(G_i: Z \rightarrow X_i)_{i \in I}$ existiert genau eine stetige Abbildung $G: Z \rightarrow Y$, so dass $G_i = \pi_i \circ G$ für alle $i \in I$.

1.47. BEMERKUNG. Die charakterisierende Eigenschaft (2) des Produkts wird durch das linke Diagramm veranschaulicht.

$$\begin{array}{ccc}
 & (\prod_i X_i, \mathcal{O}) & \\
 G \nearrow & \downarrow \pi_i & \\
 (Z, \mathcal{O}_Z) & \xrightarrow{\pi_i \circ G} & (X_i, \mathcal{O}_i)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & (Y, \mathcal{O}_Y) & \\
 G \dashrightarrow & \downarrow \eta_i & \\
 (Z, \mathcal{O}_Z) & \xrightarrow{G_i} & (X_i, \mathcal{O}_i)
 \end{array}
 \tag{1.2}$$

Ein Raum (Y, \mathcal{O}_Y) mit stetigen Abbildungen $\eta_i: Y \rightarrow X_i$ ist genau dann ein Produkt im Sinne von Satz 1.46 (3), wenn für alle (Z, \mathcal{O}_Z) mit stetigen Abbildungen $G_i: Z \rightarrow X_i$ genau eine stetige Abbildung G wie im rechten Diagramm existiert.

Das Produkt ist ebenfalls bis auf eindeutige Isomorphismen eindeutig bestimmt. Da sich die beiden Diagramme in (1.1) und (1.2) jeweils nur in der Richtung der Pfeile unterscheiden, sagt man, die beiden Konstruktionen in den Definitionen 1.39 und 1.45 seien zueinander *dual*. Daher rührt die Wahl der Bezeichnungen und der Symbole „ \prod “ und „ \coprod “.

Man beachte, dass (geeignet formulierte) universelle Eigenschaften wie in Satz 1.40 (3) oder Satz 1.46 (3) zwar die Eindeutigkeit der beschriebenen Objekte (bis auf eindeutige Isomorphismen) garantieren können, aber nicht die Existenz. Man muss also für jede Kategorie (wie \mathcal{Set} , \mathcal{Top} oder \mathcal{Vec}_k) erst beweisen, dass sie Produkte und Koprodukte enthält.

BEWEIS von Satz 1.46. Die Subbasis \mathcal{S}_\square enthält genau die Urbilder der offenen Teilmengen von X_i unter den Abbildungen π_i . Also sind alle π_i bezüglich einer Topologie \mathcal{O} auf $\prod_{i \in I} X_i$ genau dann stetig, wenn $\mathcal{O}_\square \subset \mathcal{O}$, und es folgt Behauptung (1).

Zu (2) sei G stetig. Dann sind auch die Abbildungen $\pi_i \circ G$ stetig nach (1).

Seien umgekehrt alle Abbildungen $\pi_i \circ G$ stetig. Da die Abbildung $G^{-1}: \mathcal{P}(\prod_i X_i) \rightarrow \mathcal{P}Z$ mit Vereinigungen und Durchschnitten vertauscht, folgt Stetigkeit von G bereits, wenn $G^{-1}(U) \in \mathcal{O}_Z$ nur für alle $U \in \mathcal{S}_\square$ gilt. Aber

$$G^{-1}(\pi_i^{-1}(U_i)) = (\pi_i \circ G)^{-1}U_i \in \mathcal{O}_Z$$

wegen Stetigkeit der Abbildungen $\pi_i \circ G$.

Der Beweis der Eindeutigkeit ist völlig analog zu den Beweisen der Sätze 1.40 (2) und 1.43 (2). Behauptung (3) folgt wie in Satz 1.40 (3) aus der entsprechenden Eigenschaft des kartesischen Produkts und (2). \square

1.48. BEMERKUNG. Eine andere natürliche Topologie auf $\prod_i X_i$ ist die *Box-Topologie* \mathcal{O}_\square mit Basis

$$\mathcal{B}_\square = \left\{ \prod_{i \in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Wenn die Indexmenge I unendlich ist und unendlich viele X_i nicht die Klumpentopologie tragen, ist \mathcal{O}_\square echt feiner als \mathcal{O}_\square . Diese Topologie hat leider nicht so schöne Eigenschaften wie \mathcal{O}_\square , obwohl sie auf den ersten Blick einfacher aussieht.

Wir sagen, dass eine topologische Eigenschaft E (wie etwa eine Trennungs- oder Abzählbarkeits-eigenschaft) unter einer Konstruktion (wie etwa dem Produkt, der disjunkten Vereinigung oder der Unterraumkonstruktion) *vererbt* wird, wenn immer dann, wenn alle zugrundeliegenden Topologien die Eigenschaft E haben, auch die neu konstruierte Topologie diese Eigenschaft hat.

- 1.49. SATZ. (1) *Die Trennungseigenschaften (T0) – (T4) und (T3a) und die Abzählbarkeitseigenschaft (A1) werden unter der disjunkten Vereinigung vererbt, die Eigenschaft (A2) wird vererbt, wenn die Indexmenge höchstens abzählbar ist.*
(2) *Es werden (T0) – (T3), (T3a), (A1) und (A2) unter Unterraumbildung vererbt.*
(3) *Es werden (T0) – (T3), (T3a) unter Produkten vererbt. Die Abzählbarkeitseigenschaften (A1) und (A2) werden vererbt, wenn die Indexmenge höchstens abzählbar ist.*

BEWEIS. Zu (1) kann man die in den Trennungsaxiomen (T0) – (T4) gesuchten offenen Mengen U und $V \subset \prod_{i \in I} X_i$ konstruieren, in dem man für alle $i \in I$ offene Teilmengen $\iota_i^{-1}(U)$, $\iota_i^{-1}(V) \subset X_i$ angibt. Analog konstruiert man die in (T3a) gesuchte Funktion, indem man stetige Funktionen auf jedem X_i definiert und diese mit der universellen Eigenschaft aus Satz 1.40 (3) auf $\prod_{i \in I} X_i$ zusammensetzt.

Sei $x = \iota_j(x_j) \in \iota_j(X_j) \subset \prod_{i \in I} X_i$, und sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X_j)$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x_j in X_j , dann ist $\iota_j(\mathcal{U}) \subset \mathcal{P}(\prod_{i \in I} X_i)$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x in der disjunkten Vereinigung, also wird (A1) vererbt. Wenn I abzählbar ist und $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{O}_i$ eine abzählbare Basis von \mathcal{O}_i für alle $i \in I$, dann ist

$$\bigcup_{i \in I} \iota_i(\mathcal{B}_i) \subset \mathcal{O}_\square$$

eine abzählbare Basis der disjunkten Vereinigung.

Zu (2) betrachten wir nur (T3) und (T3a), die anderen Trennungsaxiome lassen sich analog beweisen. Sei also $A \subset Y$ abgeschlossen in der Unterraumtopologie auf $Y \subset X$. Dann lässt sich $Y \setminus A$ zu einer offenen Teilmenge von X fortsetzen, deren Komplement B in X abgeschlossen ist mit $A = Y \cap B$. Sei $y \in Y \setminus A \subset X \setminus B$. Wir nehmen an, dass (T3) in X gilt und finden disjunkte offene Mengen $U, V \subset X$ mit $y \in U$, $B \subset V$. Dann sind $Y \cap U$ und $Y \cap V$ in Y offen und disjunkt und trennen y und A . Zu (T3a) betrachte A, B und y wie oben. Wenn es eine Funktion $f: X \rightarrow [0, 1]$ mit $B \subset f^{-1}(0)$ und $f(y) = 1$ gibt, dann ist $f|_Y$ stetig nach Satz 1.43 (2) und trennt y und A in Y .

Sei \mathcal{U}_x abzählbare Umgebungsbasis von $x \in Y \subset X$ in X , dann ist

$$\{Y \cap U \mid U \in \mathcal{U}_x\} \subset \mathcal{P}(Y)$$

eine abzählbare Umgebungsbasis von x in Y . Genauso überträgt sich (A2) von X auf den Unterraum Y .

Zu (3) betrachten wir wieder nur (T3) und (T3a), die anderen Trennungsaxiome funktionieren analog. Ein Raum (Y, \mathcal{O}_y) erfüllt (T3) genau dann, wenn es zu jeder Umgebung U von $y \in Y$ eine

abgeschlossene Umgebung A mit $y \in A \subset U$ gibt. Denn wenn (T3) gilt und U Umgebung von y ist, dann ist auch das Innere \mathring{U} Umgebung von y . Wir trennen $B = Y \setminus \mathring{U}$ von y durch disjunkte offene Mengen $V, W \subset X$. Dann ist $Y \setminus V$ abgeschlossene Umgebung, da $y \in W \subset Y \setminus V$, und es gilt $Y \setminus V \subset \mathring{U} = Y \setminus B \subset U$. Die Umkehrung gilt analog.

Sei also $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ und sei U Umgebung von x . Nach Definition 1.45 und der Konstruktion im Beweis von Satz 1.38 (2) existieren $U_{i_1} \in \mathcal{O}_{i_1}, \dots, U_{i_k} \in \mathcal{O}_{i_k}$ mit

$$x \in \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \subset U \quad (*)$$

Nach unserer obigen Überlegung existieren abgeschlossene Umgebungen $A_{i_j} \subset U_{i_j}$ von x_{i_j} , und

$$\pi_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(A_{i_k}) \subset U$$

ist eine abgeschlossene Umgebung von x in $\prod_{i \in I} X_i$. Also gilt (T3).

Zu (T3a) sei $x \in \prod_{i \in I} X_i$ wie oben und $B \subset \prod_{i \in I} X_i$ abgeschlossen. Setze $U = \prod_{i \in I} X_i \setminus B$. Dann existieren U_{i_1}, \dots, U_{i_k} wie in (*). Also gibt es Funktionen

$$f_{i_j}: X_{i_j} \rightarrow [0, 1] \quad \text{mit} \quad f_{i_j}|_{X_{i_j} \setminus U_{i_j}} = 0 \quad \text{und} \quad f_{i_j}(x_{i_j}) = 1.$$

Dann sind die $f_{i_j} \circ \pi_{i_j}$ nach Satz 1.46 (2) stetig, und

$$f = \min(f_{i_1} \circ \pi_{i_1}, \dots, f_{i_k} \circ \pi_{i_k}): \prod_{i \in I} X_i \rightarrow [0, 1]$$

ist als Minimum endlich vieler stetiger Funktionen wieder stetig mit $f(x) = 1$ und

$$B \subset X \setminus (\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k})) \subset f^{-1}(0).$$

Sei schließlich I höchstens abzählbar und \mathcal{B}_i eine abzählbare Basis von \mathcal{O}_i . Dann erhalten wir eine abzählbare Subbasis

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1} \mathcal{B}_i$$

von \mathcal{O}_\square , denn jedes Element $\pi_i^{-1}(U)$ von \mathcal{S}_\square lässt sich als Vereinigung von Elementen aus \mathcal{S} schreiben. Dann ist aber auch die Basis

$$\mathcal{B} = \{U_1 \cap \dots \cap U_k \mid k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } U_1, \dots, U_k \in \mathcal{S}\}$$

von \mathcal{O}_\square abzählbar. Also wird (A2) und analog auch (A1) unter abzählbaren Produkten vererbt. \square

Normalität wird unter Produkten und Unterräumen nicht vererbt, also auch nicht (T4). Die Gegenbeispiele können keine metrischen Räume sein, da sich Metriken auf Unterräume und endliche Produkte übertragen lassen (Übungen 1.110, 1.111), womit diese nach Satz 1.26 wieder normal sind. Dann dürfen unsere Räume auch (A2) nicht erfüllen, da sie sonst nach Bemerkung 1.37 metrisierbar wären. Wir besprechen diese Gegenbeispiele daher nicht hier, sondern verweisen auf [Q].

1.f. Kompaktheit

Wir erinnern uns, dass abgeschlossene Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ viele schöne Eigenschaften haben: stetige Funktionen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ besitzen auf I ein Maximum und ein Minimum, und jede Folge $(x_i)_i$ in I hat mindestens einen Häufungspunkt. Der Grund dafür ist der Satz von Heine-Borel, nach dem abgeschlossene Intervalle kompakt sind.

Wir lernen drei mögliche Definitionen von Kompaktheit kennen. Eine *offene Überdeckung* eines topologischen Raumes (X, \mathcal{O}) ist eine Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ mit $\bigcup \mathcal{U} = X$. Ein Punkt $x \in X$ ist *Häufungspunkt* einer Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ in jeder Umgebung von x ein x_i liegt mit $i \geq n$. Insbesondere sind Grenzwerte von Teilfolgen immer Häufungspunkte.

1.50. DEFINITION. Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Dann heißt X

- (1) *quasikompakt*, wenn es zu jeder offenen Überdeckung \mathcal{U} eine endliche Teilüberdeckung gibt, das heißt, eine Menge $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ mit $\bigcup \mathcal{U}_0 = X$,
- (2) *kompakt*, wenn er Hausdorffsch und quasikompakt ist,
- (3) *abzählbar kompakt*, wenn X Hausdorffsch ist und es zu jeder abzählbaren offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine endliche Teilüberdeckung gibt, das heißt, $X = \bigcup_{i=0}^N U_i$ für ein $N \in \mathbb{N}$, und
- (4) *folgenkompakt*, wenn X Hausdorffsch ist und jede Folge $x_i \in X$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

In der Literatur wird teilweise die Hausdorff-Eigenschaft in (2)–(4) nicht verlangt. Wir halten uns hier an **[Q]**.

1.51. BEMERKUNG. Es folgen einige wohlbekannte Eigenschaften kompakter Mengen.

- (1) Abgeschlossene Unterräume eines (abzählbar / folgen-) kompakten Raumes sind wieder (abzählbar / folgen-) kompakt. Denn sei etwa X kompakt, $A \subset X$ abgeschlossen und \mathcal{V} eine offene Überdeckung von A , dann existiert $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_X$ mit

$$\mathcal{V} = \{ U \cap A \mid U \in \mathcal{U} \}.$$

Dann ist aber $\mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$ offene Überdeckung von X , und eine endliche Teilüberdeckung \mathcal{U}' liefert uns auch eine endliche Teilüberdeckung von A , nämlich

$$\{ U \cap A \mid U \in \mathcal{U}' \}.$$

- (2) Es sei (X, \mathcal{O}_X) (abzählbar / folgen-) kompakt, (Y, \mathcal{O}_Y) ein Hausdorff-Raum und $F: X \rightarrow Y$ stetig, dann ist das Bild $F \subset Y$, versehen mit der Unterraumtopologie, wieder (abzählbar / folgen-) kompakt (Übung 1.115).
- (3) Sei (X, \mathcal{O}) (abzählbar / folgen-) kompakt, und sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist f beschränkt und nimmt sein Maximum an. Dazu kombinieren wir (2) mit den Sätzen 1.53 und 1.54 unten.
- (4) Jeder kompakte Raum ist normal (Übung 1.116).
- (5) Sei (X, \mathcal{O}_X) ein Hausdorff-Raum, und sei $Y \subset (X, \mathcal{O}_X)$ kompakt in der Unterraumtopologie, dann ist $Y \subset X$ abgeschlossen.

1.52. SATZ. *Sei (X, \mathcal{O}) ein Hausdorff-Raum.*

- (1) *Wenn X kompakt oder folgenkompakt ist, ist X auch abzählbar kompakt.*
- (2) *Es ist X genau dann abzählbar kompakt, wenn jede Folge in X einen Häufungspunkt besitzt.*
- (3) *Wenn X abzählbar kompakt ist und (A1) erfüllt, ist X folgenkompakt.*
- (4) *Wenn X abzählbar kompakt ist und (A2) erfüllt, dann ist X kompakt.*

Die Punkte (2) und (3) zeigen wieder einmal, dass man mit Folgen vorsichtig umgehen muss, wenn das erste Abzählbarkeitsaxiom verletzt ist. Wir fassen den obigen Satz in einem Diagramm zusammen.

$$\text{kompakt} \begin{array}{c} \xleftarrow{(A2)} \\ \xrightarrow{\hspace{1cm}} \end{array} \text{abzählbar kompakt} \begin{array}{c} \xrightarrow{(A1)} \\ \xleftarrow{\hspace{1cm}} \end{array} \text{folgenkompakt}$$

Wir betrachten im Folgenden vor allem kompakte Räume. In der Analysis ist hingegen der Begriff der Folgenkompaktheit wichtiger.

BEWEIS VON SATZ 1.52. In (1) ist nur zu zeigen, dass jeder folgenkompakte Raum auch abzählbar kompakt ist, die andere Aussage ist klar. Sei also $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare offene Überdeckung. Wir nehmen an, dass es keine endliche Teilüberdeckung gibt. Wir dürfen außerdem annehmen, dass

$$U_i \not\subset \bigcup_{j=0}^{i-1} U_j$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, andernfalls lassen wir U_i weg und gehen zu einer kleineren Teilüberdeckung über. Wir wählen also eine Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_i \in U_i \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} U_j.$$

Sei $x \in X$ ein Häufungspunkt (z.B. der Grenzwert einer konvergenten Teilfolge), dann gilt $x \in U_{i_0}$ für ein $i_0 \in \mathbb{N}$, also liegen unendlich viele Folgenglieder in U_{i_0} , im Widerspruch zur Konstruktion.

Zu (2) zeigen wir, dass jede Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in einem abzählbar kompakten Raum X einen Häufungspunkt besitzt, die Rückrichtung folgt wie in (1). Sei $A_n = \overline{\{x_i \mid i \geq n\}} \neq \emptyset$, dann ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ die Menge aller Häufungspunkte. Wenn wir annehmen, dass $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt besitzt, sei $U_n = X \setminus A_n$, dann ist $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare offene Überdeckung von X mit $U_m \subset U_n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$. Es folgt, dass $X = \bigcup_{i=1}^n U_i = U_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zu $A_n \neq \emptyset$.

Zu (3) wähle nach (2) einen Häufungspunkt x der Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Wenn (A1) erfüllt ist, existiert eine abzählbare Umgebungsbasis $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von x , und wie im Beweis von Satz 1.36 dürfen wir annehmen, dass $V_j \subset V_i$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i < j$. Um eine Teilfolge mit Grenzwert x zu konstruieren, setzen wir $i_0 = 1$ und wählen induktiv $i_j > i_{j-1}$ für $j \geq 1$ so, dass $x_{i_j} \in V_j$. Aus $V_j \subset V_i$ für alle $i < j$ folgt $x_{i_k} \in V_j$ für alle $k \geq j$, also konvergiert $(x_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$ gegen x .

Für (4) nehmen wir an, dass $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ eine beliebige offene Überdeckung ist, und dass $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis von \mathcal{O} ist. Wenn wir eine abzählbare Teilüberdeckung von \mathcal{U} konstruieren können, folgt die Existenz einer endlichen Teilüberdeckung aus der Annahme, dass X abzählbar kompakt ist. Wir wählen jetzt zu jedem $i \in \mathbb{N}$ eine Menge $U_i \in \mathcal{U} \cup \{\emptyset\}$, so dass $V_i \subset U_i$, falls eine Menge $U \in \mathcal{U}$ mit $V_i \subset U$ existiert, und $U_i = \emptyset$ sonst. Da \mathcal{U} eine Überdeckung von X war, muss dann auch $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Überdeckung sein, denn jeder Punkt $x \in X$ ist in einem $U \in \mathcal{U}$ enthalten, und es existiert also ein i mit $x \in V_i \subset U$. Elimination aller Indizes i mit $U_i = \emptyset$ liefert eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung von X , nach Voraussetzung existiert also auch eine endliche Teilüberdeckung. \square

Es folgen einige weitere Sätze aus Analysis II, die wir nicht noch einmal beweisen wollen.

1.53. SATZ. *Für einen metrischen Raum sind die Begriffe kompakt, abzählbar kompakt und folgenkompakt äquivalent.*

1.54. SATZ (Heine-Borel). *Eine Teilmenge des \mathbb{R}^n ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

1.55. SATZ (Lebesgue). *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von K . Dann existiert $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in K$ ein $U \in \mathcal{U}$ mit $B_\varepsilon(x) \cap K \subset U$ existiert.*

Den folgenden Satz wollen wir ebenfalls nicht beweisen.

1.56. SATZ (Tychonoff). *Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume, dann ist der Produktraum $\prod_{i \in I} (X_i, \mathcal{O}_i)$ genau dann kompakt, wenn alle Räume (X_i, \mathcal{O}_i) kompakt sind.*

Man beachte, dass die Box-Topologie aus Bemerkung 1.48 diese Eigenschaft offensichtlich nicht besitzt.

Schließlich führen wir noch den Begriff der lokalen Kompaktheit ein.

1.57. DEFINITION. Ein topologischer Raum heißt *lokalkompakt*, wenn er Hausdorffsch ist und jeder Punkt in X eine kompakte Umgebung besitzt.

1.58. BEISPIEL. Die Räume \mathbb{R} und \mathbb{R}^n sind lokalkompakt, \mathbb{Q} und \mathbb{Q}^n jedoch nicht.

Wir benutzen Kompaktheit, um eine interessante und wichtige Topologie auf der Menge $C(X, Y)$ aller stetigen Abbildungen von X nach Y einzuführen.

1.59. DEFINITION. Seien (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume, dann ist die *kompakt-offene Topologie* \mathcal{O}_{ko} auf $C(X, Y)$ definiert als die Topologie zur Subbasis

$$\mathcal{S}_{\text{ko}} = \{S_{K,U} \mid K \subset X \text{ kompakt und } U \subset Y \text{ offen}\}$$

mit $S_{K,U} = \{F \in C(X, Y) \mid K \subset F^{-1}(U)\}$.

Wenn der Definitionsbereich lokalkompakt ist, gibt es genug kompakte Mengen, um eine interessante Topologie zu erhalten. Seien X, Y, Z Mengen, dann gibt es eine Bijektion

$$\text{Abb}(X \times Y, Z) \cong \text{Abb}(X, \text{Abb}(Y, Z)), \quad F \mapsto f = (x \mapsto F(x, \cdot) \in \text{Abb}(Y, Z)).$$

Die Abbildungen f und F heißen zueinander *adjungiert*.

1.60. SATZ (Exponentialgesetz). *Es seien (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) und (Z, \mathcal{O}_Z) topologische Räume, $f: X \rightarrow C(Y, Z)$ eine beliebige Abbildung, und $F: X \times Y \rightarrow Z$ dazu adjungiert.*

- (1) *Wenn F stetig ist, ist $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (C(Y, Z), \mathcal{O}_{\text{ko}})$ ebenfalls stetig, wir erhalten also eine injektive Abbildung*

$$\alpha: C(X \times Y, Z) \rightarrow C(X, C(Y, Z)).$$

- (2) *Die Abbildung α ist stetig.*
(3) *Sei (Y, \mathcal{O}_Y) lokalkompakt. Dann ist α eine Bijektion.*
(4) *Es sei (X, \mathcal{O}_X) Hausdorff und (Y, \mathcal{O}_Y) lokalkompakt. Dann ist α ein Homöomorphismus.*
(5) *Sei (X, \mathcal{O}_X) lokalkompakt. Die kompakt-offene Topologie ist auf $C(X, Y)$ die grösste Topologie, für die die Auswertungsabbildung*

$$\text{ev}: X \times C(X, Y) \rightarrow Y \quad \text{mit} \quad \text{ev}(x, g) = g(x)$$

stetig ist.

Wenn wir Y^X anstelle von $(C(X, Y), \mathcal{O}_{\text{ko}})$ schreiben, ließt sich (4) als $Z^{X \times Y} \cong (Z^Y)^X$, daher der Name „Exponentialgesetz“. Die Eigenschaft (5) ist eine Möglichkeit, die kompakt-offene Topologie zu charakterisieren.

Die zahlreichen verschiedenen Bedingungen in (1)–(5) sind hässlich. Geht man aber zur Unterkategorie der kompakt erzeugten schwachen Hausdorff-Räume über, so existiert eine Topologie auf $C(X, Y)$, für die (1)–(5) ohne weitere Voraussetzungen gelten. Wir lernen später weitere Motivation für diese Unterkategorie kennen.

BEWEIS. Zu (1) sei $F: X \times Y \rightarrow Z$ stetig. Zu zeigen ist, dass

$$f^{-1}(S_{K,U}) = \{x \in X \mid F(x, y) \in U \text{ für alle } y \in K\}$$

für alle kompakten $K \subset Y$ und alle offenen $U \subset Z$ in X offen ist. Sei dazu $x \in f^{-1}(S_{K,U})$. Da $F^{-1}(U) \subset X \times Y$ in der Produkttopologie offen ist und $(x, y) \in F^{-1}(U)$ für alle $y \in K$, existieren $V_y \subset X$ und $W_y \subset Y$ offen mit

$$(x, y) \in V_y \times W_y \subset F^{-1}(U).$$

Die offenen Mengen $(W_y)_{y \in K}$ überdecken K , also gibt es endlich viele $y_1, \dots, y_k \in K$, so dass

$$K \subset W_{y_1} \cup \dots \cup W_{y_k}.$$

Dann ist

$$V = V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_k} \subset X$$

offen mit $x \in V$, und es gilt

$$V \times K \subset \bigcup_{i=1}^k V \times W_{y_i} \subset \bigcup_{i=1}^k V_{y_i} \times W_{y_i} \subset F^{-1}(U),$$

also $V \subset f^{-1}(S_{K,U})$. Somit ist $f^{-1}(S_{K,U}) \subset X$ offen, und f ist stetig.

Zu (2) reicht es, für Subbasismengen $S_{K,W}$ (also $K \subset X$ kompakt, $W \subset C(Y, Z)$ offen) zu zeigen, dass $\alpha^{-1}(S_{K,W})$, denn α^{-1} ist mit endlichen Durchschnitten verträglich. Aus dem gleichen Grund reicht es, für W Subbasismengen einzusetzen, denn für $L \subset Y$ kompakt und $U, V \subset Z$ offen gilt

$$S_{L,U \cap V} = \{ f: Y \rightarrow Z \mid f(L) \subset U \text{ und } f(L) \subset V \} = S_{L,U} \cap S_{L,V}.$$

Die Stetigkeit von α folgt, denn für alle $K \subset X$ und $L \subset Y$ kompakt und $U \subset Z$ offen ist auch die folgende Menge offen:

$$\alpha^{-1}(S_{K,S_{L,U}}) = S_{K \times L, U} \subset C(X \times Y, Z).$$

Zu (3) sei jetzt $f: X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$ stetig. Es sei $U \subset Z$ offen und $(x, y) \in F^{-1}(U)$. Nach Voraussetzung ist $f(x): Y \rightarrow Z$ stetig, also ist

$$(f(x))^{-1}(U) = \{ y \in Y \mid F(x, y) \in U \} \subset Y$$

offen. Da Y lokalkompakt ist, hat y eine kompakte Umgebung K , und K ist normal nach Bemerkung 1.51 (4), erfüllt also insbesondere (T3). Wie im Beweis von Satz 1.49 (3) besitzt y eine abgeschlossene Umgebung $A \subset K \cap (f(x))^{-1}(U)$. Nach Bemerkung 1.51 (1) ist A dann auch kompakt. Da f stetig ist, ist

$$V = f^{-1}(S_{A,U})$$

eine offene Umgebung von x in X . Daraus folgt aber, dass $V \times A \subset F^{-1}(U)$ eine Umgebung von (x, y) in $X \times Y$ ist. Also ist $F^{-1}(U)$ offen und F daher stetig.

Zu (4) zeigen wir, dass Mengen der Form $S_{K \times L, U}$ eine Subbasis von $C(X \times Y, Z)$ bilden. Dann folgt die Offenheit von α mit dem gleichen Argument wie in (2). Sei dazu $M \subset X \times Y$ kompakt und $U \subset Z$ offen, und sei $F \in S_{M,U}$. Es reicht, endlich viele Kompakta $K_i \subset X$ und $L_i \subset Y$, $i = 1, \dots, n$ zu konstruieren, so dass

$$F \in \bigcap S_{K_i \times L_i, U} \subset S_{M,U}.$$

Da X und Y Hausdorff sind, sind die Bilder $M_X \subset X$, $M_Y \subset Y$ der Projektionen von $M \subset X \times Y$ nach Bemerkung 1.51 (2) wieder kompakt. Daher finden wir zu jedem Punkt $(x, y) \in M$ kompakte Umgebungen K_x, L_y , so dass $K_x \times L_y \subset F^{-1}(U)$, also $F \in S_{K_x \times L_y, U}$ gilt. Wegen Kompaktheit von M reichen endlich viele der Produkte $K_x \times L_y$ aus, um M zu überdecken. Daraus ergibt sich die obige Behauptung.

Zu (5) betrachte die Identität

$$\text{id}: (C(X, Y), \mathcal{O}) \longrightarrow (C(X, Y), \mathcal{O}_{\text{ko}}).$$

Sie induziert gerade die Abbildung

$$\text{ev}: (C(X, Y), \mathcal{O}) \times (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y).$$

Also ist ev nach (1), (3) und Bemerkung 1.24 genau dann stetig, wenn \mathcal{O} feiner als \mathcal{O}_{ko} ist. \square

1.61. BEMERKUNG. Es sei jetzt (Y, d) ein metrischer Raum.

- (1) Eine Folge $(f_i)_i$ in $C(X, Y)$ konvergiert genau dann in der kompakt-offenen Topologie gegen $f \in C(X, Y)$, wenn $(f_i)_i$ *gleichmäßig auf Kompakta* gegen f konvergiert (oder kurz: *kompakt konvergiert*), das heißt, wenn es zu jedem Kompaktum $K \subset X$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$d(f_i(x), f(x)) < \varepsilon$$

für alle $x \in K$ und alle $i \geq n$ (Übung 1.117).

- (2) Sei X lokalkompakt, dann ist Konvergenz in der kompakt-offenen Topologie wegen (1) äquivalent zur lokal gleichmäßigen Konvergenz, das heißt, jeder Punkt $x \in X$ hat eine Umgebung, auf der die Folge gleichmäßig konvergiert.
- (3) Wenn X sogar kompakt ist, ist Konvergenz in der kompakt-offenen Topologie äquivalent zur gleichmäßigen Konvergenz.

Um gleichmäßige Konvergenz topologisch zu definieren, wenn X nicht kompakt ist, brauchen wir eine stärkere Struktur als nur eine Topologie auf dem Raum Y .

1.g. Zusammenhang

Wir definieren den Begriff des zusammenhängenden Raumes. Für viele Anwendungen benötigen wir den etwas stärkeren Begriff des Wegzusammenhangs.

1.62. DEFINITION. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}_X) heißt

- (1) *zusammenhängend*, wenn es keine zwei nichtleeren offenen Mengen $U, V \in \mathcal{O}$ gibt mit $U \cup V = X$ und $U \cap V = \emptyset$, und
- (2) *wegzusammenhängend*, wenn zu je zwei $x, y \in X$ ein Weg γ von x nach y , das heißt, eine stetige Abbildung $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$, existiert.

Bedingung (1) kann man äquivalent mit abgeschlossenen Mengen formulieren.

- 1.63. BEMERKUNG. (1) Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}_X) ist genau dann zusammenhängend, wenn \emptyset und X die einzigen Mengen sind, die zugleich offen und abgeschlossen sind.
- (2) Es trage $Y = \{0, 1\}$ die diskrete Topologie. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}_X) ist genau dann zusammenhängend, wenn es keine stetige surjektive Abbildung $F: X \rightarrow Y$ gibt.

1.64. BEISPIEL. Jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend. Sei etwa $I = U \dot{\cup} V$ mit $U, V \subset (a, b)$ nichtleer, offen und abgeschlossen. Wir fixieren $u \in U$ und $v \in V$, o.B.d.A. sei $u < v$. Setze $x = \inf(V \cap [u, v])$, dann enthält jede Umgebung von x sowohl Punkte von V als auch von U . Es folgt

$$x \in \overline{V} \cap \overline{U} = V \cap U,$$

da sowohl U als auch V abgeschlossen sind, im Widerspruch zu $U \cap V = \emptyset$.

- 1.65. SATZ. (1) *Das Bild eines (weg-) zusammenhängenden Raumes unter einer stetigen Abbildung ist wieder (weg-) zusammenhängend.*
- (2) *Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.*

BEWEIS. Sei $F: X \rightarrow Y$ stetig. Wenn im $F \subset Y$ nicht zusammenhängend ist, dann gibt es nichtleere, offene Teilmengen $U, V \subset \text{im } F$ mit $\text{im } F = U \dot{\cup} V$. Dann sind auch $F^{-1}(U)$ und $F^{-1}(V)$ nicht leer, offen mit $X = F^{-1}(U) \dot{\cup} F^{-1}(V)$. Also ist auch X nicht zusammenhängend.

Sei X wegzusammenhängend und $F(x), F(y)$ zwei beliebige Punkte in $\text{im } F$. Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg von x nach y , dann ist $F \circ \gamma$ ein Weg von $F(x)$ nach $F(y)$ in $\text{im } F$. Also ist auch im F wegzusammenhängend, und es folgt (1).

Zu (2) nehmen wir an, dass es nichtleere, offene und abgeschlossene Teilmengen $U, V \subset X$ mit $X = U \dot{\cup} V$ gibt. Wähle $x \in U$ und $y \in V$. Dann kann es keinen Weg γ von x nach y geben, denn ansonsten wäre

$$[0, 1] = \gamma^{-1}(U) \dot{\cup} \gamma^{-1}(V)$$

mit $\gamma^{-1}(U), \gamma^{-1}(V)$ nichtleer, offen im Widerspruch zu Beispiel 1.64. □

1.66. DEFINITION. Sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum, und sei $x \in X$.

- (1) Die Vereinigung aller zusammenhängenden Unterräume von X , die x enthalten, heißt die *Zusammenhangskomponente* $K(x)$ von x .
- (2) Die Menge aller Punkte y , die sich mit x durch einen stetigen Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ verbinden lassen, heißt die *Wegzusammenhangskomponente* von x .
- (3) Der Raum X heißt *total unzusammenhängend*, wenn $\{x\}$ die Zusammenhangskomponente von x ist für alle $x \in X$.

- 1.67. BEMERKUNG. (1) Zusammenhangskomponenten sind immer abgeschlossen, Wegzusammenhangskomponenten jedoch nicht notwendigerweise, siehe Übung 1.118.
- (2) Seien $x, y \in X$, dann gilt entweder $K(x) = K(y)$ oder $K(x) \cap K(y) = \emptyset$, analoges gilt für Wegzusammenhangskomponenten.
 - (3) Aus Beispiel 1.64 folgt, dass die Wegzusammenhangskomponente eines Punktes x in $K(x)$ enthalten ist.
 - (4) Für alle $x \in X$ gilt

$$K(x) \subset \bigcap \{ V \subset X \mid x \in V, V \text{ ist offen und abgeschlossen} \} .$$

Gleichheit muss nicht gelten.

1.68. DEFINITION. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}_X) heißt *lokal (weg-) zusammenhängend*, wenn zu jedem Punkt x und jeder Umgebung U von x eine (weg-) zusammenhängende Umgebung $V \subset U$ von x existiert.

1.69. BEMERKUNG. Es gibt lokal zusammenhängende, nicht zusammenhängende topologische Räume, und auch zusammenhängende, nicht lokal zusammenhängende topologische Räume. Wir werden später in der Regel mit lokal wegzusammenhängenden Räumen arbeiten.

1.h. Quotienten und Verklebung

In Absatz 1.e hatten wir bereits einige Konstruktionen topologischer Räume vorgestellt. Jetzt wollen wir beliebige Vereinigungen und Quotienten topologischer Räume betrachten, und auch mehrere Räume zu einem neuen verkleben.

- 1.70. BEMERKUNG. Es sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume und X eine Menge.
- (1) Gegeben Abbildungen $f_i: X \rightarrow X_i$ für alle $i \in I$, existiert stets eine eindeutige grösste Topologie \mathcal{O} auf X , für die alle f_i stetig sind. Diese Topologie \mathcal{O} heißt die von den f_i *induzierte Topologie* oder auch *Initialtopologie*. Beispiele sind die Unterraumtopologie (Satz 1.43 (1)), die Produkttopologie (Satz 1.46 (1)) sowie die Klumpentopologie, falls $I = \emptyset$.
 - (2) Seien umgekehrt Abbildungen $f_i: X_i \rightarrow X$ für alle $i \in I$ gegeben, dann existiert stets eine eindeutige feinste Topologie \mathcal{O} auf X , für die alle f_i stetig sind. Diese Topologie heißt die von den f_i *koinduzierte Topologie* oder *Finaltopologie*. Beispiele sind die Summentopologie (Satz 1.40 (1)), sowie die diskrete Topologie, falls $I = \emptyset$.

Die Existenz und Eindeutigkeit ist in jedem Fall zu zeigen, die Argumente sind immer ähnlich denen in den Beweisen der Sätze 1.40, 1.43 und 1.46. Die Begriffe „Initialtopologie“ und „Finaltopologie“ stammen daher, dass man eine Topologie am „Beginn“ beziehungsweise „Ende“ der betrachteten „Pfeile“, also der Abbildungen f_i , definiert.

Im Folgenden betrachten wir einige Finaltopologien. Die Quotiententopologie ist dual zur Unterraumtopologie. Anstelle einer injektiven Abbildung $\iota: Y \hookrightarrow X$ in einen gegebenen topologischen Raum betrachten wir also eine surjektive Abbildung $\pi: X \twoheadrightarrow Y$ von einem gegebenen Raum (X, \mathcal{O}_X) auf eine Menge Y . Dabei können wir Y als Quotienten $Y = X / \sim$ nach einer Äquivalenzrelation \sim auffassen, wobei

$$x \sim y \quad \iff \quad \pi(x) = \pi(y) .$$

1.71. DEFINITION. Es sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum und $\pi: X \rightarrow Y$ eine surjektive Abbildung. Dann definieren wir die *Quotiententopologie* oder *Identifizierungstopologie* auf Y durch

$$\mathcal{O}_Y = \{U \subset Y \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X\}.$$

Ähnlich wie bei der Summentopologie überlegt man sich, dass \mathcal{O}_Y tatsächlich eine Topologie ist. Die Quotiententopologie wird durch die folgende Eigenschaft charakterisiert.

1.72. SATZ. *Es sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum und $\pi: X \rightarrow Y$ eine surjektive Abbildung.*

- (1) *Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie auf Y , für die $\pi: X \rightarrow Y$ stetig ist.*
- (2) *Die Quotiententopologie ist die einzige Topologie auf Y , für die eine Abbildung f von Y in einen beliebigen topologischen Raum (Z, \mathcal{O}_Z) genau dann stetig ist, wenn $f \circ \pi: X \rightarrow Z$ stetig ist.*

1.73. BEMERKUNG. Um zu sehen, dass Unterraumtopologie und Quotiententopologie zueinander dual sind, vergleichen wir die zugehörigen Diagramme.

$$\begin{array}{ccc} & (X, \mathcal{O}_X) & \\ \iota \circ F \nearrow & \uparrow \iota & \\ (Z, \mathcal{O}_Z) & \xrightarrow{F} & (Y, \mathcal{O}_Y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (X, \mathcal{O}_X) & & \\ \pi \downarrow & \searrow f \circ \pi & \\ (Y, \mathcal{O}_Y) & \xrightarrow{f} & (Z, \mathcal{O}_Z) \end{array}$$

Das linke Diagramm beschreibt die Situation aus Satz 1.43 (2), das rechte die aus Satz 1.72 (2).

BEWEIS von Satz 1.72. Damit $\pi: X \rightarrow Y$ stetig ist, dürfen höchstens Teilmengen $U \subset Y$ mit $\pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ offen sein, also gilt (1).

Zu (2) kopieren wir den Beweis von Satz 1.43 (2) und drehen alle Pfeile um. □

1.74. BEMERKUNG. Sei $p: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow Y$ surjektiv, und \mathcal{O}_Y sei die Quotiententopologie. Wir untersuchen, welche topologischen Eigenschaften sich von X auf Y vererben.

- (1) Wenn X quasikompakt ist, dann ist auch Y quasikompakt, da $Y = p(X)$. Wenn X kompakt und Y Hausdorffsch ist, dann ist Y auch kompakt, vgl. Übung 1.115.
- (2) Wenn X (weg-) zusammenhängend ist, dann ist auch Y (weg-) zusammenhängend. Dies folgt wiederum aus der Stetigkeit von p und Satz 1.65 (1).
- (3) Trennungseigenschaften vererben sich im allgemeinen nicht von X auf Y , wie die Übungen 1.124 und 1.126 zeigen. Insbesondere vererbt sich auch Kompaktheit nicht automatisch.
- (4) Auch Abzählbarkeitseigenschaften vererben sich nicht immer, siehe Bemerkung 1.83 unten.

Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen an die Äquivalenzrelation \sim beziehungsweise die Abbildung $\pi: X \rightarrow X/\sim$ lassen sich einzelne Trennungssaxiome von X auf den Quotienten übertragen. Diese Sätze helfen uns aber bei den Spezialfällen, die wir als nächstes betrachten wollen, nicht weiter, daher lassen wir sie hier weg.

Als nächstes wollen wir die Summen- und die Quotiententopologie benutzen, um zwei weitere universelle Konstruktionen zu erklären. Wir benötigen beide später bei der Konstruktion von CW-Komplexen.

Seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume, sei $V \subset Y$ eine Teilmenge, und seien $f: V \rightarrow X$ eine zunächst beliebige Abbildung. Wir betrachten die Menge

$$X \cup_f Y = (X \dot{\cup} Y) / \sim,$$

wobei \sim die von $y \sim f(y)$ für alle $y \in V$ erzeugte Äquivalenzrelation ist. Hierbei *erzeugt* jede Teilmenge $S \subset M \times M$ eine Äquivalenzrelation R auf M , so dass aRb genau dann gilt, wenn es

eine Kette $a = a_0, a_1, \dots, a_k = b$ von Elementen von M mit $(a_{i-1}, a_i) \in S$ oder $(a_i, a_{i-1}) \in S$ für alle $i = 1, \dots, k$ gibt. Die Punkte in V werden in unserem Fall entlang der Abbildung f an X „angeklebt“. Die Quotiententopologie auf $X \cup_f Y$ heißt hier auch „Verklebungstopologie“. Man beachte: die kanonische Abbildung $i: X \hookrightarrow X \cup_f Y$ ist injektiv, die Abbildung $j: Y \rightarrow X \cup_f Y$ im allgemeinen jedoch nicht.

Ein wichtiger Spezialfall besteht darin, dass f stetig ist. In diesem Fall erfüllt $W = X \cup_f Y$ die universelle Eigenschaft eines *Pushouts*.

1.75. FOLGERUNG. Seien $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, $V \subset Y$ und $f: V \rightarrow X$ stetig. Der Raum $X \cup_f Y$ trage die Identifizierungstopologie zur Abbildung $\pi: X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$. Sei (Z, \mathcal{O}_Z) ein weiterer topologischer Raum und $g: X \rightarrow Z$ und $h: Y \rightarrow Z$ stetig.

- (1) Es existiert genau dann eine Abbildung $k: X \cup_f Y \rightarrow Z$ mit $g = k \circ i$ und $h = k \circ j$, wenn $g \circ f = h|_V: V \rightarrow Z$, und k ist in diesem Fall eindeutig.
- (2) In diesem Fall ist k stetig.

$$\begin{array}{ccc}
 & & (Z, \mathcal{O}_Z) \\
 & \xrightarrow{h} & \\
 (Y, \mathcal{O}_Y) & \xrightarrow{j} & (W, \mathcal{O}_W) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 (V, \mathcal{O}_V) & \xrightarrow{f} & (X, \mathcal{O}_X)
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{---} k \text{---} \\
 \text{---} g \text{---}
 \end{array}
 \tag{1.3}$$

BEWEIS. Zu (1) existiert stets genau eine Abbildung

$$\bar{k}: X \sqcup Y \rightarrow Z \quad \text{mit} \quad \bar{k}|_X = g \quad \text{und} \quad \bar{k}|_Y = h,$$

da die disjunkte Vereinigung ein Koproduct in der Kategorie der Mengen ist. Damit k existiert, muss \bar{k} mit der Äquivalenzrelation \sim verträglich sein. Das ist äquivalent zu

$$(g \circ f)(y) = \bar{k}(f(y)) = \bar{k}(y) = h(y) \quad \text{für alle } y \in V.$$

Sei nun $k: X \cup_f Y \rightarrow Z$ eine Abbildung mit $g = k \circ i$ und $h = k \circ j$, dann gilt $(k \circ \pi)|_X = g$ und $(k \circ \pi)|_Y = h$, und es folgt $\bar{k} = k \circ \pi$ wegen Satz 1.40 (3). Da π surjektiv ist, ergibt sich daraus die Eindeutigkeit von k .

Zu (2) folgern wir nach Satz 1.40 (2), dass \bar{k} stetig ist. Da $\bar{k} = k \circ \pi$, folgt aus Satz 1.72 (2) die Stetigkeit von k . \square

Sei jetzt $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine gerichtete Familie topologischer Räume, das heißt, es existieren (beliebige) Abbildungen $f_{ij}: X_i \rightarrow X_j$ für alle $i < j$ mit

$$f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}: X_i \rightarrow X_k \quad \text{für alle } i < j < k.$$

Wir betrachten den *Kolimes*

$$\lim_{\rightarrow} X_i = \coprod_{i \in \mathbb{N}} X_i / \sim, \tag{1.4}$$

wobei

$$X_i \ni x_i \sim x_j \in X_j \iff f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j) \quad \text{für ein } k > i, j.$$

Die *schwache Topologie* auf $\lim_{\rightarrow} X_i$ ist die von den natürlichen Abbildungen $g_i: X_i \rightarrow \lim_{\rightarrow} X_i$ koinduzierte Topologie.

Ein wichtiger Spezialfall besteht darin, dass alle f_{ji} stetig sind.

1.76. FOLGERUNG. Seien $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ topologische Räume und $f_{ij}: X_i \rightarrow X_j$ stetige Abbildungen mit $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ für alle $i < j < k$. Sei $\varinjlim X_i$ mit der Identifizierungstopologie zur Abbildung $\coprod_{i \in \mathbb{N}} X_i \rightarrow \varinjlim X_i$ versehen. Sei (Z, \mathcal{O}_Z) ein weiterer topologischer Raum und $(h_i: X_i \rightarrow Z)_{i \in \mathbb{N}}$ stetige Abbildungen.

- (1) Es existiert genau dann eine Abbildung $\ell: \varinjlim X_i \rightarrow Z$ mit $h_i = \ell \circ g_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, wenn $h_j \circ f_{ji} = h_i: X_i \rightarrow Z$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, und ℓ ist in diesem Fall eindeutig.
- (2) In dieser Situation ist ℓ stetig.

Also erfüllt $W = \varinjlim X_i$ die universelle Eigenschaft eines Kolimes.

$$\begin{array}{ccc}
 & & (Z, \mathcal{O}_Z) \\
 & \nearrow^{h_0} & \uparrow \ell \\
 (X_0, \mathcal{O}_0) & \xrightarrow{f_{01}} & (X_1, \mathcal{O}_1) \longrightarrow \dots \\
 & \searrow_{g_0} & \downarrow_{g_1} \\
 & & (W, \mathcal{O}_W)
 \end{array} \tag{1.5}$$

BEWEIS. Dieser Beweis ist völlig analog zum Beweis von Folgerung 1.75. □

In Wirklichkeit ist die Kolimes-Konstruktion wesentlich allgemeiner und umfasst die universellen Eigenschaften in den Diagrammen (1.3) und (1.5) als Spezialfälle.

1.i. CW-Komplexe und topologische Mannigfaltigkeiten

Wir beschreiben jetzt zwei wichtige Klassen topologischer Räume. Die Grundidee bei beiden Konstruktionen besteht darin, Räume zu konstruieren, die sich in einem gewissen Sinne ähnlich verhalten wie \mathbb{R}^n mit der Standardbasis.

1.77. DEFINITION. Eine (topologische) Mannigfaltigkeit der Dimension $n \in \mathbb{N}$ ist ein Hausdorff-Raum M mit abzählbarer Basis, so daß jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U \subset M$ besitzt, die homöomorph zu \mathbb{R}^n ist.

1.78. BEISPIEL. Die folgenden Räume sind Mannigfaltigkeiten.

- (1) Der Raum \mathbb{R}^n ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension n .
- (2) Die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension n . Hierzu betrachtet man die stereographischen Projektion vom Nord- und Südpol $(0, \dots, 0, \pm 1)$ aus auf den Unterraum $\mathbb{R}^n \times \{0\}$.
- (3) Jede offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit ist wieder eine Mannigfaltigkeit. Hierzu reicht es zu zeigen, dass offene Teilmengen des \mathbb{R}^n lokal homöomorph zu \mathbb{R}^n sind. Betrachte dazu die Abbildung

$$B_r(x) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad y \mapsto \frac{1}{r - |y - x|} (y - x).$$

- (4) Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine n -dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit, dann ist M , versehen mit der Unterraumtopologie, eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

1.79. BEMERKUNG. (1) Wir verlangen die Hausdorff-Eigenschaft (T2), um den Raum aus Beispiel 1.29 und ähnliche Konstrukte auszuschließen. Wir verlangen abzählbare Basen (A2), damit unsere Mannigfaltigkeiten nicht zu groß werden, betrachte dazu etwa das Produkt aus dem Intervall $(0, 1)$ mit einer überabzählbaren, diskreten Menge. Man

beachte, dass (A1) und (T1) automatisch erfüllt sind, da jeder Punkt eine Umgebung homöomorph zu \mathbb{R}^n besitzt.

- (2) Mannigfaltigkeiten erfüllen (T3), sind also regulär, daher nach dem ersten Metrisationssatz von Urysohn metrisierbar (siehe Bemerkung 1.37), also insbesondere sogar normal. Sei etwa $A \subset M$ abgeschlossen und $p \in M \setminus A$, dann wählen wir eine zu \mathbb{R}^n homöomorphe Umgebung $U \subset M$ von p und betrachten $p \subset \mathbb{R}^n$ und $A \cap U \subset \mathbb{R}^n$. Dann existiert $r > 0$, so dass $D_r(p) \cap (A \cap U) = \emptyset$ in \mathbb{R}^n . Da M hausdorffsch und $D_r(p)$ kompakt ist, ist das Bild K von $D_r(p)$ unter der Inklusion $U \hookrightarrow M$ kompakt und insbesondere abgeschlossen nach Bemerkung 1.51 (2) und (5). Daher trennen die offenen Mengen $\overset{\circ}{K}$ und $M \setminus K$ den Punkt p von der Menge A .
- (3) Wir werden später sehen, dass die Dimension eine lokale Invariante ist: eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n ist zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^m genau dann isomorph, wenn $n = m$ gilt. Wir verlangen, dass eine Mannigfaltigkeit nur aus Komponenten einer festgelegten Dimension besteht.

Mit dieser Definition lässt sich zeigen, dass man jede Mannigfaltigkeit in den \mathbb{R}^N einbetten kann, wenn N hinreichend groß gewählt wurde.

Der Begriff der Mannigfaltigkeit ist jedoch für viele Zwecke zu speziell. Die folgende induktive Konstruktion liefert hingegen (überraschenderweise) eine Klasse von topologischen Räumen, die für viele Zwecke allgemein genug ist. Als Referenz verweisen wir auf den Anhang von [H1] und auf Abschnitt 4.d.

Wir bezeichnen mit $D^n = D_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ den abgeschlossenen n -dimensionalen Einheitsball, und mit $\partial D^n = S^{n-1}$ seinen Rand. Hier wie auch im folgenden bezieht sich ein hochgestellter Index immer auf eine Art Dimension und bezeichnet insbesondere nicht etwa einen Exponenten.

- (1) Wir beginnen mit einem diskreten topologischen Raum X^0 , dem 0-Gerüst oder 0-Skelett, dessen Punkte wir auch 0-Zellen nennen.
- (2) Sei das $n-1$ -Gerüst X^{n-1} bereits induktiv konstruiert, sei I^n eine beliebige Indexmenge, und sei

$$(\varphi_i^n: \partial D^n \rightarrow X^{n-1})_{i \in I^n}$$

eine Familie stetiger Abbildungen. Definiere die natürliche Abbildung

$$\varphi^n = \bigcup_i \varphi_i^n: \prod_i \partial D^n \rightarrow X^{n-1} \quad \text{mit} \quad \left(\bigcup_i \varphi_i^n \right)(i, x) = \varphi_i^n(x).$$

Dann konstruieren wir das n -Gerüst X_n , indem wir $\#I^n$ -viele Kopien von D^n mit X^{n-1} entlang der Abbildung ϕ^n verkleben wie in Folgerung 1.75:

$$X^n = \left(\prod_{i \in I^n} D^n \right) \cup_{\phi^n} X^{n-1}.$$

Somit erhalten wir auf die X^n die Quotiententopologie bezüglich einer Projektionsabbildung

$$\left(X^{n-1} \sqcup \prod_{i \in I^n} D^n, \mathcal{O}_{\sqcup} \right) \xrightarrow{\Pi^n} (X^n, \mathcal{O}_{X^n}). \quad (1.6)$$

- (3) Wir können entweder nach endlich vielen Schritten aufhören mit $X = X^n$, oder diesen Prozess für alle $n \in \mathbb{N}_0$ fortsetzen, in diesem Fall setzen wir

$$X = \varinjlim X^n$$

wie in Folgerung 1.76, und erhalten wiederum eine Quotiententopologie bezüglich

$$\prod_{n \in \mathbb{N}_0} (X^n, \mathcal{O}_{X^n}) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X).$$

Als Menge ist X die aufsteigende Vereinigung der Räume $X^0 \subset X^1 \subset \dots$

In X gehört zu jedem $i \in I^n$ eine *charakteristische Abbildung*

$$\Phi_i^n: D^n \rightarrow X^n \hookrightarrow X,$$

die die Verklebeabbildung $\varphi_i^n: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ fortsetzt, und $\Phi_i^n|_{B^n}$ ist ein Homöomorphismus von B^n auf sein Bild $e_i^n = \Phi_i^n(B^n)$.

Aus den Definitionen der Verklebungstopologie folgt induktiv, dass eine Teilmenge $U \cap X^n$ genau dann in X^n offen ist, wenn alle $(\Phi_i^j)^{-1}(U) \subset D^j$ offen sind für alle $j \leq n$ und $i \in I^j$. Für $n = 0$ ist das klar, da X^0 die diskrete Topologie trägt. Im Induktionsschritt ist $U \cap X^n$ genau dann offen, wenn das für $U \cap X^{n-1}$ und $(\Phi_i^n)^{-1}(U)$ für alle $i \in I^n$ gilt, also genau dann, wenn $(\Phi_i^j)^{-1}(U) \subset D^j$ offen sind für alle $j \leq n$ und $i \in I^j$.

Nach Definition der Kolimes-Topologie ist $U \subset X$ offen, wenn $U \cap X^n$ in X^n offen ist für alle n , wenn also alle $(\Phi_i^n)^{-1}(U)$ offen sind. In der obigen Argumentation können wir „offen“ überall durch „abgeschlossen“ ersetzen. Insgesamt können wir also X als einen großen Quotienten schreiben bezüglich der Vereinigung aller charakteristischen Abbildungen

$$\coprod_{n \in \mathbb{N}_0} \coprod_{i \in I^n} (D^n, \mathcal{O}_{D^n}) \xrightarrow{\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{i \in I^n} \Phi_i^n} (X, \mathcal{O}_X). \quad (1.7)$$

Nach Definition 1.71 sind dann die folgenden drei Aussagen äquivalent:

- (1) Die Menge X trägt die CW-Topologie \mathcal{O}_{CW} .
- (2) Eine Teilmenge $U \subset X$ ist genau dann offen, wenn $(\Phi_i^n)^{-1}(U) \subset D^n$ in der üblichen Topologie offen ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $i \in I^n$.
- (3) Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $(\Phi_i^n)^{-1}(A) \subset D^n$ in der üblichen Topologie abgeschlossen ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $i \in I^n$.

Die übliche Topologie auf D^n ist hier einfach die Unterraum-Topologie zu $D^n \subset \mathbb{R}^n$.

1.80. DEFINITION. Ein so konstruierter topologischer Raum X heißt *Zellkomplex* oder *CW-Komplex*. Die Teilmenge $X^n \subset X$ heißt *n-Gerüst* (*n-Skelett*) von X . Die Abbildungen

$$\varphi_i^n: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1} \hookrightarrow X$$

heißen *Verklebeabbildungen*, die

$$\Phi_i^n: D^n \rightarrow X^n \hookrightarrow X$$

charakteristische Abbildungen. Man nennt $e_i^n = \Phi_i^n(B^n)$ eine (*offene*) *n-Zelle* und $\bar{e}_i^n = \Phi_i^n(D^n)$ eine *abgeschlossene n-Zelle* von X .

Die Buchstaben „CW“ stehen für *closure finite, weak topology*, siehe unten.

1.81. BEISPIEL. Die folgenden Räume sind CW-Komplexe:

$$\begin{array}{llll} X = S^n & \text{mit} & X^0 = \dots = X^{n-1} = \text{pt}, & X^n = \dots = S^n; \\ & \text{oder mit} & X^j = S^j \quad \text{für } j \leq n, & X^n = \dots = S^n; \\ X = \mathbb{R} & \text{mit} & X^0 = \mathbb{Z}, & X^1 = \dots = \mathbb{R}; \\ X = \mathbb{R}^2 & \text{mit} & X^0 = \mathbb{Z}^2, \quad X^1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, & X^2 = \dots = \mathbb{R}^2; \\ X = \mathbb{R}^n & \text{mit} & X^0 = \mathbb{Z}^n, \quad \dots, & X^n = \dots = \mathbb{R}^n; \end{array}$$

Das erste Beispiel zeigt, dass ein gegebener topologischer Raum auf (viele) verschiedene Weisen als CW-Komplex geschrieben werden kann.

Wir geben exemplarisch charakteristische Funktionen für die ersten zwei CW-Strukturen auf S^n an. Für die erste wählen wir $\Phi^0(\{0\}) = e_{n+1} \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und

$$\Phi^n(v) = \begin{pmatrix} \sin(\pi |v|) \frac{v}{|v|} \\ -\cos(\pi |v|) \end{pmatrix} \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}.$$

Für die zweite CW-Struktur setzen wir beispielsweise

$$\Phi_{\pm}^j(v) = \begin{pmatrix} v \\ \pm \sqrt{1 - |v|^2} \\ 0 \end{pmatrix} \in S^j \times \{0\} = S^n \cap \mathbb{R}^{j+1} \subset \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^j \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{n-j}$$

für alle $j \leq n$ und alle $v \in D^j$.

Wir wollen jetzt einige grundlegende Fakten über CW-Komplexe zusammenstellen.

1.82. BEMERKUNG. Sei $X = \lim_{\rightarrow} X^n$ ein CW-Komplex, dann ist die Verklebungstopologie auf X^n gleich der von X induzierten Unterraumtopologie für alle n . Es reicht zu zeigen, dass Teilmengen $A \subset X^n$ als Teilmengen von X^n genau dann abgeschlossen sind, wenn sie als Teilmengen von X abgeschlossen sind. Nach Definition 1.71 der Quotiententopologie heißt das

$$\begin{aligned} & (\Phi_i^m)^{-1}(A) \subset D^m \text{ abgeschlossen für alle } m \leq n \text{ und alle } i \in I^m \\ \iff & (\Phi_i^m)^{-1}(A) \subset D^m \text{ abgeschlossen für alle } m \in \mathbb{N}_0 \text{ und alle } i \in I^m. \end{aligned}$$

Die Richtung „ \Leftarrow “ ist klar. Zu „ \Rightarrow “ schließen wir durch Induktion über m : Wenn $A \subset X^{m-1}$ abgeschlossen ist, dann ist

$$(\Phi_i^m)^{-1}(A) = (\varphi_i^m)^{-1}(A) \subset S^{m-1} \subset D^m$$

abgeschlossen in S^{m-1} wegen der Stetigkeit der Verklebeabbildungen φ_i^n , und in D^m , da $S^{m-1} \subset D^m$ abgeschlossen ist. Also ist A in X^m ebenfalls abgeschlossen, und damit auch in X . Somit trägt X^n die von $X = \lim_{\rightarrow} X^n$ induzierte Unterraumtopologie.

1.83. BEMERKUNG. CW-Komplexe erfüllen nicht automatisch das erste Abzählbarkeitsaxiom (A1) und sind daher auch nicht immer metrisierbar, siehe Beispiel 1.34 (2). Als Beispiel betrachten wir einen CW-Komplex mit 0-Skelett

$$X^0 = \mathbb{N} \dot{\cup} \{*\}.$$

Wir wählen $I^1 = \mathbb{N}$ und definieren Verklebefunktionen

$$\varphi_n^1: \{-1, 1\} \rightarrow X^0 \quad \text{mit} \quad \varphi_n^1(-1) = * \quad \text{und} \quad \varphi_n^1(1) = n.$$

Unser CW-Komplex $X = X^1$ sieht also aus wie ein Stern mit abzählbar vielen Zacken. Äquivalent schreiben wir

$$X = ([-1, 1] \times \mathbb{N}) / \sim,$$

wobei $(-1, m) \sim (-1, n)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$, während alle anderen Punkte nur zu sich selbst äquivalent sind. Da der Raum $[-1, 1] \times \mathbb{N}$ sogar das zweite Abzählbarkeitsaxiom (A2) erfüllt, erhalten wir auch ein Gegenbeispiel zu Bemerkung 1.74 (4). Im Beweis unten werden wir auch sehen, dass die CW-Topologie auf X echt feiner ist als die metrische Topologie, bei der wir X als Vereinigung radialer Strecken in einem Vektorraum mit der französischen Eisenbahnmetrik aus Übung 1.95 auffassen; dazu wählen wir etwa $U_n = B_{1/n}(*).$

Es sei $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Umgebungen von $*$ in X . Mit Hilfe eines Diagonalarguments konstruieren wir eine offene Umgebung V von $*$ in X , so dass kein U_n ganz in V enthalten ist. Damit zeigen wir, dass $*$ keine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, dass (A1) also verletzt ist.

Nach Definition der Quotiententopologie reicht es,

$$(\Phi_n^1)^{-1}(V) \subset [-1, 1]$$

für alle n als offene Umgebung von $-1 = (\Phi_n^1)^{-1}(*)$ anzugeben. Da $[-1, 1]$ insbesondere (T3) erfüllt, finden wir (wie im Beweis von Satz 1.49 (3)) eine offene Umgebung V_n von -1 in $[-1, 1]$ mit

$$\overline{V}_n \subset ((\Phi_n^1)^{-1}(U_n))^\circ.$$

Für die offene Menge

$$V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n^1(V_n) \subset X$$

gilt offensichtlich $U_n \not\subset V$ für alle n wie gewünscht, denn

$$(\Phi_n^1)^{-1}(U_n) \not\subset (\Phi_n^1)^{-1}(V).$$

1.84. SATZ. *CW-Komplexe sind normal.*

BEWEIS. Sei $X = \lim_{\rightarrow} X^n$ ein CW-Komplex. Zu zeigen ist, dass (T1) und (T4) gelten, und (T1) ist äquivalent dazu, dass Punkte in X abgeschlossen sind.

Sei also $x \in X$. Da $X = \lim_{\rightarrow} X^n$, existiert genau ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $x \in X^{n_0} \setminus X^{n_0-1}$. Da

$$X^{n_0} \setminus X^{n_0-1} = \coprod_{i \in I^{n_0}} e_i^{n_0},$$

liegt x in genau einer Zelle $e_{i_0}^{n_0}$. Wir betrachten X^{n_0} als Quotienten wie in (1.6), dann ist das Urbild $\{x\}$ gerade ein Punkt in einer Kopie von D^{n_0} und somit abgeschlossen in X^{n_0} nach Definition der Quotiententopologie.

Wie in Bemerkung 1.82 folgt aus der Stetigkeit der Verklebeabbildungen induktiv, dass $\{x\}$ in X^n abgeschlossen ist für alle $n > n_0$. Jetzt können wir aus der Definition der Quotiententopologie in (1.7) darauf schließen, dass $\{x\} \subset X$ abgeschlossen ist. Da $x \in X$ beliebig war, gilt also (T1).

Wir zeigen jetzt, dass auch (T4) erfüllt ist. Dazu seien $A, B \subset X$ abgeschlossen. Wir konstruieren induktiv offene Mengen $U^n, V^n \subset X^n$ mit

$$A \cap X^n \subset U^n, \quad B \cap X^n \subset V^n \quad \text{und} \quad \overline{U}^n \cap \overline{V}^n = \emptyset. \quad (*)$$

Für $n = 0$ können wir $U^0 = A \cap X^0$ und $V^0 = B \cap X^0$ wählen. Danach wählen wir in jedem weiteren Schritt für $n > 0$ offene Mengen U^n und $V^n \subset X^n$, die (*) erfüllen sowie

$$U^n \cap X^{n-1} = U^{n-1} \quad \text{und} \quad V^n \cap X^{n-1} = V^{n-1}. \quad (**)$$

Aus der Definition der schwachen Topologie und (*), (**) folgt, dass die Mengen

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} U^n \quad \text{und} \quad V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} V^n$$

in X offen sind mit $A \subset U, B \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$, womit (T4) vorbehaltlich der Konstruktion der U^n, V^n bewiesen ist.

Um U^n und V^n aus U^{n-1} und V^{n-1} zu konstruieren, können wir $U^n \cap e_i^n$ für jede Zelle $e_i^n \in X^n \setminus X^{n-1}$ einzeln konstruieren. Wir betrachten dazu die Mengen

$$\begin{aligned} A_i^n &= (\Phi_i^n)^{-1}(A), & B_i^n &= (\Phi_i^n)^{-1}(B) & \subset & D^n, \\ \text{und} \quad M_i^n &= (\varphi_i^n)^{-1}(U^{n-1}), & N_i^n &= (\varphi_i^n)^{-1}(V^{n-1}) & \subset & \partial D^n = S^{n-1}, \end{aligned}$$

dabei sind A_i^n und B_i^n abgeschlossen. Sei d die euklidische Metrik auf $D^n \subset \mathbb{R}^n$. Nach dem Satz 1.54 von Heine-Borel ist D^n kompakt, also auch alle abgeschlossenen Teilmengen. Da

$$\overline{M}_i^n \cap B_i^n = \overline{N}_i^n \cap A_i^n = \emptyset,$$

folgt aus der Kompaktheit von A_i^n , B_i^n , $\overline{M_i^n}$ und $\overline{N_i^n}$, dass

$$\varepsilon_i^n = \frac{1}{2} \min \left\{ \inf_{x \in M_i^n} \inf_{y \in B_i^n} d(x, y), \inf_{x \in N_i^n} \inf_{y \in A_i^n} d(x, y), 1 \right\} = \frac{1}{2} \min \{ d(M_i^n, B_i^n), d(A_i^n, N_i^n), 1 \} > 0.$$

Wir erhalten also offene Teilmengen $P_i^n, Q_i^n \subset D^n$ der Gestalt

$$P_i^n = \left\{ x \in D^n \mid \frac{x}{|x|} \in M_i^n \text{ und } |x| > 1 - \varepsilon_i^n \right\}$$

und

$$Q_i^n = \left\{ x \in D^n \mid \frac{x}{|x|} \in N_i^n \text{ und } |x| > 1 - \varepsilon_i^n \right\}$$

mit

$$P_i^n \cap S^{n-1} = M_i^n, \quad Q_i^n \cap S^{n-1} = N_i^n, \quad \text{und} \quad \overline{P_i^n} \cap B_i^n = \overline{Q_i^n} \cap A_i^n = P_i^n \cap Q_i^n = \emptyset.$$

Schliesslich benutzen wir die Normalität der offenen Kreisscheibe B^n , um offene Mengen $R_i^n, T_i^n \subset B^n$ zu konstruieren, so dass

$$\begin{aligned} R_i^n \supset A_i^n \cap B^n, & \quad \emptyset = \overline{R_i^n} \cap \overline{Q_i^n} \cup \overline{B_i^n}, \\ T_i^n \supset B_i^n \cap B^n, & \quad \text{und} \quad \emptyset = \overline{T_i^n} \cap \overline{P_i^n} \cup \overline{R_i^n}. \end{aligned}$$

Da

$$(P_i^n \cup R_i^n) \cap \partial D^n = (\varphi_i^n)^{-1}(U^{n-1}) \quad \text{und} \quad (Q_i^n \cup T_i^n) \cap \partial D^n = (\varphi_i^n)^{-1}(V^{n-1}),$$

können wir jetzt U^n und V^n so definieren, dass

$$(\Phi_i^n)^{-1}(U^n) = P_i^n \cup R_i^n \quad \text{und} \quad (\Phi_i^n)^{-1}(V^n) = Q_i^n \cup T_i^n$$

für alle i offen ist und (*) und (**) erfüllt. □

1.85. DEFINITION. Ein *Unterkomplex* Y eines CW-Komplexes X ist ein abgeschlossener Unterraum, der aus einer Vereinigung von Zellen von X besteht. Ein CW-Komplex heisst *endlich*, wenn er aus endlich vielen Zellen besteht.

Da einzelne n -Zellen e_i^n für $n > 0$ selbst nicht abgeschlossen sind, gehören auch alle Zellen, die vom Rand von $\overline{e_i^n}$ getroffen werden, mit zum Unterkomplex. Insbesondere sind Unterkomplexe selbst wieder CW-Komplexe, und man kann sich wie in Bemerkung 1.82 überzeugen, dass die Unterraumtopologie eines Unterkomplexes $Y \subset X$ mit seiner CW-Komplex-Topologie übereinstimmt, indem man induktiv die CW-Topologie auf Y^n mit der Unterraumtopologie von $Y^n \subset X^n$ vergleicht.

Um einem möglichen Missverständnis vorzubeugen, weisen wir darauf hin, dass der Abschluss einer Zelle e_i^n nicht notwendigerweise ein Unterkomplex von X ist, genausowenig ihr Rand $\partial e_i^n \subset X^{n-1}$ (obwohl das in vielen Beispielen durchaus so sein wird).

1.86. SATZ. *Ein Unterraum A eines CW-Komplexes X ist genau dann kompakt, wenn er abgeschlossen und in einem endlichen Unterkomplex von X enthalten ist.*

BEWEIS. „ \Leftarrow “: Jede abgeschlossene Zelle $\overline{e_i^n} = \Phi_i^n(D^n)$ ist als Bild einer kompakten Menge in einem Hausdorff-Raum kompakt, siehe Bemerkung 1.51 (2). Ein endlicher Unterkomplex ist eine endliche Vereinigung abgeschlossener Zellen, und daher immer noch kompakt. Eine abgeschlossene Teilmenge eines endlichen Unterkomplexes ist auch in X abgeschlossen und daher nach Bemerkung 1.51 (1) kompakt.

„ \Rightarrow “: Sei $K \subset X$ kompakt, dann ist K abgeschlossen nach Bemerkung 1.51 (5). Für die andere Richtung zeigen wir als nächstes, dass eine kompakte Teilmenge $K \subset X$ höchstens endlich viele offene Zellen treffen kann. Falls das nicht der Fall sein sollte, wählen wir abzählbar unendlich viele Punkte $x_j \in K$ mit $j \in \mathbb{N}_0$, die in paarweise verschiedenen Zellen liegen. Durch Induktion über n wie im Beweis von Satz 1.84 konstruieren wir offene Mengen $U_j^n \subset X^n$ mit $x_j \in U_j^n$ falls $x_j \in X^n$,

und $U_j^n = \emptyset$ sonst. Hierbei ist U_j^n das Bild eines kleinen Balles in B^n , falls $x_j \in e_i^n$ liegt, und ansonsten wählen wir U_j^n so, dass

$$(\Phi_i^n)^{-1}(U_j^n) = \left\{ x \in D^n \mid \frac{x}{|x|} \in (\varphi_i^n)^{-1}(U_j^{n-1}) \text{ und } |x| > 1 - \varepsilon_i^n \right\}$$

für ein hinreichend kleines $\varepsilon_i^n > 0$. Anschliessend setzen wir $U_j = \bigcup_n U_j^n$.

Die Menge $U_0 = X \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$ ist ebenfalls offen, da man zu $x_0 \in U_0$ analog zur Konstruktion der U_j eine offene Umgebung von x_0 in U_0 finden kann. Dann wird K überdeckt von den offenen Mengen $(U_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$, es existiert jedoch keine endliche Teilüberdeckung, da x_j jeweils nur in U_j enthalten ist, Widerspruch. Also kann K nur endlich viele offene Zellen treffen.

Es bleibt zu zeigen, dass der Abschluss jeder einzelnen Zelle e_i^n in einem endlichen Unterkomplex enthalten ist. Wir beweisen das durch Induktion über n . Der Rand $\partial e_i^n = \varphi_i^n(S^{n-1})$ einer Zelle e_i^n ist ein kompakter Unterraum von X^{n-1} und trifft daher nur endlich viele offene Zellen der Dimension $< n$, von denen jede nach Induktion in einem endlichen Unterkomplex enthalten ist. Durch Ankleben von e_i^n an die endliche Vereinigung dieser endlichen Unterkomplexe erhält man einen endlichen Komplex, der \bar{e}_i^n und damit auch e_i^n enthält. \square

Aus der Kompaktheit von D^n folgt also insbesondere, dass das Bild \bar{e}_i^n von Φ_i^n nur endlich viele Zellen trifft (daher „closure finite“). Mit „weak topology“ ist die im dritten Schritt auf X definierte Topologie gemeint, bzw. die durch (1.7) definierte Quotiententopologie. Dadurch lassen sich CW-Komplexe sogar charakterisieren.

1.87. SATZ (ohne Beweis, siehe [H1]). *Sei X ein Hausdorff-Raum und $(\Phi_i^n: D^n \rightarrow X)_{n \in \mathbb{N}_0, i \in I^n}$ für jedes n eine Familie stetiger Abbildungen. Dann sind die Abbildungen Φ_i^n genau dann die charakteristischen Abbildungen eines CW-Komplexes auf X , wenn*

- (1) *die Einschränkungen $\Phi_i^n|_{B^n}$ allesamt Homöomorphismen auf ihre Bilder e_i^n sind, und X als Menge die disjunkte Vereinigung aller e_i^n ist,*
- (2) *die Bilder der $\Phi_i^n|_{\partial D^n}$ jeweils nur endlich viele Zellen treffen,*
- (3) *und eine Menge $A \subset X$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $(\Phi_i^n)^{-1}(A) \subset D^n$ für alle n und alle $i \in I^n$ abgeschlossen ist.*

Der Vollständigkeit halber definieren wir eine besondere Klasse von stetigen Abbildungen zwischen CW-Komplexen, die besonders schön mit der CW-Struktur verträglich ist.

1.88. DEFINITION. Seien X und Y zwei CW-Komplexe. Eine stetige Abbildung $F: X \rightarrow Y$ heißt *zellulär*, wenn $F(X^n) \subset Y^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Das folgende technische Resultat wird später noch benötigt.

1.89. PROPOSITION. *Es sei X ein CW-Komplex und Y lokalkompakt, dann ist die Produkttopologie auf $X \times Y$ gerade die Quotiententopologie zur Abbildung*

$$\coprod_{n \in \mathbb{N}_0} \coprod_{i \in I^n} D^n \times Y \xrightarrow{\bigcup_n \bigcup_i \Phi_i^n \times \text{id}_Y} X \times Y.$$

BEWEIS. Es bezeichne \mathcal{O}_\square die Produkt- und \mathcal{O}_\rightarrow die Quotiententopologie auf $X \times Y$. Aus der Stetigkeit von

$$\begin{aligned} \pi_X \circ (\Phi_i^n \times \text{id}_Y) &= \Phi_i^n \circ \pi_{D^n}: D^n \times Y \longrightarrow X \\ \text{und } \pi_Y \circ (\Phi_i^n \times \text{id}_Y) &= \pi_Y: D^n \times Y \longrightarrow Y \end{aligned}$$

folgt mit den charakteristischen Eigenschaften aus Satz 1.46 (2) und Satz 1.72 (2) auch die Stetigkeit von

$$\begin{aligned} & \Phi_i^n \times \text{id}_Y: D^n \times Y \longrightarrow (X \times Y, \mathcal{O}_\square) \\ \text{und} \quad & \text{id}_{X \times Y}: (X \times Y, \mathcal{O}_\rightarrow) \longrightarrow (X \times Y, \mathcal{O}_\square). \end{aligned}$$

Für einen beliebigen topologischen Raum folgt aus Satz 1.60 (1) und (3), dass

$$F: (X \times Y, \mathcal{O}_\square) \longrightarrow Z$$

genau dann stetig ist, wenn die zugehörige Abbildung

$$f: X \longrightarrow (C(Y, Z), \mathcal{O}_{\text{ko}})$$

stetig ist. Aber das ist nach Satz 1.72 (2) äquivalent zur Stetigkeit von

$$f \circ \Phi_i^n: D^n \longrightarrow (C(Y, Z), \mathcal{O}_{\text{ko}})$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $i \in I^n$, also wiederum mit Satz 1.60 zur Stetigkeit von

$$F \circ (\Phi_i^n \times \text{id}_Y): D^n \times Y \longrightarrow Z.$$

Nach Definition der Quotiententopologie sind für $Z = (X \times Y, \mathcal{O}_\rightarrow)$ alle Abbildungen

$$\Phi_i^n \times \text{id}_Y: D^n \times Y \longrightarrow (X \times Y, \mathcal{O}_\rightarrow)$$

stetig, also nach dem obigen auch

$$\text{id}_{X \times Y}: (X \times Y, \mathcal{O}_\square) \longrightarrow (X \times Y, \mathcal{O}_\rightarrow). \quad \square$$

1.90. BEMERKUNG. Es ist wichtig, dass Y lokalkompakt ist in der obigen Proposition. Seien etwa X und Y zwei beliebige CW -Komplexe mit charakteristischen Abbildungen Φ_i^n und Ψ_j^m . Dann erhalten wir eine CW -Struktur auf der Menge $X \times Y$ mit charakteristischen Abbildungen

$$D^{n \times m} \xrightarrow{\sim} D^n \times D^m \xrightarrow{\Phi_i^n \times \Psi_j^m} X \times Y.$$

Dann ist die CW -Topologie auf $X \times Y$ im allgemeinen feiner als die Produkt-Topologie.

Mit Hinblick auf eine Anwendung im nächsten Kapitel wollen wir uns überlegen, dass CW -Komplexe lokal zusammenziehbar sind.

1.91. DEFINITION. Ein topologischer Raum X heißt *zusammenziehbar*, wenn es eine stetige Abbildung $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ und einen Punkt $x_0 \in X$ gibt, so dass

$$H(x, 0) = x \quad \text{und} \quad H(x, 1) = x_0$$

für alle $x \in X$ gilt.

Ein topologischer Raum X heißt *lokal zusammenziehbar*, wenn jede Umgebung U eines Punktes x eine Umgebung V von x enthält, die sich auf x zusammenziehen lässt.

1.92. BEMERKUNG. (1) Zum Beispiel ist B^n zusammenziehbar mit

$$x_0 = 0 \quad \text{und} \quad H(x, t) = (1 - t)x \in B^n \quad \text{für alle } x \in B^n \text{ und alle } t \in [0, 1].$$

(2) Topologische Mannigfaltigkeiten sind lokal homöomorph zu \mathbb{R}^n , und daher ebenfalls lokal zusammenziehbar. Sei etwa U eine beliebige Umgebung von $x \in M$, und sei V eine zu \mathbb{R}^n homöomorphe Umgebung von x . Dann ist $U \cap V$ zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n homöomorph, enthält also einen zusammenziehbaren Ball um x .

(3) Jeder zusammenziehbare Raum X ist wegzusammenhängend, denn für alle $x \in X$ ist $t \mapsto H(x, t)$ ein Weg von x zum festen Punkt x_0 .

1.93. SATZ. *CW -Komplexe sind lokal zusammenziehbar.*

BEWEIS. Sei X ein CW-Komplex, sei $x_0 \in e_{i_0}^{n_0} \subset X^{n_0} \setminus X^{n_0-1}$, und sei $U \subset X$ eine Umgebung von x_0 . Sei $V^{n_0} \subset U \cap X^{n_0}$ das Bild eines kleinen Balles in B^{n_0} unter der charakteristischen Abbildung $\Phi_{i_0}^{n_0}$, beziehungsweise $V^0 = \{x_0\}$ für den Fall dass $n_0 = 0$ und $x \in X^0$. Dann konstruieren wir induktiv offene Mengen $V^n \subset U \cap X^n$ mit $V^n \cap X^{n-1} = V^{n-1}$ für alle $n > n_0$, wobei wieder

$$(\Phi_i^n)^{-1}(V^n) = \left\{ x \in D^n \mid \frac{x}{|x|} \in (\varphi_i^n)^{-1}(V_j^{n-1}) \text{ und } |x| > 1 - \varepsilon_i^n \right\} \subset (\Phi_i^n)^{-1}(U)$$

für ein hinreichend kleines $\varepsilon_i^n \in (0, 1)$. Anschliessend setzen wir $V = \bigcup V^n$.

Wir können jetzt eine Abbildung H wie in Definition 1.91 definieren, indem wir — beginnend mit der „höchsten“ Dimension — Punkte innerhalb einer Zelle auf ihren Rand projizieren. Da Zellen beliebig hohe Dimension haben können, müssen wir vorsichtig sein. Wir definieren zunächst $H^n: V^n \times [0, 1] \rightarrow V^n$ für $n > n_0$ durch

$$H^n(\Phi_i^n(x), t) = \Phi_i^n\left(\frac{x}{|x|^t}\right)$$

für alle $x \in V^n \cap e_i^n$. Hier nutzen wir aus, dass $\varepsilon_i^n < 1$, also $|x| > 0$ für alle $x \in (\Phi_i^n)^{-1}(V^n)$. Offensichtlich gilt also

$$H^n(V^n, 1) \subset V^{n-1} \quad \text{und} \quad H^n(x, t) = x \text{ für alle } x \in V^{n-1}.$$

Außerdem definieren wir $H^{n_0}: V^{n_0} \times [0, 1] \rightarrow V^{n_0}$ durch

$$H^{n_0}(\Phi_{i_0}^{n_0}(x), t) = \Phi_{i_0}^{n_0}\left((1-t)x + t(\Phi_{i_0}^{n_0})^{-1}(x_0)\right).$$

Wir schreiben $P^n = H(\cdot, 1): V^n \rightarrow V^{n-1}$ und definieren $H: V \times [0, 1] \rightarrow V$ für $x \in V^n$ durch

$$H(x, t) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq t \leq 2^{n_0-n-1}, \text{ und} \\ H^{n'}((P^{n'+1} \circ \dots \circ P^n)(x), 2^{n'+1-n_0}t - 1) & \text{für } 2^{n_0-n'-1} \leq t \leq 2^{n_0-n'} \end{cases}.$$

Dann ist H die gewünschte Abbildung. Für die Stetigkeit von H reicht nach Proposition 1.89 und Satz 1.72 (2), dass $H(\Phi_i^n(\cdot), \cdot): D^n \times [0, 1] \rightarrow X$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $i \in I^n$ stetig ist. Wir schreiben $[0, 1]$ als CW-Komplex mit den 1-Zellen

$$[0, 1] = [0, 2^{n_0-n-1}] \cup [2^{n_0-n-1}, 2^{n_0-n}] \cup \dots \cup [2^{-1}, 2^0]$$

und benötigen mit dem gleichen Argument nur die Stetigkeit von $H(\Phi_i^n(\cdot), \cdot)$ auf dem Produkt von D^n mit den einzelnen Teilintervallen, aber die folgt direkt aus der Konstruktion der H^n und H . Man beachte, dass wir trotz beliebig hoher „Kontraktionsgeschwindigkeiten“ nahe $t = 0$ aufgrund der Quotiententopologie auf X keine Probleme mit der Stetigkeit bei $t = 0$ bekommen. \square

1.94. FOLGERUNG (aus Satz 1.93). *Sei X ein CW-Komplex, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (1) X ist zusammenhängend.
- (2) X ist wegzusammenhängend.
- (3) X^1 ist zusammenhängend.
- (4) X^1 ist wegzusammenhängend.

BEWEIS. (1) \implies (2). Sei $x \in X$, und sei Z_x die Wegzusammenhangskomponente von x . Da X lokal zusammenziehbar ist, folgt:

- (1) Z_x ist offen, denn alle $z \in Z_x$ haben eine zusammenziehbare Umgebung U . Sei $H: U \times [0, 1] \rightarrow U$ die Kontraktion, dann ist $t \mapsto H(z, t)$ ein Weg von y nach $z \in U$. Also kann jeder Punkt $z \in U$ mit y , also auch mit x verbunden werden.

- (2) Z_x ist abgeschlossen, denn sei $y \in \overline{Z_x}$, und sei U eine zusammenziehbare Umgebung von y , dann gibt es einen Punkt in $U \cap Z_x$, der sowohl mit x als auch mit y durch einen Weg verbunden werden kann, also kann auch x mit y durch einen Weg verbunden werden.

Somit ist Z_x offen, abgeschlossen und nicht leer. Wenn X zusammenhängend ist, folgt $X = Z_x$, somit ist X auch wegzusammenhängend.

Da jeder wegzusammenhängende Raum nach 1.65 (2) zusammenhängend ist, folgt also (1) \iff (2). Da X^1 selbst ein CW-Komplex ist, folgt auch (3) \iff (4).

(1) \implies (3). Wir nehmen an, dass X^1 nicht zusammenhängend sei. Dann existiert eine offene und abgeschlossene Menge $\emptyset \neq A^1 \neq X^1$ mit offenem und abgeschlossenen Komplement $\emptyset \neq B^1 \neq X^1$, und A^n und B^n sind sogar Unterkomplexe, da abgeschlossene Zellen zusammenhängend sind.

Wir zeigen induktiv, dass X^n nicht zusammenhängend ist, indem wir nichtleere abgeschlossene Mengen A^n und B^n mit

$$A^n \cap X^{n-1} = A^{n-1}, \quad B^n \cap X^{n-1} = B^{n-1}, \quad \text{und} \quad X^n = A^n \dot{\cup} B^n \quad (*)$$

angeben. Betrachte dazu $\varphi_i^n: S^{n-1} = \partial D^n \rightarrow X^{n-1}$ für $i \in I^n$. Da S^{n-1} zusammenhängend ist für $n \geq 2$, ist auch $\varphi_i^n(S^{n-1})$ zusammenhängend, und somit gilt entweder $\partial e_i^n = \varphi_i^n(S^{n-1}) \subset A^{n-1}$ oder $\partial e_i^n \subset B^{n-1}$. Wir können jetzt Unterkomplexe $\emptyset \neq A^n, B^n \subset X^n$ definieren durch

$$A^n = A^{n-1} \cup \bigcup_{\substack{i \in I^n \\ \partial e_i^n \subset A^{n-1}}} \bar{e}_i^n \quad \text{und} \quad B^n = B^{n-1} \cup \bigcup_{\substack{i \in I^n \\ \partial e_i^n \subset B^{n-1}}} \bar{e}_i^n,$$

und es gilt (*). Ausserdem sind A^n, B^n als Unterkomplexe abgeschlossen. Schliesslich folgt

$$X = A \dot{\cup} B \quad \text{mit} \quad A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A^n \quad \text{und} \quad B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} B^n,$$

und A und B sind beide abgeschlossen und nicht leer, also ist auch X nicht zusammenhängend.

(4) \implies (2). Sei jetzt X^1 wegzusammenhängend, und sei $x \in X^0$. Wir zeigen induktiv, dass X^n auch wegzusammenhängend ist. Sei also $y \in X^n$, dann suchen wir einen Weg von y nach x . Falls $y \in X^{n-1}$, sind wir nach Induktionsvoraussetzung fertig.

Ansonsten ist $y = \Phi_i^n(y_0)$ mit $y_0 \in D^n$. Wir wählen $z_0 \in S^{n-1} = \partial D^n$ und erhalten einen Weg

$$s \mapsto \Phi_i^n((1-s)y_0 + sz_0)$$

von y nach $z = \Phi_i^n(z_0) \in X^{n-1}$, und somit auch einen Weg von y nach x nach Induktionsvoraussetzung. Damit ist X^n dann auch wegzusammenhängend.

Seien schliesslich $x, y \in X$ beliebig, dann existiert ein $N > 0$ mit $x, y \in X^N$, und somit lassen sich x, y durch einen Weg in $X^N \subset X$ verbinden. \square

1.j. Übungen zu Kapitel 1

Übungen zu Abschnitt 1.a.

1.95. ÜBUNG. Die Metrik der französischen Eisenbahnen. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Man setze

$$d_f(x, y) = \begin{cases} \|y - x\| & \text{falls } x \text{ und } y \text{ kollinear, und} \\ \|x\| + \|y\| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

- (1) (V, d_f) ist ein metrischer Raum.
- (2) Sei $d_n(x, y) = \|y - x\|$ die übliche Metrik. Die Identität $\text{id}_V: (V, d_f) \rightarrow (V, d_n)$ ist stetig, nicht jedoch $\text{id}_V: (V, d_n) \rightarrow (V, d_f)$.

1.96. ÜBUNG. Seien $(X, d), (Y, d')$ metrische Räume und $\alpha \in (0, 1]$. Eine Abbildung $F: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ heißt α -Höldersch, falls eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d'(F(x), F(y)) \leq C d(x, y)^\alpha .$$

1-Höldersche Abbildungen heissen auch Lipschitzsch. Zeigen Sie, dass jede α -Höldersche Abbildung stetig ist.

1.97. ÜBUNG. Sei p eine Primzahl. Jede rationale Zahl $q \neq 0$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$q = p^r \frac{a}{b} ,$$

mit $r, a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$, so dass p, a und b paarweise teilerfremd sind. In diesem Fall definieren wir die p -adische Bewertung von q durch $\|q\|_p = p^{-r}$ und $\|0\|_p = 0$. Dadurch wird die p -adische Metrik

$$d_p(x, y) = \|y - x\|_p$$

auf \mathbb{Q} induziert.

- (1) Zeigen Sie, dass d_p wirklich eine Metrik ist, also die Axiome (1)–(3) aus Definition 1.1 erfüllt.
- (2) Zeigen Sie, dass eine verschärfte Dreiecksungleichung gilt:

$$d_p(x, z) \leq \max\{d_p(x, y), d_p(y, z)\} ,$$

und „ \leq “ kann nur auftreten, wenn $d_p(x, y) = d_p(y, z)$ gilt.

- (3) Folgern Sie daraus: Für alle $x, y \in (\mathbb{Q}, d_p)$ und alle $\varepsilon, \delta > 0$ seien $B_\delta(x)$ und $B_\varepsilon(y)$ metrische Bälle bezüglich d_p , dann sind $B_\delta(x)$ und $B_\varepsilon(y)$ entweder disjunkt, oder einer der beiden Bälle enthält den anderen.

1.98. ÜBUNG. Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $(x_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in X . Zeigen Sie: die Folge x_i konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn es zu jeder Umgebung U von x in X ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $x_i \in U$ für alle $i \geq n_0$.

1.99. ÜBUNG. Seien (X, d) und (Y, d') metrische Räume, und sei $x \in X$. Zeigen Sie: eine Abbildung $F: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ ist genau dann stetig am Punkt x , wenn die Urbilder aller Umgebungen von $F(x)$ in Y wiederum Umgebungen von x sind.

Übungen zu Abschnitt 1.b.

1.100. ÜBUNG. Sei X eine beliebige Menge, und sei

$$\mathcal{O} = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ ist eine endliche Menge}\} \cup \{\emptyset\} \subset \mathcal{P}X .$$

Zeigen Sie, dass \mathcal{O} eine Topologie auf X definiert. Diese Topologie heißt auch die *koendliche Topologie*.

1.101. ÜBUNG. Die folgende Konstruktion ist wichtig in der algebraischen Geometrie. Wir nennen eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}^n$ *Zariski-abgeschlossen*, wenn es eine Menge $P \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ von Polynomen gibt, so dass

$$A = \{z \in \mathbb{C}^n \mid p(z) = 0 \text{ für alle } p \in P\} . \quad (*)$$

Eine Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ heißt *Zariski-offen*, wenn $\mathbb{C}^n \setminus U$ Zariski-abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass die Menge \mathcal{O}_Z aller Zariski-offenen Teilmengen eine Topologie bildet. Diese Topologie heißt auch die *Zariski-Topologie*.

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass es äquivalent (und etwas einfacher) ist, zu zeigen: (1) \emptyset und \mathbb{C}^n sind Zariski-abgeschlossen; (2) wenn A_1, \dots, A_k Zariski-abgeschlossen sind, dann auch $A_1 \cup \dots \cup A_k$

(betrachten Sie hierzu geeignete Produkte der definierenden Polynome); (3) wenn alle $A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{P}\mathbb{C}^n$ Zariski-abgeschlossen sind, dann auch

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Bemerkung: Aus dem Hilbertschen Basissatz folgt, dass man für jedes A nur jeweils endlich viele Polynome braucht, um A wie in (*) zu definieren.

1.102. ÜBUNG. Seien X und Y beliebige Mengen. Zeigen Sie:

- (1) Sei $\mathcal{O}_\delta = \mathcal{P}X$ die diskrete Topologie, und sei $\mathcal{O}_K = \{\emptyset, Y\}$ die Klumpentopologie. Dann sind für jeden beliebigen topologischen Raum (Z, \mathcal{O}) alle Abbildungen $F: (X, \mathcal{O}_\delta) \rightarrow (Z, \mathcal{O})$ und alle Abbildungen $G: (Z, \mathcal{O}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_K)$ stetig.
- (2) Seien $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ beliebige Topologien auf X und Y . Falls für jeden beliebigen topologischen Raum (Z, \mathcal{O}) alle Abbildungen $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{O})$ und alle Abbildungen $G: (Z, \mathcal{O}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig sind, dann ist $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_\delta$ die diskrete und $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_K$ die Klumpentopologie.

Übungen zu Abschnitt 1.c.

1.103. ÜBUNG. Sei (X, d) ein metrischer Raum, und seien A, A_0 und A_1 abgeschlossene Teilmengen von X , und A_0 und A_1 seien disjunkt. Zeigen Sie:

- (1) die Funktion $d_A: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $d_A(x) = \inf_{a \in A} d(a, x)$ ist stetig;
- (2) es gilt $d_A(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in A$;
- (3) die Funktion $f = d_{A_0}/(d_{A_0} + d_{A_1})$ hat die in Satz 1.26 (3) geforderten Eigenschaften.

1.104. ÜBUNG. Sei X eine Menge mit mindestens zwei Elementen, und sei \mathcal{O}_K die Klumpentopologie auf X . Welche Trennungseigenschaften besitzt (X, \mathcal{O}_K) ?

1.105. ÜBUNG. Es sei X eine unendliche Menge mit der koendlichen Topologie \mathcal{O} aus Aufgabe 1.100. Welche Trennungseigenschaften besitzt (X, \mathcal{O}) ?

1.106. ÜBUNG. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{N}$ heiße offen bezüglich der Ordnungstopologie $\mathcal{O}_<$, wenn aus $m \in U$ auch $n \in U$ für alle $n \geq m$ folgt.

- (1) berprfen Sie, dass $\mathcal{O}_<$ die Axiome einer Topologie erfüllt.
- (2) Welche Trennungseigenschaften hat $(\mathbb{N}, \mathcal{O}_<)$?

1.107. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) die Zariski-Topologie auf \mathbb{C}^n ist für kein $n \geq 1$ hausdorffsch, erfüllt aber (T1).
- (2) Jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ definiert eine stetige Abbildung $p: (\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_Z) \rightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{O}_Z)$.
- (3) Versuchen Sie zu erklären, warum (2) nicht Bemerkung 1.28 (2) widerspricht.

Hinweis: Um (1) zu beweisen, überlegen Sie sich, dass für alle Polynome p gilt:

- (1) wenn $p(x) \neq 0$, dann existiert ein kleiner metrischer Ball $B_\varepsilon(x)$, auf dem p nirgends verschwindet.
- (2) wenn p auf einem kleinen metrischen Ball verschwindet, dann verschwindet es auf ganz \mathbb{C}^n .

Übungen zu Abschnitt 1.d.

1.108. ÜBUNG. Betrachte den Raum $X = [0, 1]^2$ mit

$$d((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_2 - y_1| & \text{falls } x_1 = x_2, \text{ und} \\ 1 & \text{falls } x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

- (1) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf X ist.
- (2) Welche Abzählbarkeitseigenschaften erfüllt (X, \mathcal{O}_d) ?

Übungen zu Abschnitt 1.e.

1.109. ÜBUNG. Betrachten Sie den obigen Raum $X = [0, 1]^2$.

(1) Geben Sie einen Homöomorphismus $X \rightarrow \prod_{i \in [0,1]} [0, 1]$ an.

(2) Geben Sie einen Homöomorphismus zu einem nichttrivialen topologischen Produkt an.

1.110. ÜBUNG. Sei (X, d_X) ein metrischer Raum mit Topologie \mathcal{O}_{d_X} , und sei $Y \subset X$ versehen mit der induzierten Metrik $d_Y = d|_{Y \times Y}$. Zeigen Sie, dass die von \mathcal{O}_{d_X} induzierte Unterraumtopologie \mathcal{O}_Y mit der metrischen Topologie \mathcal{O}_{d_Y} übereinstimmt.

1.111. ÜBUNG. Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, dann definieren wir eine Metrik $d_{X \times Y}$ auf dem kartesischen Produkt $X \times Y$ durch

$$d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}.$$

Zeigen Sie, dass die von \mathcal{O}_{d_X} und \mathcal{O}_{d_Y} induzierte Produkttopologie mit der metrischen Topologie $\mathcal{O}_{d_{X \times Y}}$ übereinstimmt.

1.112. ÜBUNG. Sei \mathbb{k} ein beliebiger Körper. Es seien V_i Vektorräume über \mathbb{k} für $i \in I$. Wir betrachten die direkte Summe und das

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i \in I} V_i &:= \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in V_i \text{ für alle } i \in I, \text{ fast alle } x_i = 0\} \\ \subset \prod_{i \in I} V_i &:= \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in V_i \text{ für alle } i \in I\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

- (1) Die direkte Summe ist ein Koproduct in $\mathcal{Vec}_{\mathbb{k}}$.
- (2) Das direkte Produkt ist ein Produkt in $\mathcal{Vec}_{\mathbb{k}}$.
- (3) Für die Dualräume gilt

$$\left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* = \prod_{i \in I} V_i^*.$$

1.113. ÜBUNG. Wir versehen \mathbb{R}, \mathbb{R}^2 und alle Unterräume mit der Standardtopologie. Welche der folgenden Abbildungen sind Einbettungen:

$$F: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2 \qquad F(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), \qquad (a)$$

$$G: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2 \qquad G(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t). \qquad (b)$$

$$H: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \qquad H(n) = \begin{cases} 0 & n = 0, \\ 1/n & \text{sonst.} \end{cases} \qquad (c)$$

1.114. ÜBUNG. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine überabzählbare Familie topologischer Räume mit $\#X_i > 1$ für alle $i \in I$. Zeigen Sie: dann besitzt $\prod_i (X_i, \mathcal{O}_i)$ nicht die erste Abzählbarkeitseigenschaft.

Übungen zu Abschnitt 1.f.

1.115. ÜBUNG. Seien $(X, \mathcal{O}), (Y, \mathcal{O})$ Hausdorff-Räume, X sei kompakt, und sei $F: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass dann auch $F(X) \subset Y$, versehen mit der Unterraumtopologie, kompakt ist.

1.116. ÜBUNG. Zeigen Sie: kompakte Räume sind normal, erfüllen also insbesondere (T4). Dazu zeigt am besten zuerst, dass kompakte Räume (T3) erfüllen.

Hinweis: Per Definitionem sind kompakte Räume Hausdorffsch.

1.117. ÜBUNG. Zeigen Sie: Wenn (Y, d) metrischer Raum und $(f_i: X \rightarrow Y)_i$ eine Folge stetiger Funktionen ist, dann konvergiert $(f_i)_i$ genau dann in der kompakt-offenen Topologie gegen $f \in C(X, Y)$, wenn (f_i) gleichmäßig auf Kompakta gegen f konvergiert.

Übungen zu Abschnitt 1.g.

1.118. ÜBUNG. Sei

$$X = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid x \neq 0 \right\} \cup (\{0\} \times [-1, 1]) \subset \mathbb{R}^2$$

versehen mit der von $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$ induzierten Unterraumtopologie.

- (1) Skizzieren Sie X .
- (2) Zeigen Sie, dass X zusammenhängend ist.
- (3) Bestimmen Sie die Wegzusammenhangskomponenten von X .

1.119. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Der Raum der rationalen Zahlen \mathbb{Q} ist total unzusammenhängend sowohl bezüglich der metrischen Topologie als auch bezüglich der p -adischen Topologien für alle Primzahlen p .
- (2) Der Raum $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{Z}})$ ist zusammenhängend.

1.120. ÜBUNG. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie topologischer Räume und $X = \prod_i (X_i, \mathcal{O}_i)$ ihr Produkt. Zeigen Sie, dass die Wegzusammenhangskomponente eines Punktes $(x_i)_{i \in I} \in X$ das Produkt der Wegzusammenhangskomponenten der Punkte $x_i \in X_i$ ist. Insbesondere ist X genau dann wegzusammenhängend, wenn alle X_i wegzusammenhängend sind.

Übungen zu Abschnitt 1.h.

1.121. ÜBUNG. Führen Sie den Beweis von Satz 1.72 (2) aus.

1.122. ÜBUNG. Seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume, sei $V \subset Y$, und sei $f: V \rightarrow X$ stetig bezüglich der Unterraumtopologie auf V . Zeigen Sie:

- (1) die Topologie \mathcal{O}_X ist genau die von der Verklebungstopologie auf $X \subset X \cup_f Y$ induzierte Unterraumtopologie;
- (2) wenn V abgeschlossen ist und X und Y beide (T1) erfüllen, dann gilt (T1) auch für $X \cup_f Y$.

1.123. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Sei X ein topologischer Raum und A in X abgeschlossen. Dann ist eine Teilmenge B von A genau dann in X abgeschlossen, wenn sie in A abgeschlossen ist.
- (2) Sei $X = A_1 \cup \dots \cup A_k$ Vereinigung abgeschlossener Teilmengen, dann ist B in X genau dann abgeschlossen, wenn alle $B \cap A_i$ in A_i abgeschlossen sind.
- (3) Das Argument in (2) funktioniert für eine beliebige lokal endliche Vereinigung: sei $X = \bigcup_{i \in I} A_i$, so dass alle A_i in X abgeschlossen sind, und so dass jeder Punkt eine Umgebung U besitzt mit $U \cap A_i = \emptyset$ für fast alle i . Dann ist B in X genau dann abgeschlossen, wenn alle $B \cap A_i$ abgeschlossen sind.
- (4) Sei X wie in Teil (2) beziehungsweise wie in Teil (3). Seien $f_i: A_i \rightarrow Y$ stetige Abbildungen mit $f_i|_{A_i \cap A_j} = f_j|_{A_i \cap A_j}$, dann gibt es genau eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ mit $f|_{A_i} = f_i$, und f ist stetig.

1.124. ÜBUNG. Sei $S^1 \subset \mathbb{C}$ der komplexe Einheitskreis, und sei $z = e^{i\varphi} \in S^1 \subset \mathbb{C}$. Wir betrachten auf S^1 die von $x \sim zx$ erzeugte Äquivalenzrelation, das heißt, $x \sim y$ genau dann, wenn $x/y = z^k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Bestimmen Sie die Quotiententopologie auf S^1/\sim , unterscheiden Sie die Fälle $\varphi \in 2\pi\mathbb{Q}$ und $\varphi \notin 2\pi\mathbb{Q}$.

1.125. ÜBUNG. Betrachten Sie auf \mathbb{R}^2 die Äquivalenzrelation

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \iff (y_1, y_2) = \left(rx_1, \frac{x_2}{r} \right) \text{ für ein } r \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- (1) Skizzieren Sie die Äquivalenzklassen im \mathbb{R}^2 .
- (2) Skizzieren Sie $X = \mathbb{R}^2 / \sim$.
- (3) Beschreiben Sie die Quotiententopologie auf X , z.B., indem Sie eine Basis angeben.

1.126. ÜBUNG. Betrachten Sie die in Aufgabe 1.125 definierte Äquivalenzrelation \sim auf \mathbb{R}^2 . Sei wie vorhin $X = \mathbb{R}^2 / \sim$, und sei $Y := (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) / \sim$.

- (1) Welche der Trennungseigenschaften (T0), (T1), (T3), (T4) erfüllt X ?
- (2) Zeigen Sie, dass Y zum Raum aus Beispiel 1.29 homöomorph ist.
- (3) Welche Trennungseigenschaften erfüllt Y ?

1.127. ÜBUNG. Sei (X, \mathcal{O}_X) ein normaler topologischer Raum, sei $f: X \rightarrow Y$ eine surjektive Abbildung, und sei \mathcal{O}_Y die Quotiententopologie auf Y . Zeigen Sie:

- (1) wenn Urbilder $f^{-1}(\{y\})$ von Punkten in Y abgeschlossen sind in X , gilt (T1) für (Y, \mathcal{O}_Y) ;
- (2) wenn f abgeschlossen ist, das heißt, wenn $f(A) \subset Y$ abgeschlossen ist für alle abgeschlossenen $A \subset X$, dann gilt (T4) für (Y, \mathcal{O}_Y) .

Wir haben also ein einfaches Kriterium dafür, wann Quotienten normaler Räume wiederum normal sind.

Übungen zu Abschnitt 1.i.

1.128. ÜBUNG. Seien (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) und (Z, \mathcal{O}_Z) topologische Räume mit stetigen Abbildungen

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{g} (Z, \mathcal{O}_Z).$$

- (1) Falls \mathcal{O}_Y die von g und \mathcal{O}_Z induzierte Topologie ist, und \mathcal{O}_X die von f und \mathcal{O}_Y induzierte Topologie ist, dann ist \mathcal{O}_X auch gleich der von $g \circ f$ und \mathcal{O}_Z induzierten Topologie.
- (2) Falls \mathcal{O}_Y die von f und \mathcal{O}_X koinduzierte Topologie ist, und \mathcal{O}_Z die von g und \mathcal{O}_Y koinduzierte Topologie ist, dann ist \mathcal{O}_Z auch gleich der von $g \circ f$ und \mathcal{O}_X koinduzierten Topologie.

1.129. ÜBUNG. Sei $\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder \mathbb{H} ein (Schief-)Körper, und sei $k = 1, 2$ oder $4 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{k}$, dann sei

$$(\mathbb{k}P^n, \mathcal{O}_{\mathbb{k}P^n}) = (\mathbb{k}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}) / \sim,$$

wobei $(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n)$ genau dann, wenn es ein $z \in \mathbb{k}^* = \mathbb{k} \setminus \{0\}$ gibt, so dass $y_i = zx_i$ für alle $i = 0, \dots, n$. Die Äquivalenzklasse von (x_0, \dots, x_n) wird auch als $[x_0 : \dots : x_n]$ geschrieben. Zeigen Sie, dass $\mathbb{k}P^n$, versehen mit der Quotiententopologie, eine kn -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie dazu, dass $\mathbb{k}P^n$ die Eigenschaften (T2) und (A2) besitzt, und konstruieren Sie Homöomorphismen von $U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\} \subset \mathbb{k}P^n$ nach $\mathbb{k}^n \cong \mathbb{R}^{nk}$.

1.130. ÜBUNG. Zeigen Sie, dass $\mathbb{k}P^m$ homöomorph zum Unterraum

$$\{[x_0 : \dots : x_m : 0 : \dots : 0] \mid (x_0, \dots, x_m) \in \mathbb{k}^{m+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}\} \subset \mathbb{k}P^n$$

ist für alle $0 \leq m \leq n$, und dass diese Unterräume gerade die abgeschlossenen Zellen eines CW-Komplexes mit je einer Zelle der Dimension $0, k, \dots, kn$ bilden. Versuchen Sie insbesondere, charakteristische Abbildungen $\Phi^{kj}: D^{kj} \rightarrow \mathbb{k}P^n$ anzugeben, und überprüfen Sie, dass die oben definierte Topologie mit der Topologie des so definierten CW-Komplexes übereinstimmt.

1.131. ÜBUNG. Wir definieren

$$\mathbb{k}P^\infty = \varinjlim \mathbb{k}P^n .$$

Sei \mathbb{k}^∞ der Vektorraum der endlichen \mathbb{k} -wertigen Folgen, und sei

$$Q = (\mathbb{k}^\infty \setminus \{0\}) / \sim \quad \text{mit „}\sim\text{“ wie oben.}$$

Zeigen Sie:

- (1) die natürliche Abbildung $F: \mathbb{k}P^\infty \rightarrow Q$ ist bijektiv;
- (2) sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{k}^∞ und sei \mathcal{O}_Q die dazugehörige Quotiententopologie auf Q , dann ist F stetig;
- (3) (*Zusatzaufgabe*) die Umkehrabbildung F^{-1} ist für keine Norm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{k}^∞ stetig.

1.132. ÜBUNG. Es seien X, Y zwei CW -Komplexe, dann bezeichne \mathcal{O}_\square die Produkttopologie auf $X \times Y$ und \mathcal{O}_{CW} die Topologie zur CW -Struktur aus Bemerkung 1.90.

- (1) Zeigen Sie, dass \mathcal{O}_{CW} stets feiner ist als \mathcal{O}_\square .
- (2) Folgern Sie aus Proposition 1.89, dass $\mathcal{O}_{CW} = \mathcal{O}_\square$ falls X und Y lokal kompakt sind.
- (3) Funktioniert das Argument in (2) auch, wenn nur einer der Räume lokal kompakt ist?

Fundamentalgruppe und Überlagerungen

Wir behandeln in diesem Kapitel die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes. Diese Gruppe lässt sich für geeignete topologische Räume X auf zweierlei Art definieren:

- (1) Als Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ der Homotopieklassen von Wegen $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ mit festem Anfangs- und Endpunkt $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \in X$, oder
- (2) Als Gruppe Γ , die auf einem einfach zusammenhängenden Raum \tilde{X} operiert, mit $X \cong \tilde{X}/\Gamma$.

2.1. BEISPIEL. Sei $X = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und sei $p = 1$.

- (1) Wir beschränken uns im folgenden auf stückweise glatte Wege. Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg mit $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$, dann erhalten wir die Umlaufzahl

$$\nu(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)} dt \in \mathbb{Z}.$$

In der Tat kann man zeigen, dass je zwei Wege in \mathbb{C}^* mit Anfangs- und Endpunkt $p = 1$ und der gleichen Umlaufzahl um 0 in \mathbb{C}^* (mit festgehaltenen Anfangs- und Endpunkten) homotop sind. Also ist $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \cong \mathbb{Z}$.

- (2) Betrachte die (leicht modifizierte) Exponentialabbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ mit $z \mapsto e^{2\pi i z}$, dann gilt

$$e^{2\pi i z_0} = e^{2\pi i z_1} \iff z_1 - z_0 \in \mathbb{Z}.$$

Wir können also \mathbb{C}^* als Quotient des einfach zusammenhängenden Raumes \mathbb{C} nach der Gruppe $\Gamma = \mathbb{Z}$ schreiben; dabei operiert \mathbb{Z} auf \mathbb{C} durch Addition, geometrisch also durch Verschiebungen.

Wir wollen ab sofort unter einem Raum immer einen topologischen Raum verstehen, und unter einer Abbildung, einer Funktion oder einem Weg immer eine stetige Abbildung, eine stetige Funktion, oder einen stetigen Weg.

2.a. Homotopien und Homotopieäquivalenz

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff der Homotopie von Abbildungen ein. Homotopien sind Wege im Raum der Abbildungen. Indem wir statt stetiger Abbildungen Äquivalenzklassen homotoper stetiger Abbildungen betrachten, können wir den Begriff des Homöomorphismus durch den wesentlich größeren Begriff der Homotopieäquivalenz ersetzen. Im Rest dieser Vorlesung lernen wir Methoden kennen, um nicht homotope Abbildungen oder nicht homotopieäquivalente Räume voneinander zu unterscheiden.

Ab sofort geben wir die Topologien nicht mehr an, wenn es nicht unbedingt nötig ist. Falls nicht anders angegeben, seien Abbildungen zwischen topologischen Räumen immer stetig.

2.2. DEFINITION. Seien X, Y topologische Räume. Zwei Abbildungen $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ heißen *homotop*, kurz $f_0 \sim f_1$, wenn es eine bezüglich der Produkttopologie stetige Abbildung $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ mit $H(x, t) = f_t(x)$ für $t \in \{0, 1\}$ gibt. Dann heißt H eine *Homotopie* zwischen f_0

und f_1 , und wir schreiben $H_t = H(\circ, t): X \cong X \times \{t\} \rightarrow Y$ für alle $t \in [0, 1]$. Die Menge aller zu f homotopen Abbildungen heißt die (*freie*) Homotopieklassse von f und wird mit $[f]$ bezeichnet.

2.3. BEMERKUNG. (1) Homotopie ist eine Äquivalenzrelation (Übung 2.74), und ihre Äquivalenzklassen sind gerade Homotopieklassen.

(2) Homotopie ist verträglich mit Hintereinanderschalten von Abbildungen:

$$(f_0 \sim f_1: Y \rightarrow Z \quad \text{und} \quad g_0 \sim g_1: X \rightarrow Y) \quad \implies \quad (f_0 \circ g_0) \sim (f_1 \circ g_1): X \rightarrow Z .$$

2.4. DEFINITION. Seien X, Y topologische Räume. Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt *Homotopieäquivalenz*, wenn es eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow X$ gibt, so dass

$$g \circ f \sim \text{id}_X: X \rightarrow X \quad \text{und} \quad f \circ g \sim \text{id}_Y: Y \rightarrow Y .$$

In diesem Fall heißen X und Y *homotopieäquivalent*, und g heißt ein *Homotopieinverses* zu f .

2.5. BEISPIEL. Ein Raum X ist genau dann zum einpunktigen Raum $Y = \{*\}$ homotopieäquivalent, wenn er zusammenziehbar ist. Sei dazu $f: X \rightarrow Y$ die offensichtliche Abbildung, und sei $g: Y \rightarrow X$ gegeben mit $g(*) = x_0 \in X$. Dann ist $f \circ g = \text{id}_Y$, und eine Homotopie zwischen id_X und $g \circ f$ ist gerade eine Abbildung $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ wie in Definition 1.91.

2.6. BEMERKUNG. (1) Jeder Homöomorphismus f ist insbesondere eine Homotopieäquivalenz mit $g = f^{-1}$.

(2) Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation (Übung 2.75).

(3) Betrachte die *Homotopie-Kategorie* \mathcal{HTop} mit

$$\begin{aligned} \text{Obj}(\mathcal{HTop}) &= \{ \text{topologische Räume} \} , \\ \text{Hom}_{\mathcal{HTop}}(X, Y) &= \{ \text{stetige Abbildungen} \} / \sim . \end{aligned}$$

Die Identität auf X im Sinne von Definition 1.20 (3) ist die Homotopieklassse der Abbildung id_X . Die Verkettung von Homotopieklassen ist nach Bemerkung 2.3 (2) wohldefiniert.

Ein Morphismus $f: X \rightarrow Y$ in einer Kategorie \mathcal{C} heißt invertierbar oder *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $g: Y \rightarrow X$ (ein *Inverses*) gibt, so dass

$$g \circ f = \text{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g = \text{id}_Y .$$

Beispiele sind Bijektionen in \mathcal{Set} , Gruppenisomorphismen in \mathcal{Grp} , lineare Isomorphismen in $\mathcal{Vec}_{\mathbb{K}}$, und natürlich Homöomorphismen in \mathcal{Top} . Nach obiger Definition sind Homotopieäquivalenzen gerade die Isomorphismen in \mathcal{HTop} .

Algebraische Topologie versucht als erstes Ziel, gewisse Klassen von Räumen bis auf Homotopieäquivalenz zu unterscheiden.

Oftmals ist freie Homotopie ein etwas zu grober Begriff. Beispielsweise ist ein Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ immer homotop zur konstanten Abbildung auf seinen Anfangspunkt.

2.7. DEFINITION. Ein *Paar topologischer Räume*, kurz *Paar*, besteht aus einem topologischen Raum X und einer beliebigen Teilmenge $A \subset X$. Eine *Abbildung* $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ von *Paaren* ist eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ mit $f(A) \subset B$. Ein *punktierter (topologischer) Raum* (X, x_0) ist ein Paar $(X, \{x_0\})$ mit $x_0 \in X$. Der Punkt x_0 heißt auch *Basispunkt*. Eine *punktierte Abbildung* $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ist eine Abbildung der entsprechenden Paare, es gilt also $f(x_0) = y_0$.

2.8. DEFINITION. Es seien (X, A) und (Y, B) Paare. Zwei Abbildungen $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ heißen *homotop relativ zu A*, wenn es eine Homotopie $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ zwischen f und $g: X \rightarrow Y$ gibt mit

$$H(a, t) = f(a) = g(a) \quad \text{für alle } a \in A \text{ und alle } t \in [0, 1] .$$

Wir sprechen manchmal von Homotopien relativ zu A , ohne eine Teilmenge $B \subset Y$ festzulegen. In diesem Fall können wir formal jede beliebige Teilmenge $f(A) \subset B \subset Y$ zulassen. Diese spielt aber keine weitere Rolle.

Der Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ mit $\gamma(t) = e^{2\pi it}$ ist in \mathbb{C}^* frei homotop zu einem konstanten Weg vermöge

$$H(t, s) = e^{2\pi i(1-s)t}.$$

Wir werden aber bald sehen, dass γ nicht relativ zu $\{0, 1\}$ (also relativ zu den Endpunkten) homotop zum konstanten Weg ist.

2.9. BEMERKUNG. Wir erinnern uns an die kompakt-offene Topologie aus Definition 1.59.

- (1) Wie in Satz 1.60 gehört zu jeder Homotopie $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ zwischen $f, g: X \rightarrow Y$ ein stetiger Weg $h: [0, 1] \rightarrow (C(X, Y), \mathcal{O}_{ko})$ von f nach g mit

$$(h(s))(x) = H_s(x) = H(x, s)$$

für alle $x \in X, s \in [0, 1]$. Wenn X lokal kompakt ist, liefert jeder solche Weg umgekehrt eine Homotopie. In diesem Fall sind Wegzusammenhangskomponenten in $C(X, Y)$ also gerade Homotopieklassen von Abbildungen von X nach Y .

- (2) Sei jetzt $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge und $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, dann betrachte die Teilmenge

$$C_{f|A}(X, Y) = \{g \in C(X, Y) \mid g|_A = f|_A\} \subset C(X, Y),$$

dann liefert eine Homotopie relativ zu A einen Weg in $C_{f|A}(X, Y)$ wie oben. Wenn X lokal kompakt ist, gehört wie oben zu jedem Weg in $C_{f|A}(X, Y)$ eine relative Homotopie. Das folgt aus (1), indem man $C_{f|A}(X, Y)$ mit der Unterraumtopologie versieht und deren charakterisierende Eigenschaft ausnutzt.

Zum Schluss geben wir ein Beispiel, dass Homotopieäquivalenzen mitunter nicht so offensichtlich sind, wie sie erscheinen.

2.10. DEFINITION. Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X heißt *Retrakt von X* , wenn es eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow A$ mit $f|_A = \text{id}_A$ gibt. Sie heißt *Deformationsretrakt*, wenn zusätzlich $\iota \circ f: X \rightarrow X$ homotop zur Identität id_X ist, und *starker Deformationsretrakt*, wenn die Homotopie zwischen $\iota \circ f$ und id_X sogar relativ zu A gewählt werden kann.

- 2.11. BEISPIEL. (1) Jede einpunktige Menge $\{p\} \subset X$ ist Retrakt von X , aber nur dann Deformationsretrakt, wenn X zusammenziehbar ist. Beispielsweise ist $\{1\} \subset \mathbb{C}^*$ kein Deformationsretrakt (Beweis später).

- (2) Der Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ ist ein starker Deformationsretrakt von \mathbb{C}^* mit

$$f(z) = \frac{z}{|z|} \quad \text{und} \quad H(z, s) = \frac{z}{|z|^s}.$$

Er ist aber kein Retrakt von ganz \mathbb{C} (Beweis später).

Das folgende Beispiel soll zeigen, dass man sich nicht jede Deformationsretraktion vorstellen kann.

2.12. BEISPIEL. Bings „Haus mit zwei Zimmern“ kann man basteln, indem man zwei leere Dosen mit den Unterseiten aneinanderklebt. Dann bohrt man von jeder Seite durch einen Deckel und die gemeinsamen Unterseiten je ein Loch am Rand, und klebt je einen passenden Zylinder zwischen ein Deckel- und ein Unterseitenloch so ein, dass dieser auf seiner vollen Länge den jeweiligen Dosenrand berührt (Abbildung 2.1, linkes Bild). Man kann jetzt durch das Loch in der einen Dose in das „Zimmer“ in der anderen Dose gelangen und umgekehrt.

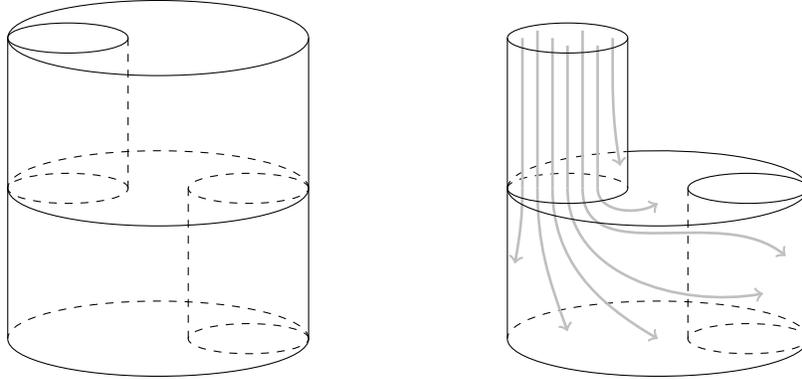


ABBILDUNG 2.1. Bings Haus mit zwei Räumen

Man überzeugt sich, dass Bings Haus ein starker Deformationsretrakt einer vollen Dose ist (Abbildung 2.1, rechtes Bild), genau wie ein Punkt in der Dose. Da Homotopieäquivalenz transitiv ist, ist Bings Haus zusammenziehbar. Die zugehörige Deformationsretraktion kann man sich aber kaum vorstellen.

2.b. Die Fundamentalgruppe

Die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes misst, wieviele Typen von nichtzusammenziehbaren Schleifen es in einem topologischen Raum gibt. Beispielsweise ist ein Fahrrad dann sicher an einem Gitter angeschlossen, wenn das Fahrradschloss sowohl im umgebenden Raum ohne Gitter, als auch im umgebenden Raum ohne Fahrrad nicht zusammenziehbar ist. Wir definieren hier die Fundamentalgruppe und geben erste Eigenschaften an. Für Anwendungen benötigen wir einige Techniken, die wir in den nächsten Abschnitten kennenlernen werden.

2.13. DEFINITION. Es sei (X, x) ein punktierter topologischer Raum. Eine *Schleife* in (X, x) ist ein Weg von x nach x , also eine Abbildung $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Seien γ_1, γ_2 zwei Schleifen in (X, x) , dann ist ihre *Verkettung* die Schleife $\gamma_1\gamma_2: [0, 1] \rightarrow X$ mit

$$(\gamma_1\gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Die *Fundamentalgruppe* $\pi_1(X, x)$ ist die Menge aller Schleifen in (X, x) modulo Homotopie relativ zu $\{0, 1\}$.

Bei der Verkettung werden also beide Schleifen nacheinander mit doppelter Geschwindigkeit durchlaufen. Wir benutzen Übung 1.123 um zu sehen, dass die Verkettung wieder stetig ist.

Homotopie relativ zu $\{0, 1\}$ bedeutet für Schleifen soviel wie Homotopie bei festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt. Insbesondere gilt für eine solche Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 , dass

$$\begin{aligned} H(0, s) = H(1, s) = x & \quad \text{für alle } s \in [0, 1], \text{ und} \\ H(t, s) = \gamma_s(t) & \quad \text{für alle } t \in [0, 1] \text{ und alle } s \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

2.14. SATZ. $\pi_1(X, x)$ bildet mit der Verkettung eine Gruppe. Das neutrale Element und das Inverse zu $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$ werden repräsentiert durch *e* beziehungsweise $\bar{\gamma}: [0, 1] \rightarrow X$, mit

$$e(t) = x \quad \text{und} \quad \bar{\gamma}(t) = \gamma(1 - t) \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

BEWEIS. Hier ist einiges zu zeigen: zunächst die Wohldefiniertheit der Verkettung relativer Homotopieklassen, dann die Gruppenaxiome.

Seien H_1 und $H_2: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ relative Homotopien zwischen den Schleifen α_0 und α_1 beziehungsweise zwischen β_0 und β_1 . Wir verketten die Homotopien und erhalten

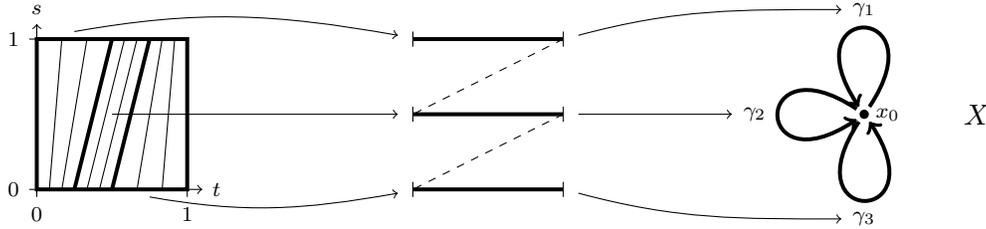
$$H = \begin{cases} H_1(2t, s) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ H_2(2t - 1, s) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Dann ist H eine Homotopie zwischen $\alpha_0\beta_0$ und $\alpha_1\beta_1$ relativ zu $\{0, 1\}$, also ist die Verkettung mit relativer Homotopie verträglich, und damit als Verknüpfung auf $\pi_1(X, x)$ wohldefiniert.

Zur Assoziativität überlegen wir uns, dass

$$\begin{aligned} ((\gamma_1\gamma_2)\gamma_3)(t) &= \begin{cases} \gamma_1(4t) & 0 \leq t \leq 1/4, \\ \gamma_2(4t - 1) & 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ \gamma_3(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1; \end{cases} \\ (\gamma_1(\gamma_2\gamma_3))(t) &= \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \gamma_2(4t - 2) & 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ \gamma_3(4t - 3) & 3/4 \leq t \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Also konstruieren wir eine Homotopie zwischen $(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$ und $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$ wie im folgenden Bild,



also in Formeln als

$$H(s, t) = \begin{cases} \gamma_1(4t/(1+s)) & 0 \leq t \leq (1+s)/4, \\ \gamma_2(4t - (1+s)) & (1+s)/4 \leq t \leq (2+s)/4, \\ \gamma_3(1 - 4(1-t)/(2-s)) & (2+s)/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Um zu zeigen, dass $[e]$ ein linksneutrales Element ist, konstruieren wir ähnlich wie oben eine relative Homotopie zwischen $e\gamma$ und γ für eine beliebige Schleife γ . Schließlich überprüfen wir, dass $[\bar{\gamma}]$ nur von $[\gamma]$ abhängt und zu $[\gamma]$ linksinversiv ist. Dazu konstruieren wir eine Homotopie

$$H(t, s) = \begin{cases} \gamma(1 - 2st) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ \gamma(1 - 2s(1 - t)) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

zwischen e und $\bar{\gamma}\gamma$. Damit haben wir die Gruppenaxiome für $\pi_1(X, x)$ nachgewiesen.

Insbesondere folgt, dass $[e]$ das eindeutige, beidseitige neutrale Element und $[\bar{\gamma}]$ das eindeutige, beidseitige Inverse zu $[\gamma]$ ist. \square

Wir werden später etwas nachlässig sein und manchmal γ statt $[\gamma]$ schreiben.

2.15. SATZ. *Sei X ein Raum, $x, y \in X$. Jede Homotopieklasse von Wegen von x nach y induziert einen Isomorphismus von $\pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y)$. Insbesondere hängt der Isomorphismustyp der Gruppe $\pi_1(X, x)$ nicht vom Basispunkt x ab, wenn X wegzusammenhängend ist.*

BEWEIS von Satz 2.15. Sei $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg von x nach y , dann betrachte die Abbildung

$$\pi_1(X, x) \ni \gamma \mapsto \bar{\alpha}\gamma\alpha \in \pi_1(X, y).$$

Wie im obigen Beweis sieht man, dass $[\bar{\alpha}\gamma\alpha]$ weder von der Klammerung noch von den relativen Homotopieklassen von α und γ abhängt. Es handelt sich um einen Homomorphismus, da

$$(\bar{\alpha}\gamma_1\alpha)(\bar{\alpha}\gamma_2\alpha) \sim (\bar{\alpha}\gamma_1)(\alpha\bar{\alpha})(\gamma_2\alpha) \sim (\bar{\alpha}\gamma_1)e(\gamma_2\alpha) \sim (\bar{\alpha}\gamma_1)(\gamma_2\alpha) \sim \bar{\alpha}(\gamma_1\gamma_2)\alpha .$$

Der inverse Gruppenhomomorphismus wird analog von $\bar{\alpha}$ induziert, denn $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$ und

$$\alpha(\bar{\alpha}\gamma\alpha)\bar{\alpha} \sim (\alpha\bar{\alpha})\gamma(\alpha\bar{\alpha}) \sim e\gamma e \sim \gamma . \quad \square$$

Man schreibt daher manchmal $\pi_1(X)$, wenn X wegzusammenhängend ist und es nur auf den Isomorphietyp der Gruppe $\pi_1(X, x)$ ankommt, aber nicht auf die einzelnen Elemente.

2.16. BEMERKUNG. Für $x = y$ gehört also zu jedem $\alpha \in \pi_1(X, x)$ ein Automorphismus von $\pi_1(X, x)$. In diesem Fall handelt es sich um den inneren Automorphismus

$$\gamma \longmapsto \bar{\alpha}\gamma\alpha .$$

Dies zeigt: Wenn $\pi_1(X, x)$ nicht kommutativ ist, kann man nicht von den Elementen von $\pi_1(X)$ sprechen, ohne einen Fußpunkt zu fixieren.

2.17. BEMERKUNG. Es sei (X, x) ein punktierter topologischer Raum. Dann definieren wir den Pfadraum PX , den freien Schleifenraum LX und den (punktierten) Schleifenraum $\Omega(X, x)$ durch

$$\begin{aligned} PX &= (C([0, 1], X), \mathcal{O}_{\text{ko}}) , \\ LX &= \{\gamma \in PX \mid \gamma(0) = \gamma(1)\} \subset PX , \\ \text{und } \Omega(X, x) &= \{\gamma \in LX \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x\} \subset LX , \end{aligned}$$

wobei LX und $\Omega(X, x)$ die von PX induzierte Unterraumtopologie tragen.

- (1) Da $[0, 1]$ kompakt ist, sind relative Homotopien von Schleifen in (X, x) nach Bemerkung 2.9 (2) gerade Wege in $\Omega(X, x)$. Also entspricht $\pi_1(X, x)$ gerade der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von $\Omega(X, x)$, kurz

$$\pi_1(X, x) = \pi_0(\Omega(X, x)) .$$

- (2) Falls X wegzusammenhängend ist, hat LX gerade die Wegzusammenhangskomponenten

$$\pi_0(LX) = \pi_1(X, x)^{\text{ab}} ,$$

da wir nach Bemerkung 2.16 die Elemente γ und $\alpha^{-1}\gamma\alpha$ identifizieren müssen. Hierbei bezeichnet G^{ab} die *Abelisierung*

$$G^{\text{ab}} = G/[G, G]$$

der Gruppe G , die dadurch entsteht, dass alle Kommutatoren $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ mit dem neutralen Element gleichgesetzt werden. Die Abelisierung ist der größte abelsche Quotient von G .

- (3) Analog zu (1) kann man höhere Homotopiegruppen induktiv für $k \geq 2$ durch

$$\pi_k(X, x) = \pi_{k-1}(\Omega(X, x), e_x)$$

definieren. Dabei bezeichnet e_x wie in Satz 2.14 die konstante Schleife im Punkt x . Man sieht hier aber beispielsweise nicht, dass alle $\pi_k(X, x)$ für $k \geq 2$ abelsch sind.

So, wie man in einer Kategorie nicht nur Objekte betrachtet, sondern immer auch Morphismen, betrachtet man nicht nur Kategorien für sich, sondern auch „Abbildungen“ zwischen ihnen. Dabei muss man vorsichtig sein, da Abbildungen im strengen Sinne nur zwischen Mengen, aber nicht zwischen Klassen definiert sind.

2.18. DEFINITION. Es seien \mathcal{A} und \mathcal{B} zwei Kategorien. Ein (*kovarianter*) *Funktor* $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ordnet jedem Objekt $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ ein Objekt $\mathcal{F}A \in \text{Obj}(\mathcal{B})$ und jedem Morphismus $F \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ einen Morphismus $\mathcal{F}F \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$ zu, so dass

$$\mathcal{F} \text{id}_A = \text{id}_{\mathcal{F}A}, \quad (1)$$

$$\mathcal{F}(F \circ G) = \mathcal{F}F \circ \mathcal{F}G \quad (2)$$

für alle $A, B, C \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ und alle $F \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, C)$, $G \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$.

2.19. DEFINITION. Wir betrachten die Kategorien \mathcal{Top}_+ (und \mathcal{HTop}_+) der punktierten topologischen Räume und der (relativen Homotopieklassen von) stetigen Abbildungen mit

$$\text{Obj}(\mathcal{Top}_+) = \text{Obj}(\mathcal{HTop}_+) = \{ (X, x) \mid X \in \text{Obj}(\mathcal{Top}) \text{ und } x \in X \},$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{Top}_+}((X, x), (Y, y)) = \{ F: X \rightarrow Y \mid F \in \text{Hom}_{\mathcal{Top}}(X, Y) \text{ und } F(x) = y \}$$

$$\text{und } \text{Hom}_{\mathcal{HTop}_+}((X, x), (Y, y)) = \text{Hom}_{\mathcal{Top}_+}((X, x), (Y, y)) / \sim,$$

wobei \sim hier Homotopie relativ zum Basispunkt bezeichnet. Die Identität auf (X, x) ist die (relative Homotopieklasse der) Abbildung $\text{id}_{(X, x)}$, und die Verkettung ist die Hintereinanderausführung.

Später werden wir die Klasse der Objekte in \mathcal{HTop}_+ etwas einschränken, siehe Beispiel 4.64 (2).

2.20. BEISPIEL. Durch Vergessen der Basispunkte und Übergang zu (relativen) Homotopieklassen von Abbildungen erhalten wir ein kommutatives Diagramm von Funktoren

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Top}_+ & \longrightarrow & \mathcal{HTop}_+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{Top} & \longrightarrow & \mathcal{HTop} \end{array}$$

2.21. SATZ. *Die Fundamentalgruppe ist ein Funktor*

$$\pi_1: \mathcal{Top}_+ \rightarrow \mathcal{Grp}$$

von der Kategorie der punktierten topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen. Dabei wird (X, x) auf $\pi_1(X, x)$ und $F: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ auf $F_* = \pi_1 F: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ abgebildet mit

$$F_*[\gamma] = [F \circ \gamma] \in \pi_1(Y, y) \quad \text{für alle } [\gamma] \in \pi_1(X, x).$$

Dieser Funktor ist auch auf \mathcal{HTop}_+ wohldefiniert.

BEWEIS. Sei $F: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ eine stetige punktierte Abbildung. Als erstes zeigen wir, dass $\pi_1 F = F_*$ ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist. Sei H eine relative Homotopie zwischen $\gamma_0, \gamma_1: ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (X, x)$, dann ist die Abbildung $F \circ H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine relative Homotopie zwischen $F \circ \gamma_0$ und $F \circ \gamma_1$, also ist F_* wohldefiniert.

Seien γ_1, γ_2 zwei Schleifen in (X, x) . Dann folgt

$$(F \circ \gamma_1)(F \circ \gamma_2) = F \circ (\gamma_1 \gamma_2)$$

direkt aus Definition 2.13, also ist F_* ein Gruppenhomomorphismus.

Als nächstes überprüfen wir, dass π_1 die beiden Eigenschaften aus Definition 2.18 erfüllt. Da $\text{id}_X \circ \gamma = \gamma$, gilt offensichtlich (1), also

$$(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x)}.$$

Seien $F: (Y, y) \rightarrow (Z, z)$ und $G: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ punktierte Abbildungen. Dann folgt (2), da

$$(F \circ G)_*[\gamma] = [(F \circ G) \circ \gamma] = [F \circ (G \circ \gamma)] = F_*(G_*[\gamma]).$$

Um zu zeigen, dass π_1 auch auf \mathcal{HTop}_+ wohldefiniert ist, müssen wir nur überprüfen, dass F_* nur von der relativen Homotopieklasse von F abhängt. Sei also $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine relative Homotopie zwischen F_0 und $F_1: (X, x) \rightarrow (Y, y)$, dann ist die Abbildung $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$ mit

$$(t, s) \mapsto H(\gamma(t), s)$$

eine relative Homotopie zwischen $F_{0*}\gamma$ und $F_{1*}\gamma$. □

Wir können den Funktor $\pi_1: \mathcal{Top}_+ \rightarrow \mathcal{Grp}$ also in zwei Funktoren

$$\mathcal{Top}_+ \longrightarrow \mathcal{HTop}_+ \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{Grp},$$

zerlegen, dabei ist der erste Funktor der gleiche wie in Beispiel 2.20.

Wegen Bemerkung 2.16 dürfen wir jedoch auf keinen Fall den Basispunkt vergessen, wir erhalten also keinen Funktor $\mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{Grp}$. Später werden uns Homologie und Kohomologie solche Funktoren (mit Werten in abelschen Gruppen) liefern.

2.22. FOLGERUNG. *Seien $(X, x), (Y, y)$ homotopieäquivalente Paare topologischer Räume, dann ist $\pi_1(X, x)$ isomorph zu $\pi_1(Y, y)$.*

BEWEIS. Sei $F: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ homotopieinvers zu $G: (Y, y) \rightarrow (X, x)$, dann folgt aus Funktorialität, dass

$$G_* \circ F_* = \text{id}_{\pi_1(X, x)} \quad \text{und} \quad F_* \circ G_* = \text{id}_{\pi_1(Y, y)}.$$

Also sind F_* und G_* zueinander inverse Gruppenisomorphismen. □

Mit dem gleichen Argument sieht man, dass Funktoren stets Isomorphismen auf Isomorphismen abbilden.

2.23. DEFINITION. Ein topologischer Raum heißt *einfach zusammenhängend*, wenn er wegzusammenhängend ist mit $\pi_1(X) = \{e\}$.

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass der Isomphietyp von $\pi_1(X, x)$ nach Satz 2.15 nicht vom Basispunkt $x \in X$ abhängt. In Übung 2.77 lernen Sie andere Charakterisierungen einfach zusammenhängender Räume kennen.

- 2.24. BEISPIEL.**
- (1) Der einpunktige Raum $\{*\}$ ist einfach zusammenhängend, da es nur die konstante Schleife $t \mapsto *$ gibt.
 - (2) Sei X zusammenziehbar, dann ist X nach Beispiel 2.5 zu $\{*\}$ homotopieäquivalent, also folgt $\pi_1(X) = \{e\}$. Nach Bemerkung 1.92 (3) sind zusammenziehbare Räume insbesondere wegzusammenhängend, also ist X auch einfach zusammenhängend.

2.c. Die Fundamentalgruppe der S^1

In diesem Abschnitt rechnen wir unsere erste Fundamentalgruppe aus, und zwar „von Hand“. Anschließend beweisen wir den Brouwerschen Fixpunktsatz und den Satz von Borsuk-Ulam als Anwendungen davon.

Wir fassen S^1 als Teilmenge von \mathbb{C} (mit der Unterraumtopologie) auf. Um $\pi_1(S^1, 1)$ zu berechnen, brauchen wir den Begriff der Überlagerung.

2.25. DEFINITION. Eine Abbildung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ heißt *Überlagerung*, wenn es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U von x und eine Menge M mit diskreter Topologie gibt, so dass

$$\begin{array}{ccccc} U \times M & \cong & p^{-1}(U) & \hookrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & = & U & \hookrightarrow & X \end{array} .$$

Wir nennen dann U *gleichmäßig überlagert*. Eine Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ heißt *universell*, wenn \tilde{X} zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist.

2.26. BEISPIEL. Betrachte die modifizierte komplexe Exponentialabbildung $p = e^{2\pi i \cdot}: \mathbb{R} \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$. Diese Abbildung ist eine Überlagerung, denn jeder Punkt $z = e^{2\pi i \varphi} \in S^1$ hat eine gleichmäßig überlagerte Umgebung $S^1 \setminus \{-z\}$, da

$$p^{-1}(S^1 \setminus \{-z\}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\varphi + n - \frac{1}{2}, \varphi + n + \frac{1}{2} \right) \cong \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \times \mathbb{Z}.$$

Da \mathbb{R} zusammenziehbar ist, ist $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ nach Definition 2.25 eine universelle Überlagerung.

2.27. SATZ (Homotopie-Liftungssatz). Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, und seien $\tilde{F}: Y \rightarrow \tilde{X}$ und $H: Y \times [0, 1] \rightarrow X$ stetig mit

$$H(\cdot, 0) = p \circ \tilde{F}: Y \rightarrow X,$$

dann existiert genau eine stetige Abbildung $\tilde{H}: Y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ mit

$$p \circ \tilde{H} = H \quad \text{und} \quad \tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{F}: Y \rightarrow \tilde{X}.$$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\tilde{F}} & \tilde{X} \\ \times\{0\} \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ Y \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

Wir nennen \tilde{H} einen Lift der Homotopie H mit Startwert \tilde{F} .

BEWEIS. Idee: Lokale Existenz und Eindeutigkeit liefern globale Existenz und Eindeutigkeit.

Zur lokalen Existenz von Lifts fixiere $y \in Y$. Zu jedem $s \in [0, 1]$ existiert eine gleichmäßig überlagerte Umgebung U_s von $H(y, s) \in X$, ein offenes Teilintervall $I_s \subset [0, 1]$ mit $s \in I_s$ und eine offene Umgebung $V_s \subset Y$ von y mit $H(V_s \times I_s) \subset U_s$. Endlich viele solche Intervalle I_s überdecken $[0, 1]$, da $[0, 1]$ kompakt ist. Also existieren $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$, gleichmäßig überlagerte U_i und Umgebungen V_i von y mit

$$H(V_i \times [t_{i-1}, t_i]) \subset U_i.$$

Wir konstruieren induktiv Umgebungen W_i von y und Lifts \tilde{H}_i von $H|_{W_i \times [0, t_i]}$. Setze dazu zunächst $W_0 = Y$ und $\tilde{H}_0(\cdot, 0) = \tilde{F}$. Sei jetzt eine offene Umgebung W_{i-1} von y und ein Lift \tilde{H}_{i-1} von $H|_{W_{i-1} \times [0, t_{i-1}]}$ bereits konstruiert. Betrachte die stetige Abbildung

$$f_i: W_{i-1} \cap V_i \xrightarrow{\tilde{H}_{i-1}(\cdot, t_{i-1})} p^{-1}(U_i) = U_i \times M_i \longrightarrow M_i,$$

und sei $m_i = f_i(y) \in M_i$. Da M_i die diskrete Topologie trägt, ist $\{m_i\} \subset M_i$ offen, also ist

$$W_i = f_i^{-1}(m_i) \subset W_{i-1} \cap V_i$$

eine offene Umgebung von y . Für $w \in W_i$ setze

$$\tilde{H}_i(w, s) = \begin{cases} \tilde{H}_{i-1}(w, s) & 0 \leq s \leq t_{i-1}, \\ (H(w, s), m_i) \in U_i \times M_i \subset \tilde{X} & t_{i-1} \leq s \leq t_i. \end{cases}$$

Dann ist \tilde{H}_i auf beiden Teilbereichen stetig und stimmt auf dem Durchschnitt überein, ist also insgesamt stetig. Setze schließlich $W_y = W_k$ und erhalte einen Lift

$$\tilde{H}_y: W_y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X} \quad \text{von} \quad H|_{W_y \times [0, 1]}.$$

Außerdem ist das die einzige mögliche Wahl von $\tilde{H}_i: W_i \times [0, t_i] \rightarrow \tilde{X}$. Wenn die Eindeutigkeit auf $W_{i-1} \times [0, t_{i-1}]$ bereits induktiv gezeigt ist, erzwingen für alle $y' \in W_i$ Liftungseigenschaft sowie die Stetigkeit der Abbildung

$$[t_{i-1}, t_i] \xrightarrow{\tilde{H}_i(y', \cdot)} p^{-1}(U_i) = U_i \times M_i \longrightarrow M_i$$

unsere Wahl von $\tilde{H}(y', s)$ für $s \in [t_{i-1}, t_i]$, denn eine stetige Funktion in einen diskreten Raum ist lokal konstant.

Schließlich ist $\tilde{H}_y = \tilde{H}_k: W_y \times [0, 1] = W_k \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ ein stetiger Lift von $H|_{W_y \times [0, 1]}$ mit $\tilde{H}(y', 0) = \tilde{F}(y')$ für alle $y' \in W_y$. Seien y, y' gegeben, dann folgt

$$\tilde{H}_y|_{(W_y \cap W_{y'}) \times [0, 1]} = \tilde{H}_{y'}|_{(W_y \cap W_{y'}) \times [0, 1]}$$

aus unser obigen lokalen Eindeutigkeitsüberlegung.

Somit können wir alle lokalen Lifts $\tilde{H}_y: W_y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ zu einer globalen Abbildung \tilde{H} zusammensetzen. Die Stetigkeit von \tilde{H} folgt, da \tilde{H} nahe (y, s) mit \tilde{H}_y übereinstimmt und \tilde{H}_y nach Konstruktion bei (y, s) stetig ist. \square

2.28. SATZ. *Es gilt $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$, wobei $[\text{id}_{S^1}]$ der $1 \in \mathbb{Z}$ entspricht.*

BEWEIS. Wir betrachten die Überlagerung $p = e^{2\pi i \cdot}: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ aus Beispiel 2.26. Wir fassen $\gamma \in \pi_1(S^1, 1)$ als Homotopie H von Abbildungen von $Y = \{*\}$ nach S^1 mit $H(*, s) = \gamma(s)$ auf. Es sei $\tilde{F}(*) = 0 \in \mathbb{Z}$ ein Lift von $H(*, 0) = 1$, dann existiert nach Satz 2.27 ein Lift $\tilde{\gamma}(s) = \tilde{H}(*, s)$, und es folgt $\tilde{\gamma}(1) \in p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$.

Seien γ_0 und γ_1 relativ homotope Schleifen in $(S^1, 1)$ mit Lifts $\tilde{\gamma}_0$ und $\tilde{\gamma}_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Wir fassen eine relative Homotopie H zwischen γ_0 und γ_1 als Homotopie $K(s, t) = H(t, s)$ von der konstanten Abbildung $s \mapsto 1$ zu sich selbst auf. Dann lässt sich K nach Satz 2.27 zu einer Homotopie \tilde{K} liften, wobei $\tilde{K}(s, t) = \tilde{\gamma}_s(t)$ für $s \in \{0, 1\}$ aufgrund der Eindeutigkeit der Lifts $\tilde{\gamma}_i$. Wir erhalten also eine Homotopie $\tilde{H}(t, s) = \tilde{K}(s, t)$ zwischen $\tilde{\gamma}_0$ und $\tilde{\gamma}_1$. Da $s \mapsto \tilde{H}(1, s)$ die konstante Abbildung $H(1, s) = 1 \in S^1$ liftet, erhalten wir eine relative Homotopie zwischen Wegen, die bei $0 \in \mathbb{R}$ beginnen. Insbesondere folgt $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1) \in \mathbb{Z}$. Also erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung

$$\Phi: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad \Phi([\gamma]) = \tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z} \quad \text{für } \tilde{\gamma} \text{ wie oben.}$$

Ein Lift von $\gamma_1 \gamma_2$ ist

$$\widetilde{\gamma_1 \gamma_2} = \begin{cases} \tilde{\gamma}_1(2t) & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \tilde{\gamma}_1(1) + \tilde{\gamma}_2(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

dabei nutzen wir aus, dass für jede Zahl $n \in \mathbb{Z}$ die Abbildung $t \mapsto \tilde{\gamma}(t) + n$ ein Lift von γ ist, wenn $\tilde{\gamma}$ ein Lift ist, da

$$e^{2\pi i(\tilde{\gamma}(t)+n)} = e^{2\pi i\tilde{\gamma}(t)} \cdot e^{2\pi in} = \gamma(t) \cdot 1.$$

Also ist Φ ein Gruppenhomomorphismus. Man kann sich durch Nachrechnen überzeugen, dass γ dabei gerade auf die Umlaufzahl $\nu_{(\gamma, 0)}$ aus Beispiel 2.1 (1) abgebildet wird.

Zur Injektivität seien γ_0, γ_1 Schleifen in S^1 mit Lifts $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1$, so dass $\tilde{\gamma}_0(0) = \tilde{\gamma}_1(0) = 0$ und $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1) = n \in \mathbb{Z}$. Da \mathbb{R} zusammenziehbar ist, ist \mathbb{R} einfach zusammenhängend. Insbesondere existiert eine relative Homotopie \tilde{H} zwischen $\tilde{\gamma}_0$ und $\tilde{\gamma}_1$ (Übung 2.77). Dann ist $p \circ \tilde{H}$ eine relative Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 , also folgt $[\gamma_0] = [\gamma_1]$.

Zur Surjektivität betrachte zu $n \in \mathbb{Z}$ die Schleife γ_n mit Lift $\tilde{\gamma}_n$, wobei

$$\gamma_n(t) = e^{2\pi i n t} \quad \text{und} \quad \tilde{\gamma}_n(t) = n t. \quad \square$$

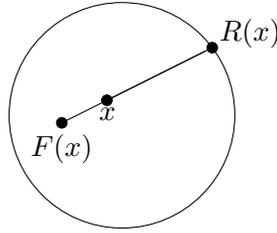


ABBILDUNG 2.2. Die Retraktion im Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes

Wir kommen jetzt zu zwei Anwendungen; weitere folgen in den Übungen 2.80 und 2.81. Zur Motivation zunächst der eindimensionale Fall des Brouwerschen Fixpunktsatzes.

2.29. BEMERKUNG. Jede stetige Funktion $f: D^1 = [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ hat einen Fixpunkt. Betrachte dazu die Funktion

$$g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto x - f(x).$$

Es gilt $f(x) = x$ genau dann, wenn $g(x) = 0$. Da $g(-1) \leq 0$ und $g(1) \geq 0$, folgt die Behauptung aus dem Zwischenwertsatz.

2.30. BEMERKUNG. Sei $Y \subset X$, sei $y \in Y$, und sei $R: X \rightarrow Y$ eine Retraktion, dann ist der Homomorphismus $\pi_1 R: \pi_1(X, y) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ surjektiv und $\pi_1 \iota: \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(X, x)$ injektiv. Zerlege dazu $\text{id}_{\pi_1(Y, y)} = \pi_1 \text{id}_Y$ als

$$\pi_1(Y, y) \xrightarrow{\pi_1 \iota} \pi_1(X, y) \xrightarrow{\pi_1 R} \pi_1(Y, y).$$

Mit anderen Worten: eine Retraktion verhält sich ähnlich wie eine Projektion in einem (semi-)direkten Produkt von Gruppen, Ringen, Vektorräumen etc.

2.31. SATZ (Brouwerscher Fixpunktsatz, $n = 2$). Jede stetige Abbildung $F: D^2 \rightarrow D^2$ hat einen Fixpunkt.

BEWEIS. Falls es keinen Fixpunkt gibt, konstruieren wir eine Retraktion $R: D^2 \rightarrow \partial D^2 = S^1$ wie in Abbildung 2.2. Da $\pi_1(D^2, 1) = 0$ und $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$, widerspricht das der obigen Bemerkung.

Zur Konstruktion der Retraktion beachten wir, dass $\min_{x \in D^2} d(F(x), x) > 0$ wegen Kompaktheit von D^2 . Daher erhalten wir eine stetige Abbildung, indem wir die Strecke von $F(x)$ nach x über x hinaus fortsetzen, bis sie S^1 schneidet, und x den Schnittpunkt $R(x)$ zuordnen. Falls $x \in S^1$, ist $x = R(x)$ dieser Schnittpunkt, also erhalten wir die gesuchte Retraktion. \square

Der folgende Satz gilt analog für Abbildungen $S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, wird hier aber nur für $n = 2$ bewiesen.

2.32. SATZ (Borsuk-Ulam). Sei $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig, dann existiert $x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$.

BEWEIS. Falls nicht, existiert eine Abbildung $G: S^2 \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ mit

$$G(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|},$$

und es folgt $G(x) = -G(-x)$ auf ganz S^2 . Betrachte den Äquator

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ohne Einschränkung gelte $G(\gamma(0)) = 1 \in S^1 \subset \mathbb{C}$, andernfalls drehen wir $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ entsprechend. Es sei $g = G \circ \gamma$. Wir wollen $G_*[\gamma] = [g] \in \pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$ bestimmen. Sei dazu $\tilde{g}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ein

Lift von $g: [0, 1] \rightarrow S^1$ wie in Satz 2.28 unter der Überlagerung $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ mit $p(t) = e^{2\pi t}$ aus Beispiel 2.26. Aus

$$g(t + 1/2) = G(-\gamma(t)) = -(G \circ \gamma)(t) = -g(t)$$

folgt

$$\tilde{g}(t + 1/2) - \tilde{g}(t) \in \mathbb{Z} + 1/2,$$

da $p^{-1}(-1) = \mathbb{Z} + 1/2$. Da der obige Ausdruck stetig von t abhängt und $\mathbb{Z} + 1/2$ diskret ist, ist er konstant, und wir erhalten

$$\tilde{g}(1) - \tilde{g}(0) = (\tilde{g}(1) - \tilde{g}(1/2)) + (\tilde{g}(1/2) - \tilde{g}(0)) = 2(\tilde{g}(1/2) - \tilde{g}(0)) \in 2\mathbb{Z} + 1.$$

Insbesondere wird der Äquator auf ein ungerades Element von $\pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$ abgebildet. Der Äquator γ ist aber null-homotop in S^2 . Sei H eine Homotopie von γ zur konstanten Schleife, dann ist $G \circ H$ eine Homotopie von g zur konstanten Schleife, was einen Widerspruch darstellt. \square

Die Beweise der obigen Sätze sind nicht konstruktiv, das heißt, sie liefern kein Verfahren, das einen Punkt mit der gesuchten Eigenschaft findet. Das gleiche gilt für die beiden Anwendungen in den Übungen 2.80 und 2.81, auch dort sind die Beweise indirekt. Man beachte, dass es in allen vier Problemen beliebig „schlecht konditionierte“ Situationen gibt, in denen eine beliebig kleine Variation der Ausgangsdaten (zum Beispiel Variation von F um weniger als $\varepsilon > 0$ in der Supremumsnorm) beliebig große Änderungen des gesuchten Punktes bewirken können.

2.d. Der Satz von Seifert-van Kampen

Wir wollen als nächstes den Satz von Seifert-van Kampen beweisen, der es in vielen Fällen ermöglicht, die Fundamentalgruppe eines zusammengesetzten Raumes aus den Fundamentalgruppen seiner Bausteine zu rekonstruieren. Dazu benötigen wir ein paar Begriffe aus der Gruppentheorie.

Sei $(G_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Gruppen. Wir wollen zunächst eine Gruppe konstruieren, die alle Gruppen G_i enthält, und in der keine „unnötigen“ Relationen gelten. Diese Gruppe soll das „freie Produkt“ der Gruppen G_i heißen. Wir werden sehen, dass das freie Produkt das Koprodukt in der Kategorie $\mathcal{G}rp$ der Gruppen ist.

2.33. BEMERKUNG (Zur Erinnerung). Produkt \prod und Summe \bigoplus von Gruppen; Abbildungen

$$G_j \xrightarrow{\iota_j} \bigoplus_i G_i \longrightarrow \prod_i G_i \xrightarrow{\pi_j} G_j.$$

In beiden Fällen kommutieren die Elemente verschiedener Gruppen, was eine zusätzliche Relation darstellt, die wir hier umgehen wollen.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Gruppen G_i paarweise disjunkt sind, ansonsten müssten wir die Elemente von G_i als (i, g) „markieren“.

2.34. DEFINITION. Sei $(G_i)_{i \in I}$ eine Familie von Gruppen. Ein Wort w im Alphabet $\dot{\cup}_i G_i$ ist ein Tupel $g_1 \dots g_k$ der endlichen Länge $\ell(w) = k \geq 0$ von Buchstaben $g_j \in G_{i_j}$ mit $i_j \in I$. Schreibe \emptyset für das leere Wort. Ein Wort heißt gekürzt oder reduziert, wenn

- (1) kein Buchstabe ein neutrales Element $e_i \in G_i$ ist, und
- (2) keine zwei aufeinanderfolgenden Buchstaben g_j, g_{j+1} zur gleichen Gruppe $G_{i_j} = G_{i_{j+1}}$ gehören.

Ein Wort kürzen oder reduzieren heißt, so oft wie möglich einen der folgenden Schritte auszuführen:

- (1) Weglassen eines Einselementes $e_i \in G_i$ an einer beliebigen Stelle des Wortes,

$$w' e_i w'' \mapsto w' w'',$$

- (2) Ersetzen zweier aufeinanderfolgender Buchstaben $g_j, g_{j+1} \in G_{i_j}$ aus derselben Gruppe durch ihr Produkt,

$$w' g_j g_{j+1} w'' \mapsto w'(g_j g_{j+1}) w'' .$$

Zwei Wörter heißen *äquivalent*, wenn sie zum gleichen Wort reduziert werden können.

2.35. PROPOSITION. *Jedes Wort lässt sich auf genau eine Weise reduzieren.*

BEWEIS. Die einzige mögliche Wahl beim Reduzieren besteht in der Reihenfolge, in der mögliche Reduktionsschritte ausgeführt werden. Falls diese Schritte an räumlich getrennten Stellen im Wort stattfinden, ist ihre Reihenfolge egal, beispielsweise sei $1 \leq i, i+1 < j, j+1 \leq k$, dann ist

$$w' \underbrace{g_i g_{i+1}}_{\in G_i} w'' \underbrace{g_j g_{j+1}}_{\in G_j} w''' \sim w'(g_i g_{i+1}) w'' (g_j g_{j+1}) w'''$$

unabhängig von der Reihenfolge der Reduktionsschritte.

Nur wenn ein Element gleichzeitig auf zwei verschiedene Weisen reduziert werden kann, kann es auf die Reihenfolge ankommen. Die möglichen Buchstabenketten, bei denen das vorkommen kann, sind

$$\begin{aligned} w' ghk w'' &\sim w'(gh)k w'' \sim w'g(hk) w'' \sim w'(ghk) w'' , \\ w' ge w'' &\sim w'(ge) w'' \sim w'g w'' \quad \text{und} \quad w' eg w'' \sim w'(eg) w'' \sim w'g w'' \end{aligned}$$

mit g, h, k und $e = e_i \in G_i$ für ein $i \in I$. Hier sorgen die Rechenregeln für Gruppen dafür, dass es nicht auf die Reihenfolge der Reduktion ankommt. \square

2.36. DEFINITION. Sei $(G_i)_{i \in I}$ eine Familie von Gruppen. Das *freie Produkt* $*_i G_i = \coprod_i G_i$ der G_i ist die Menge aller reduzierten Wörter, die Multiplikation ist Hintereinanderschreiben und anschließende Reduktion. Definiere Abbildungen $\iota_j: G_j \rightarrow \coprod_i G_i$ mit

$$\iota_j(g) = \begin{cases} \emptyset & g = e_j , \\ g & g \in G_j \setminus \{e_j\} . \end{cases}$$

2.37. PROPOSITION. *Das freie Produkt ist eine Gruppe, und die Abbildungen ι_j sind Homomorphismen.*

BEWEIS. Da es laut Beweis des Satzes 2.35 nicht auf die Reihenfolge der Reduktionsschritte ankommt, erhalten wir das Produkt dreier Wörter durch Hintereinanderschreiben aller drei Wörter und anschließendes Kürzen; hieraus folgt Assoziativität der Multiplikation.

Das leere Wort ist offensichtlich neutrales Element, und für jedes Wort gilt

$$(g_1 \dots g_k)^{-1} = g_k^{-1} \dots g_1^{-1} .$$

Für alle $i \in I$ und alle $g \in G_i$ ist $\iota_i(g)$ gekürzt, und offensichtlich ist ι_i ein Homomorphismus. \square

2.38. BEISPIEL. (1) Freie Gruppen in einem Buchstaben \mathbb{Z} .

(2) Freie Gruppen $F_k = \prod_{i=1}^k \mathbb{Z}$.

(3) Unendliche Diedergruppe $D_\infty \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ (Isometriegruppe des metrischen Raumes $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$), die nichttrivialen Elemente der beiden Kopien von \mathbb{Z}_2 sind zwei benachbarte Spiegelungen, etwa an den Punkten 0 und 1/2.

2.39. SATZ. *Das Produkt von Gruppen ist ein Produkt auf der Kategorie der Gruppen. Das freie Produkt von Gruppen ist ein Koprodukt auf der Kategorie der Gruppen.*

BEWEIS. Sei $(G_i)_{i \in I}$ eine Familie von Gruppen. Wie in Übung 1.112 ist ihr Produkt

$$\prod_{i \in I} G_i = \{(g_i)_{i \in I} \mid g_i \in G_i \text{ für alle } i \in I\},$$

zusammen mit den Projektionen

$$p_j: \prod_{i \in I} G_i \rightarrow G_j, \quad p_j((g_i)_{i \in I}) = g_j.$$

Elemente des Produktes werden komponentenweise verknüpft, das neutrale Element ist $(e_i)_{i \in I}$ mit $e_i \in G_i$ neutral, das Inverse von $(g_i)_{i \in I}$ ist $(g_i^{-1})_{i \in I}$. Die Projektionen p_j sind Gruppenhomomorphismen.

Sei H eine weitere Gruppe, und seien $f_i: H \rightarrow G_i$ Gruppenhomomorphismen. Zu zeigen ist nach Bemerkung 1.47 die universelle Eigenschaft des Produktes, wonach es genau einen Homomorphismus $f: H \rightarrow G$ mit $f_i = p_i \circ f$ für alle $i \in I$ gibt. Man sieht leicht, dass dann gerade

$$f(h) = (f_i(h))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i$$

folgt, und dass f tatsächlich ein Homomorphismus ist.

Nach Bemerkung 1.41 besagt die universelle Eigenschaft des Koproductes, dass es zu jeder Gruppe H und Homomorphismen $f_i: G_i \rightarrow H$ genau einen Homomorphismus $f: \ast_{i \in I} G_i \rightarrow H$ mit $f_i = f \circ \iota_i$ für alle $i \in I$ gibt. Da das freie Produkt von den einbuchstabigen Wörtern erzeugt wird, folgt

$$f(g_1 \cdots g_k) = f_{i_1}(g_1) \cdots f_{i_k}(g_k) \in H,$$

wobei $g_j \in G_{i_j}$ wie oben. Offensichtlich ist Kürzen mit f verträglich, da alle f_i Homomorphismen sind. Also ist f ebenfalls Homomorphismus. \square

Im Satz von Seifert-van Kampen benötigen wir einen Quotienten des freien Produkts. Da man Quotienten von Gruppen nur nach Normalteilern bilden kann, erinnern wir uns an die Definition von Normalteilern.

Ein *Normalteiler* N einer Gruppe G ist eine Untergruppe mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass $gng^{-1} \in N$ für alle $g \in G$ und alle $n \in N$. Kerne von Gruppenhomomorphismen $F: G \rightarrow H$ haben diese Eigenschaft, denn sei $g \in G$, $k \in \ker F$, dann folgt

$$F(gkg^{-1}) = F(g) \cdot \underbrace{F(k)}_{=e} \cdot F(g)^{-1} = e \in H,$$

also $gkg^{-1} \in \ker F$.

Sei umgekehrt N ein Normalteiler, dann definieren wir eine Gruppenstruktur auf dem Quotienten

$$G/N = \{gN \mid g \in G\} \quad \text{mit} \quad gN = \{gn \mid n \in N\}$$

durch

$$(gN) \cdot (hN) = g(hNh^{-1}) \cdot (hN) = gh \cdot N \cdot N = (gh)N.$$

Die Normalteiler-Eigenschaft garantiert uns, dass dieses Produkt wohldefiniert ist. Die natürliche Abbildung $G \rightarrow G/N$ mit $g \mapsto gN$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern N .

2.40. DEFINITION. Es sei G eine Gruppe und $M \subset G$ eine Teilmenge. Dann ist der von M erzeugte Normalteiler (M) von G der kleinste Normalteiler $N \subset G$, so dass $M \subset N$.

Man kann sich überzeugen, dass Durchschnitte von Normalteilern wieder Normalteiler sind, so dass der Begriff des kleinsten Normalteilers in der obigen Definition sinnvoll ist. Alternativ dazu geben wir (M) explizit an.

2.41. BEMERKUNG. Es gilt

$$(M) = \{ g_1 m_1^{\pm 1} g_1^{-1} \cdots g_k m_k^{\pm 1} g_k^{-1} \mid k \geq 0, g_1, \dots, g_k \in G \text{ und } m_1, \dots, m_k \in M \}. \quad (*)$$

Man überzeugt sich leicht, dass die rechte Seite eine Untergruppe von M beschreibt, und sogar einen Normalteiler, da

$$g(g_1 m_1^{\pm 1} g_1^{-1} \cdots g_k m_k^{\pm 1} g_k^{-1})g^{-1} = (gg_1)m_1^{\pm 1}(gg_1^{-1}) \cdots (gg_k)m_k^{\pm 1}(gg_k)^{-1}.$$

Umgekehrt enthält jeder Normalteiler, der M enthält, auch alle Produkte von Elementen der Form $gm^{\pm 1}g^{-1}$, also ist die rechte Seite von (*) tatsächlich der kleinste Normalteiler, der M enthält.

Wir formulieren und beweisen jetzt den weiter oben angekündigten Satz.

2.42. SATZ (Seifert-van Kampen). Sei (X, x) ein punktierter Raum, und sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ eine offene Überdeckung von X , so dass

- (1) jede Menge $U \in \mathcal{U}$ den Basispunkt x enthält, und
- (2) jeder Durchschnitt $U \cap V$ für $U, V \in \mathcal{U}$ wegzusammenhängend ist.

Dann ist die von den Homomorphismen $\iota_{U*}: \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ induzierte natürliche Abbildung

$$\varphi: \coprod_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$$

surjektiv. Falls darüberhinaus

- (3) jeder Durchschnitt $U \cap V \cap W$ für $U, V, W \in \mathcal{U}$ wegzusammenhängend ist,

dann wird der Kern der Abbildung φ gegeben durch

$$\ker \varphi = \left(\left\{ (\iota_{U \cap V \rightarrow U})_*[\gamma] \cdot (\iota_{U \cap V \rightarrow V})_*[\gamma]^{-1} \mid U, V \in \mathcal{U} \text{ und } [\gamma] \in \pi_1(U \cap V, x) \right\} \right). \quad (*)$$

Hier bezeichnen $\iota_U: U \rightarrow X$ und $\iota_{U \cap V \rightarrow U}: U \cap V \rightarrow U$ die Inklusionsabbildungen.

BEWEIS. Wir schreiben wieder $\alpha\beta$ für die Verkettung beliebiger Wege mit passenden Anfangs- und Endpunkten wie im Beweis von Satz 2.15.

Um zu zeigen, dass die Abbildung φ surjektiv ist, betrachten wir eine Schleife $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Da $(\gamma^{-1}(U))_{U \in \mathcal{U}}$ eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls $[0, 1]$ ist, existiert nach dem Satz 1.55 von Lebesgue ein $n > 0$, so dass jeder Weg

$$\gamma_i(t) = \left(\gamma|_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]} \right) \left(\frac{t+i-1}{n} \right)$$

für $1 \leq i \leq n$ ganz in einer der Mengen $U_i \in \mathcal{U}$ verläuft. Nach (1) und (2) gibt es Wege α_i von x nach $\gamma(\frac{i}{n}) = \gamma_i(1) = \gamma_{i+1}(0)$ in $U_i \cap U_{i+1}$. Also schreiben wir γ als Verkettung

$$\gamma \sim \underbrace{\gamma_1 \alpha_1^{-1}}_{\in \text{im } \iota_{U_1*}} \underbrace{\alpha_1 \gamma_2 \alpha_2^{-1}}_{\in \text{im } \iota_{U_2*}} \cdots \underbrace{\alpha_{n-1} \gamma_n}_{\in \text{im } \iota_{U_n*}} \in \text{im } \varphi,$$

und es folgt Surjektivität.

Wir bezeichnen die rechte Seite von (*) mit $N \subset \coprod_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U, x)$. Sei $[\gamma] \in \pi_1(U \cap V, x)$, dann ist offensichtlich

$$[e] = [\gamma][\bar{\gamma}] = \underbrace{(\iota_{U \cap V \rightarrow U})_*[\gamma]}_{\in \text{im } \iota_{U*}} \cdot \underbrace{(\iota_{U \cap V \rightarrow V})_*[\bar{\gamma}]^{-1}}_{\in \text{im } \iota_{V*}} \in \pi_1(X, x),$$

woraus sich $N \subset \ker \varphi$ ergibt.

Sei umgekehrt $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$ für Schleifen γ_i in $U_i \in \mathcal{U}$, dargestellt durch das entsprechende Wort $w \in \ker \varphi$. Dann existiert eine Homotopie $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ von der trivialen Schleife zu γ . Nach dem Satz von Lebesgue können wir das kompakte Einheitsquadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ so in Waben zerlegen, dass jede Wabe $W_i \subset [0, 1] \times [0, 1]$ von H ganz in eine der Mengen $U_i \in \mathcal{U}$

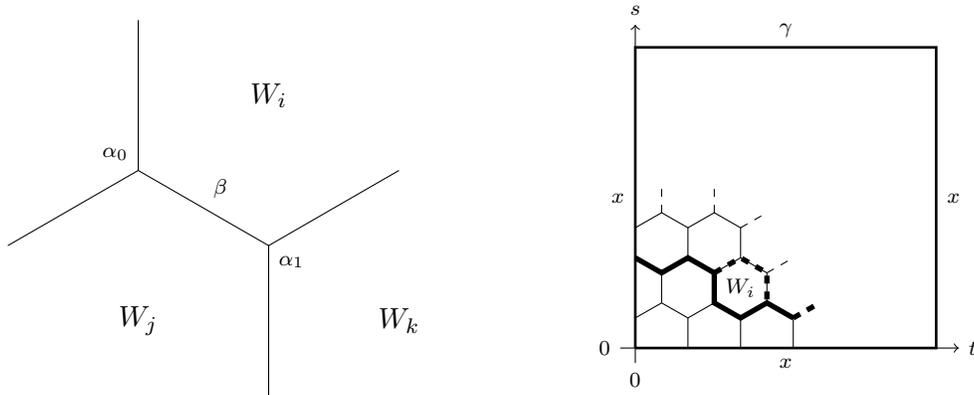


ABBILDUNG 2.3. Zerlegung des Einheitsquadrats in Waben

abgebildet wird. Nach (3) finden wir zu jedem Eckpunkt (t, s) einen Weg α von x nach $H(t, s)$, der ganz im Durchschnitt der (maximal drei) offenen Mengen $U_i, U_j, U_k \in \mathcal{U}$ zu den angrenzenden Waben W_i, W_j, W_k verläuft. Wir können jetzt jede Kante zwischen zwei Waben wie oben durch eine Schleife $\alpha_0\beta\alpha_1^{-1}$ beschreiben, die ganz im Durchschnitt der $U_i, U_j \in \mathcal{U}$ zu den angrenzenden Waben W_i, W_j verläuft.

Wir zerlegen die Homotopie H in eine Folge einzelner Homotopien H_i relativ zu x , die jeweils eine Wabe W_i überstreichen, siehe Abbildung 2.3. Zu Beginn der Homotopie wird der betrachtete Pfad beschrieben durch ein Wort aus Buchstaben der Form

$$\cdots \iota_{(U_i \cap U_j \rightarrow U_j)*} \underbrace{[\alpha_0\beta\bar{\alpha}_1]}_{\sigma \text{ in } U_i \cap U_j} \cdots \in \prod_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U, x),$$

dabei gehört U_j hier stets zu einer Wabe W_j „unterhalb“ des Pfades zu Beginn der Homotopie H_i . Fall die Kante β an die Wabe W_i angrenzt, müssen wir als erstes diesen Buchstaben durch einen Buchstaben in $\pi_1(U_i, x)$ ersetzen. Dazu beachten wir, dass

$$w' \iota_{(U_i \cap U_j \rightarrow U_i)*} [\sigma] w'' = \left(w' \iota_{(U_i \cap U_j \rightarrow U_i)*} [\sigma] \iota_{(U_i \cap U_j \rightarrow U_j)*} [\sigma]^{-1} w'^{-1} \right) \left(w' \iota_{(U_i \cap U_j \rightarrow U_j)*} [\sigma] w'' \right).$$

Dieses Ersetzen entspricht also gerade der Multiplikation von links mit einem Element von N , vergleiche Bemerkung 2.41.

Wenn wir alle Buchstaben, die zu Kanten der Wabe W_i gehören, durch Buchstaben in $\pi_1(U_i, x)$ ersetzt haben, können wir die Homotopie H_i durchführen. Dabei wird ein Produkt von Schleifen in U_i durch ein in U_i homotopes Produkt ersetzt. Nach Kürzen verändert sich das zugehörige Wort im freien Produkt der $\pi_1(U, x)$ also gar nicht.

Nach endlich vielen Schritten erreichen wir den ursprünglichen Weg $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$, wobei γ aber möglicherweise durch ein anderes Wort repräsentiert wird, falls ein oder mehrere γ_i als Schleifen in anderen Umgebungen geschrieben wurden. Nochmaliges Multiplizieren mit Elementen von N behebt dieses Problem.

Da wir mit der trivialen Schleife, dargestellt durch das leere Wort, begonnen haben, haben wir also $w \in \ker \varphi$ insgesamt als Produkt von Elementen von N geschrieben, also folgt $\ker \varphi \subset N$ und daher $\ker \varphi = N$. \square

2.43. BEISPIEL. Die Ziffer „8“ lässt sich als Vereinigung zweier Kreise schreiben. Sei „8“ = $U \cup V$, wobei U und V kleine offene Umgebungen der beiden Kreise seien, so dass die Kreise Deformations-Retrakte von U und V sind. Wähle x_0 als Schnittpunkt der beiden Kreise, dann liefert Seifert-van Kampen, dass $\pi_1(\text{„8“}, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

2.44. BEISPIEL. Ohne die erste Voraussetzung (1) läßt sich der Satz von Seifert-van Kampen nicht formulieren. Es folgen zwei Beispiele, die zeigen, dass die anderen beiden Voraussetzungen ebenfalls nötig sind.

- (1) Betrachte $X = S^1 \subset \mathbb{C}$ als Vereinigung zweier zusammenziehbarer Mengen $U_{\pm} = S^1 \setminus \{\pm i\}$. Beide Mengen haben triviale Fundamentalgruppe, also ist auch $\pi_1(U_+, 1) * \pi_1(U_-, 1)$ trivial. Auf der anderen Seite ist $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$ nichttrivial, insbesondere ist die natürliche Abbildung $\pi_1(U_+, 1) * \pi_1(U_-, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$ nicht surjektiv. Das liegt daran, dass $U^+ \cap U^- = S^1 \setminus \{i, -i\}$ nicht zusammenhängend ist, also Voraussetzung (2) verletzt ist.
- (2) Betrachte $Y = S^1 \cup [-1, 1] \subset \mathbb{C}$, und setze $U_x = Y \setminus \{x\}$ für $x \in \{-i, 0, i\}$. Dann sind die drei Mengen U_x jeweils homotopieäquivalent zu einem Kreis, haben also Fundamentalgruppe \mathbb{Z} . Der Durchschnitt je zweier dieser drei Mengen ist zusammenziehbar, also gilt $N = \{e\}$ und

$$\pi_1(Y, 1) = (\pi_1(U_i, 1) * \pi_1(U_{-i}, 1)) / N = \mathbb{Z} * \mathbb{Z},$$

denn Voraussetzung (3) folgt aus Voraussetzung (2), solange wir nur zwei offene Mengen betrachten.

Andererseits gilt

$$(\pi_1(U_i, 1) * \pi_1(U_0, 1) * \pi_1(U_{-i}, 1)) / N = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z},$$

und $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, etwa haben beide Gruppen unterschiedliche Abelisierungen. Da $U_i \cap U_0 \cap U_{-i}$ nicht wegzusammenhängend ist, ist Voraussetzung (3) für die Überdeckung $\{U_i, U_0, U_{-i}\}$ verletzt.

2.45. BEMERKUNG. Der Spezialfall $X = U \cup V$ im Satz 2.42 von Seifert-van Kampen ist besonders wichtig und etwas einfacher zu formulieren als der allgemeine Fall. Da der Beweis aber nicht einfacher wird, haben wir gleich den allgemeinen Fall betrachtet.

- (1) Seien G, H, K Gruppen und $a: K \rightarrow G, b: K \rightarrow H$ Gruppenhomomorphismen, so definiert man das *amalgamierte Produkt* von G und H über K durch

$$G *_K H = G * H / (\{ a(k)b(k)^{-1} \mid k \in K \}).$$

Das amalgamierte Produkt erfüllt die universelle Eigenschaft eines Pushouts in der Kategorie $\mathcal{G}rp$, vergleiche Folgerung 1.75.

Seien dazu $i: G \rightarrow G *_K H$ und $j: H \rightarrow G *_K H$ die natürlichen Homomorphismen, sei L eine Gruppe und seien $g: G \rightarrow L, h: H \rightarrow L$ Homomorphismen mit $g \circ a = h \circ b: K \rightarrow L$, dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus

$$f: G *_K H \rightarrow L \text{ mit } g = f \circ i \text{ und } h = f \circ j.$$

- (2) Sei $X = U \cup V$ topologischer Raum mit U, V offen. Dann trägt X die Quotiententopologie zur natürlichen Abbildung $U \sqcup V \rightarrow X$. Also ist X ebenfalls ein Pushout nach Folgerung 1.75. Dazu fasst man $U \cap V$ als Teilmenge von V auf und betrachtet die Inklusion $f: U \cap V \hookrightarrow U$ (oder umgekehrt). Wenn wir einen Basispunkt $x \in U \cap V$ festlegen, erhalten wir analog einen Pushout $X = U \cup_{U \cap V} V$ in der Kategorie $\mathcal{T}op_+$.

- (3) Der Satz von Seifert-van Kampen besagt, dass der Funktor π_1 den Pushout in \mathcal{Top}_+ auf den Pushout in \mathcal{Grp} abbildet, falls $U \cap V$ wegzusammenhängend ist. Denn, wie schon gesagt, reichen Voraussetzung (1) und (2) aus, solange man Überdeckungen aus zwei Mengen betrachtet.
- (4) Man beachte: Ein beliebiger Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ muss den Pushout in \mathcal{C} nicht auf den in \mathcal{D} abbilden, falls beide Pushouts existieren. Das zeigt bereits Beispiel 2.44 (1). Im allgemeinen erhält man nur einen Morphismus vom Pushout der Bilder unter \mathcal{F} in das Bild des Pushouts unter \mathcal{F} , siehe Übung 2.87.

2.46. BEISPIEL. Die Sphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist offensichtlich wegzusammenhängend für $n \geq 2$. Wir betrachten $S^n = U_+ \cup U_- \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $U_{\pm} = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, \mp 1)\}$ wie in Beispiel 1.78 (2). Die stereographische Projektion liefert Homöomorphismen $U_+ \cong \mathbb{R}^n \cong U_-$, also sind U_{\pm} zusammenziehbar. Schließlich ist S^{n-1} ein Deformationsretrakt von $U_+ \cap U_-$. Mit $x = (1, 0, \dots, 0)$ erhalten wir für $n \geq 2$, dass

$$\pi_1(S^n, x) = \pi_1(U_+, x) *_{\pi_1(U_+ \cap U_-, x)} \pi_1(U_-, x) = \{e\} *_{\pi_1(S^{n-1}, x)} \{e\} = \{e\},$$

also sind Sphären einfach zusammenhängend ab Dimension 2.

Man ist versucht, das obige Beispiel so zu begründen, dass man jede Schleife in S^n für $n \geq 2$ von einem Punkt $y \in S^n$, der nicht getroffen wird, zum Basispunkt x „wegdrückt“. Beispiel 1.22 zeigt aber, dass man Schleifen konstruieren kann, die jeden Punkt in S^n treffen. Also braucht man ein komplizierteres Argument.

2.47. BEISPIEL. Zur Vorbereitung auf die Übungsaufgabe 2.83 zu den Borromäischen Ringen geben wir drei weitere Beispiele. Dabei betrachten wir die Fundamentalgruppen von Komplementen eines oder mehrerer Kreise im \mathbb{R}^3 .

- (1) Betrachte $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. Wir addieren einen Punkt im Unendlichen, indem wir $U = \mathbb{R}^3 \setminus S^1$ via stereographischer Projektion in $S^3 \setminus S^1$ einbetten, hierbei wird S^1 zu einem Großkreis, und der fehlende Punkt in S^3 sei $e_4 = (0, 0, 0, 1)$. Es sei V die obere Halbkugel, dann ist S^2 ein Deformationsretrakt von $U \cap V$. Also gilt nach Satz 2.42 mit $x = U \cap V$, dass

$$\pi_1(S^3 \setminus S^1, x) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1, x) *_{\pi_1(S^2, x)} \pi_1(V, x) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1, x).$$

Jetzt bilden wir $S^3 \setminus S^1$ durch stereographische Projektion an einem Punkt der S^1 nach \mathbb{R}^3 ab und erhalten einen Homöomorphismus $S^3 \setminus S^1 \cong \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0, 0)\} \times \mathbb{R})$. Aber S^1 ist ein Deformationsretrakt davon, so dass schließlich

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1) \cong \pi_1(S^3 \setminus S^1) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

- (2) Wir betrachten jetzt das Komplement zweier „unverlinkter“ Kreise im Raum, genauer $Y = \mathbb{R}^3 \setminus (S^1 \times \{-1, 1\})$. Mit Beispiel (1) und Seifert-van Kampen folgt

$$\begin{aligned} \pi_1(Y) &\cong \pi_1((\mathbb{R}^2 \times (-\infty, 1)) \setminus (S^1 \times \{-1\})) *_{\pi_1(\mathbb{R}^2 \times (-1, 1))} \pi_1((\mathbb{R}^2 \times (-1, \infty)) \setminus (S^1 \times \{1\})) \\ &\cong \mathbb{Z} *_{\{e\}} \mathbb{Z} \cong F_2. \end{aligned}$$

- (3) Wir betrachten im Gegensatz dazu das Komplement zweier „einfach verlinkter“ Kreise im \mathbb{R}^3 , nämlich

$$Z = \mathbb{R}^3 \setminus (\{(\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \mid \varphi \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, \cos \psi + 1, \sin \psi) \mid \psi \in \mathbb{R}\}).$$

Wie in (1) fügen wir einen Punkt im Unendlichen hinzu, dann hat Z die gleiche Fundamentalgruppe wie

$$S^3 \setminus (\{(\cos \varphi, \sin \varphi, 0, 0) \mid \varphi \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 0, \cos \psi, \sin \psi) \mid \psi \in \mathbb{R}\}).$$

Ein Deformationsretrakt hiervon ist der Clifford-Torus

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \varphi, \sin \varphi, \cos \psi, \sin \psi) \mid \varphi, \psi \in \mathbb{R} \right\} \cong S^1 \times S^1,$$

so dass

$$\pi_1(Z) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \not\cong \pi_1(Y).$$

Also kann die Fundamentalgruppe des Komplementes erkennen, ob man einen oder zwei Kreise entfernt hat, und ob diese „verlinkt“ waren oder nicht. Auch für Knoten im \mathbb{R}^3 ist die Fundamentalgruppe des Komplementes eine sehr mächtige Invariante. Allerdings kann man zwei auf verschiedene Weisen definierten Gruppen nicht immer ohne weiteres ansehen, ob sie isomorph sind oder nicht.

Wir haben schon in der Übung 2.76 gesehen, dass die Fundamentalgruppe eines endlichen Produktes punktierter Räume gleich dem Produkt ihrer Fundamentalgruppen ist. Etwas ähnliches wird für Koprodukte punktierter topologischer Räume gelten.

2.48. DEFINITION. Das *Bouquet* oder *Wedge-Produkt* einer Familie $(X_i, x_i)_{i \in I}$ punktierter topologischer Räume ist der punktierte Raum

$$\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i) = \left(\prod_{i \in I} X_i / \sim, x_0 \right)$$

mit der Quotiententopologie, wobei die Äquivalenzrelation „ \sim “ erzeugt wird durch $x_i \sim x_j$ für alle Paare $i, j \in I$, und $x_0 = [x_i]$ für alle $i \in I$. Sei $\iota_i: (X_i, x_i) \rightarrow (\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i), x_0)$ die natürliche Inklusion.

2.49. BEMERKUNG. Das Wedge-Produkt erfüllt die universelle Eigenschaft eines Koproduktes in der Kategorie \mathcal{Top}_+ . Dazu sei (Y, y) ein weiterer punktierter Raum und seien $f_i: (X_i, x_i) \rightarrow (Y, y)$ punktierte Abbildungen, dann existiert zunächst einmal genau eine stetige Abbildung $\bar{f}: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow Y$ mit $f_i = \bar{f} \circ \bar{\iota}_i$, wobei $\bar{\iota}_i$ hier die Inklusion von X_i in die disjunkte Vereinigung bezeichne.

Sei $q: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i)$ die Abbildung auf den Quotienten. Die Abbildung \bar{f} bildet alle Basispunkte x_i auf y ab, also ist die induzierte Abbildung $f: \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i) \rightarrow (Y, y)$ wohldefiniert, nach Satz 1.72 stetig, und wegen der Eindeutigkeit von $\bar{f} = f \circ q$ auch eindeutig.

2.50. FOLGERUNG. Sei $(X_i, x_i)_{i \in I}$ eine Familie gut punktierter topologischer Räume, das heißt, dass jeder Punkt x_i eine zusammenziehbare offene Umgebung $U_i \subset X_i$ besitzt. Dann gilt

$$\pi_1 \left(\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i), x_0 \right) = \prod_{i \in I} \pi_1(X_i, x_i).$$

Also bildet der Funktor π_1 unter entsprechenden Voraussetzungen auch Koprodukte in \mathcal{Top}_+ auf Koprodukte in \mathcal{Grp} ab. In Abschnitt 3.f werden wir „gut punktiert“ etwas anders definieren; die Folgerung bleibt aber gültig.

BEWEIS. Wir schreiben $\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i) = \bigcup_{i \in I} V_i$ mit

$$V_j = (X_j, x_j) \vee \bigvee_{i \in I \setminus \{j\}} (U_i, x_i).$$

Da die U_i zusammenziehbar sind, ist X_j Deformationsretrakt von V_j . Außerdem ist

$$V_j \cap V_k = \bigvee_{i \in I} (U_i, x_i) = V_j \cap V_k \cap V_\ell$$

zusammenziehbar, falls mindestens zwei der Indizes $j, k, \ell \in I$ verschieden sind. Aus dem Satz 2.42 von Seifert-van Kampen folgt die Behauptung. \square

2.e. Die Fundamentalgruppe eines CW-Komplexes

Wir berechnen die Fundamentalgruppen von CW -Komplexen mit Hilfe des Satzes von Seifert-van Kampen. Es wird sich zeigen, dass jede Schleife zu einer Schleife im 1-Gerüst homotop ist, und dass man bereits am 2-Gerüst alle möglichen Homotopien erkennen kann. Insgesamt gilt also $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(X^2, x_0)$ für wegzusammenhängende CW -Komplexe mit $x_0 \in X$, wobei X^1 die Erzeuger und X^2 die Relationen in einer Präsentation von $\pi_1(X, x_0)$ liefert. Umgekehrt taucht jede Gruppe als Fundamentalgruppe eines CW -Komplexes auf.

2.51. BEMERKUNG. Sei M eine Familie von *Erzeugern* von G , und sei $R \subset *_{m \in M} \mathbb{Z}$ eine Menge von *Relationen* in der von den Elementen von M erzeugten freien Gruppe F . Dann sei $N = (R)$ der von den Relationen erzeugte Normalteiler von F . Wir schreiben

$$G = F/N = \langle M \mid R \rangle,$$

diese Darstellung heißt auch eine *Präsentation* der Gruppe G . Jede Gruppe besitzt eine Präsentation. Zum Beispiel könnten wir $M = G$ setzen, dann ist F die Menge aller Wörter in M (wobei wir die Gruppenstruktur von G vergessen haben). Dann wählen wir $R = \ker(F \rightarrow G)$, wobei wir jedes Wort in F auf das entsprechende Produkt in G abbilden.

Zur Erinnerung: Ein CW -Komplex X ist die Vereinigung seiner n -Gerüste X^n , versehen mit der schwachen Topologie. Dabei ist X^0 diskret, und man konstruiert induktiv

$$X^n = X^{n-1} \cup \bigcup_{i \in I^n} e_i^n = X^{n-1} \cup_{\phi^n} \prod_{i \in I^n} D^n.$$

Unter einem *maximalen Baum* in einem wegzusammenhängenden CW -Komplex verstehen wir einen zusammenziehbaren Unterkomplex $Y \subset X^1$ mit $X^0 \subset Y$. Wir werden im Laufe des Beweises des folgenden Satzes verstehen, dass ein maximaler Baum gleichzeitig ein maximaler zusammenziehbarer Unterkomplex von X^1 ist.

2.52. SATZ. Sei X ein wegzusammenhängender CW -Komplex und $x_0 \in X^0$.

(1) Dann existiert $J \subset I^1$, so dass

$$Y = X^0 \cup \bigcup_{j \in J} e_j^1$$

ein maximaler Baum in X ist.

(2) Für J wie in (1) gilt

$$\pi_1(X^1, x_0) \cong \prod_{i \in I \setminus J} \mathbb{Z}.$$

(3) Es sei $[\sigma] \in \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ ein Erzeuger, dann gilt

$$\pi_1(X^2, x_0) \cong \pi_1(X^1, x_0) / (\{\varphi_{i*}^2[\sigma] \mid i \in I^2\}).$$

(4) Es gilt

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X^2, x_0) \cong \langle \{[\sigma_i] \mid i \in I^1 \setminus J\} \mid \{\varphi_{i*}^2[\sigma] \mid i \in I^2\} \rangle.$$

Dieser Satz ist zwar nicht einfach zu formulieren, und auch der Beweis ist kompliziert, da der Satz von Seifert-van Kampen mit offenen Teilmengen arbeitet, während die natürlicherweise auftretenden Unterkomplexe im Beweis abgeschlossen sind — ein Großteil des Beweises besteht darin, dieses Problem zu umgehen. Dafür läßt sich die Berechnung der Fundamentalgruppe eines gegebenen CW -Komplexes mit Hilfe dieses Satzes auf rein algebraische Rechnungen mit Erzeugern und Relationen zurückführen. Das werden wir in Folgerung 2.53 und Beispiel 2.54 ausnutzen.

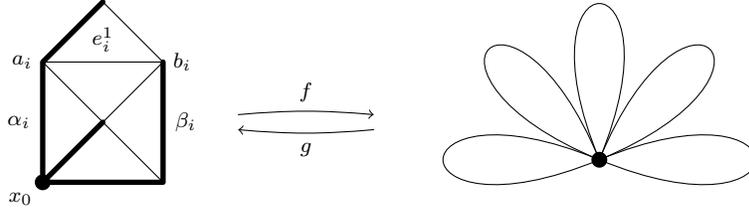


ABBILDUNG 2.4. Ziehe einen maximalen Baum zusammen

BEWEIS. Zu (1) definieren wir eine Metrik d auf X^0 so, dass $d(x, y)$ die Anzahl der Kanten $e_i^1 \subset X^1$ angibt, die ein Weg von x nach y in X^1 mindestens durchlaufen muss. Die Axiome einer Metrik lassen sich leicht überprüfen. Da X wegzusammenhängend ist, ist nach Folgerung 1.94 auch X^1 wegzusammenhängend, so dass es stets Wege $\gamma: [0, 1] \rightarrow X^1$ von x nach y gibt. Aus der Kompaktheit von $[0, 1]$ folgt mit Bemerkung 1.51 (2) und Satz 1.86, dass $d(x, y) < \infty$ für alle $x, y \in X^1$.

Wir konstruieren $Y = \bigcup_{k=0}^{\infty} Y_k$ induktiv. Dazu sei $Y_0 = \{x_0\}$. Gegeben Y_{k-1} für $k \geq 1$, so dass

$$Y_{k-1}^0 = Y_{k-1} \cap X^0 = \{x \in X^0 \mid d(x, x_0) \leq k-1\}$$

und J_{k-1} mit

$$Y_{k-1} = Y_{k-1}^0 \cup \bigcup_{j \in J_{k-1}} e_j^1,$$

finden wir von jedem $x \in X^0$ mit $d(x, x_0) = k$ mindestens eine Kante $e_{i_x}^1$, die x mit einem Punkt $x' \in Y_{k-1}^0$ mit $d(x', x_0) = k-1$ verbindet. Wir nehmen für jeden solchen Punkt genau eine entsprechende Kante zu Y_{k-1} hinzu und erhalten Y_k . Man beachte, dass es von jedem Punkt $x \in Y_k^0$ dann induktiv genau einen kürzesten Weg von x nach x_0 gibt, der über k Kanten führt.

Um zu zeigen, dass $\{x_0\}$ Deformationsretrakt von Y und Y somit zusammenziehbar ist, konstruieren wir zunächst Abbildungen $H_k: Y_k \times [0, 1] \rightarrow Y_k$ relativ zu $Y_{k-1} \times [0, 1]$, so dass $H_k(y, 0) = y$ und $H_k(y, 1) \in Y_{k-1}$ für alle $y \in Y_k$. Dazu ziehen wir gleichzeitig alle Kanten $\bar{e}_{i_x}^1$ von $x \in Y_k^0/Y_{k-1}^0$ nach $x' \in Y_{k-1}^0$ auf ihren Endpunkt x' zusammen. Anschließend setzen wir alle H_k wie im Beweis von Satz 1.93 zu einer Abbildung $H: Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ zusammen mit

$$H(y, s) = \begin{cases} y & \text{für } 0 \leq s \leq 2^{-k}, \text{ und} \\ H_{k'}((r_{k'+1} \circ \dots \circ r_k)(y), 2^{-k'}s - 1) & \text{für } 2^{-k'} \leq s \leq 2^{1-k'} \end{cases}$$

für alle $y \in Y_k \setminus Y_{k-1}$, $k \geq 0$, wobei $r_k = H(\cdot, 1): Y_k \rightarrow Y_{k-1}$ die oben konstruierten Retraktionen seien. Damit haben wir gezeigt, dass Y zusammenziehbar ist mit $X^0 \subset Y$, also in unserem Sinne ein maximaler Baum. Außerdem würde das Hinzunehmen jeder weiteren Kante zu Y einen Unterkomplex von X^1 mit nichttrivialer Fundamentalgruppe liefern, so dass Y tatsächlich ein maximaler zusammenziehbarer Unterkomplex ist.

Zu (2) reicht es nach Folgerung 2.50 zu zeigen, dass X^1 zu einem Bouquet von Kreisen homotopieäquivalent ist. Dazu definieren wir eine Abbildung

$$f: (X^1, x_0) \longrightarrow \bigvee_{i \in I^1 \setminus J} (S^1, 1),$$

die ganz Y auf den Basispunkt und jede Kante e_i^1 mit $i \notin J$ homöomorph auf den entsprechenden Kreis $S^1 \setminus \{1\}$ rechts abbildet. Umgekehrt definieren wir

$$g: \bigvee_{i \in I^1 \setminus J} (S^1, 1) \longrightarrow (X^1, x_0)$$

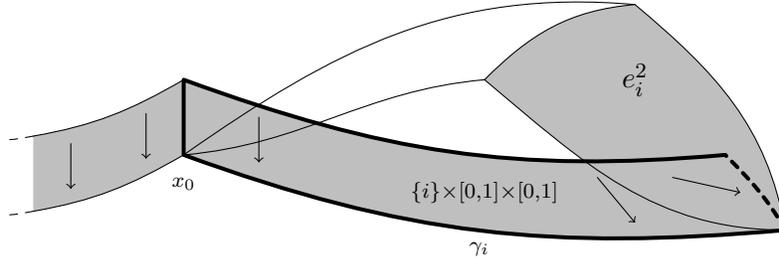


ABBILDUNG 2.5. Der Raum \bar{X}^n

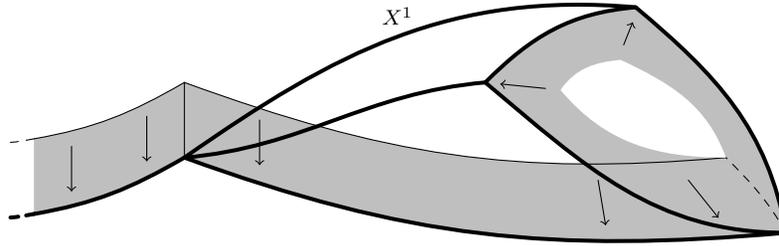


ABBILDUNG 2.6. Die Umgebung U_0 von X^{n-1}

so, dass jeder Kreis auf eine Schleife $\alpha_i e_i^1 \bar{\beta}_i$ abgebildet wird; dabei seien α_i, β_i die kürzesten Wege von x_0 zu den Endpunkten a_i, b_i von e_i^1 , siehe Abbildung 2.4.

Die Abbildung $g \circ f: (X^1, x_0) \rightarrow (X^1, x_0)$ bildet ganz Y auf x_0 und jede Kante \bar{e}_i^1 auf die Schleife $\alpha_i e_i^1 \bar{\beta}_i$ ab. Wir können die obige Homotopie H zu einer Homotopie zwischen id_{X^1} und $g \circ f$ ausdehnen, indem wir $e_i^1 \times \{s\}$ auf einen Weg von $H(a_i, s)$ über e_i^1 nach $H(b_i, s)$ abbilden.

Umgekehrt zieht $f \circ g: \bigvee_{i \in I^1 \setminus J}(S^1, 1) \rightarrow \bigvee_{i \in I^1 \setminus J}(S^1, 1)$ jeweils das erste und das letzte Drittel jedes Kreises auf den Basispunkt zusammen. Auch hier lässt sich eine Homotopie zur Identität angeben. Also sind (X^1, x_0) und $\bigvee_{i \in I^1 \setminus J}(S^1, 1)$ homotopieäquivalent. Jetzt folgt (2) aus Folgerung 2.50, da $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

Auch die Schritte (3) und (4) basieren auf dem Satz von Seifert-van Kampen. Um induktiv von $\pi_1(X^{n-1}, x_0)$ zu $\pi_1(X^n, x_0)$ für $n \geq 2$ zu gelangen, vergrößern wir X^n zu \bar{X}^n , siehe Abbildung 2.5. Dazu wählen wir für jedes $i \in I^n$ einen Weg γ_i von x_0 zum Bild x_i des Basispunktes von S^{n-1} unter der Verklebeabbildung φ_i . Wir verkleben $I^n \times [0, 1] \times [0, 1]$ wie folgt mit X^n .

- (1) Wir identifizieren alle Strecken $\{(i, 0)\} \times [0, 1]$ miteinander und kleben $[(i, 0, 0)]$ an den Punkt x_0 .
- (2) Wir verkleben $\{i\} \times [0, 1] \times \{0\}$ entlang von $\gamma_i: [0, 1] \times \{0\}$ mit X^{n-1} .
- (3) Wir kleben $\{1\} \times [0, 1]$ auf eine Strecke in e_i^n vom Punkt x_i ins Innere der Zelle bis zum Radius $1/2$.

Dann ist X^n ein Deformationsretrakt von \bar{X}^n , indem wir jedes Quadrat $\{i\} \times [0, 1] \times [0, 1]$ auf das Bild von $\{i\} \times ([0, 1] \times \{0\}) \cup \{1\} \times [0, 1]$ zusammenziehen.

Wir betrachten die folgenden offenen Teilmengen. Es sei

$$U_0 = \bar{X}^n \setminus \bigcup_{i \in I^n} \Phi_i^n(D_{1/2}^n),$$

wobei $D_{1/2}^n \subset D^n$ den abgeschlossenen Ball vom Radius $\frac{1}{2}$ bezeichne, siehe Abbildung 2.6. Dann ist X^{n-1} ein Deformationsretrakt von U_0 .

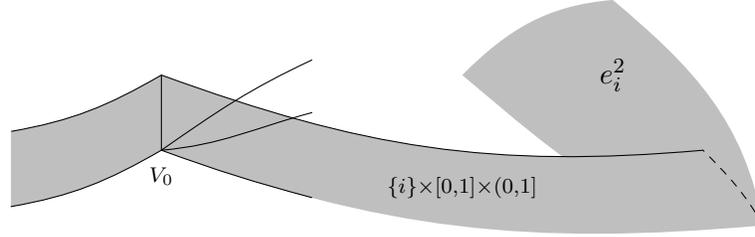


ABBILDUNG 2.7. Der Raum U_i

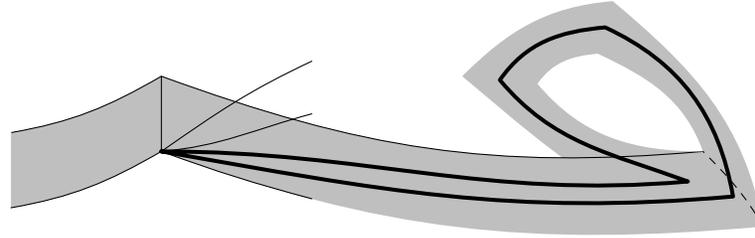


ABBILDUNG 2.8. Die Fundamentalgruppe von $U_0 \cap U_i$

Nach Satz 1.93 existiert eine zusammenziehbare Umgebung von x_0 in $X^n \cap U_0$. Es sei $V_0 \subset \overline{X}^n$ ihr Urbild unter der Retraktion $r_n: \overline{X}^n \rightarrow X^n$, dann ist V_0 ebenfalls zusammenziehbar. Für $i \in I^n$ setze

$$U_i = V_0 \cup (\{i\} \times [0, 1] \times (0, 1)) \cup e_i^n .$$

Man überzeugt sich, dass U_i ebenfalls zusammenziehbar ist, siehe Abbildung 2.7.

Für $i \neq j \in I^n$ ist $U_i \cap U_j = V_0$ zusammenziehbar, also insbesondere wegzusammenhängend. Außerdem ist

$$U_0 \cap U_i = V_0 \cup (\{i\} \times [0, 1] \times (0, 1)) \cup \Phi_i^n(B^n \setminus D_{1/2}^n)$$

wegzusammenhängend mit Deformationsretrakt $\Phi_i^n(S_{3/4}^{n-1})$. Analog sieht man, dass auch dreifache Durchschnitte von $\mathcal{U} = \{U_0\} \cup \{U_i \mid i \in I^n\}$ wegzusammenhängend sind.

Im Fall $n = 2$ folgt

$$\pi_1(U_0 \cap U_i, x_0) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} ,$$

wobei ein Erzeuger $[\sigma] \in \pi_1(S^1)$ auf eine Schleife abgebildet wird, die in U_0 zu $\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\bar{\gamma}_i$ homotop ist, siehe Abbildung 2.8. Behauptung (3) folgt jetzt aus Satz 2.42, da

$$\begin{aligned} \pi_1(X^2, x_0) &= \pi_1(\overline{X}^2, x_0) = \left(\pi_1(U_0, x_0) * \prod_{i \in I^2} \pi_1(U_i, x_0) \right) / (\{[\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\bar{\gamma}_i] \mid i \in I^2\}) \\ &= \pi_1(X_1, x_0) / (\{[\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\bar{\gamma}_i] \mid i \in I^2\}) . \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Erzeuger $[\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\bar{\gamma}_i]$ nach Satz 2.15 vom Weg γ_i abhängen. Da aber verschiedene Wege zueinander konjugierte Erzeuger liefern, hängt der erzeugte Normalteiler nach Bemerkung 2.41 nicht von der Wahl von γ_i ab.

Der Beweis von Behauptung (4) beginnt damit, dass $U_0 \cap U_i \sim S^{n-1}$ für $n \geq 3$ nach Beispiel 2.46 einfach zusammenhängend ist und somit $\pi_1(X^n, x_0) \cong \pi_1(X^{n-1}, x_0)$ analog zur obigen Überlegung. Jetzt liefert die Inklusion $\iota: X^n \hookrightarrow X$ Isomorphismen der Fundamentalgruppen. Denn sei γ eine Schleife in X , dann verläuft γ in einem Gerüst X^n nach Satz 1.86, also ist die Abbildung

$$\iota_*: \pi_1(X^2, x_0) \cong \pi_1(X^n, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

surjektiv. Falls γ nullhomotop ist, verläuft aus dem gleichen Grund eine Homotopie H zur trivialen Schleife ganz in einem X^n (wobei n jetzt größer sein kann), also ist ι_* auch injektiv. Damit ist der Satz bewiesen. \square

2.53. FOLGERUNG. Sei G eine Gruppe, dann existiert ein CW-Komplex X mit $\pi_1(X) \cong G$.

BEWEIS. Sei G durch Erzeuger $M \subset G$ und Relationen R gegeben. Wir konstruieren einen CW-Komplex X . Sei $X^0 = \{x_0\}$ das 0-Skelett, bestehend aus einer 0-Zelle x_0 .

Wir wählen $I^1 = M$, das heißt, für jeden Erzeuger $m \in M$ sei e_m^1 eine 1-Zelle, deren zwei Endpunkte notwendigerweise an x_0 angeklebt sind. Dann ist $\{x_0\} \subset X^1$ ein maximaler Baum, also ist $F = \pi_1(X^1, x_0)$ die von den Schleifen $\{e_m^1 \mid m \in M\}$ erzeugte freie Gruppe. Wir identifizieren den zu e_m^1 gehörigen Erzeuger mit $m \in M$.

Wir wählen $I^2 = R$, und für jede Relation $r = m_1 \cdots m_k \in R$ wählen wir eine 2-Zelle e_r^2 , so dass die Verklebeabbildung $\varphi_r^2: S^1 \rightarrow X^1$ gerade das Element $m_1 \cdots m_k \in \pi_1(X^1, x_0)$ repräsentiert.

Aus Satz 2.52 folgt jetzt

$$\pi_1(X^2, x_0) = \langle M \mid R \rangle = G. \quad \square$$

2.54. BEISPIEL. Wir betrachten Flächen, genauer, kompakte, zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension 2.

- (1) Eine orientierbare Fläche X_g vom Geschlecht $g \geq 0$ lässt sich als CW-Komplex mit einer Ecke $\{x_0\}$, $2g$ Kanten $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ und einer 2-Zelle schreiben. Die zugehörige Verklebeabbildung φ^2 entspreche der Schleife $a_1 b_1 \bar{a}_1 \bar{b}_1 \cdots a_g b_g \bar{a}_g \bar{b}_g$, und wir erhalten die Präsentation

$$\pi_1(X_g, x_0) \cong \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle.$$

Für $g = 0$ erhalten wir die Kugel S^2 , für $g = 1$ den Torus T^2 . Da die Relation ein Produkt von Kommutatoren ist, erhalten wir die Abelisierung

$$\pi_1(X_g, x_0)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}.$$

- (2) Eine nicht orientierbare Fläche Y_g vom Geschlecht $g \geq 0$ lässt sich analog schreiben als CW-Komplex mit einer Ecke $\{x_0\}$, $g + 1$ Kanten a_0, \dots, a_g und einer 2-Zelle. Die Verklebeabbildung sei gegeben durch die Schleife $a_0^2 \cdots a_g^2$, also gilt

$$\pi_1(Y_g, x_0) \cong \langle a_0, \dots, a_g \mid a_0^2 \cdots a_g^2 \rangle.$$

Für $g = 0$ erhalten wir $\mathbb{R}P^2$, für $g = 1$ die Kleinsche Flasche. In diesem Fall erhalten wir die Abelisierung

$$\pi_1(Y_g, x_0)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{g+1} / \langle (2, \dots, 2) \rangle \cong \mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

wobei die rechte Darstellung zu den Erzeugern a_1, \dots, a_g und $a_0 + \cdots + a_g$ gehört.

Wir sehen also, dass man die unterschiedlichen Flächen anhand ihrer Fundamentalgruppen unterscheiden kann.

2.f. Überlagerungen

Wir betrachten Überlagerungen $\tilde{X} \rightarrow X$ eines gegebenen topologischen Raumes X , und vergleichen die Fundamentalgruppen von \tilde{X} und X miteinander.

Wir erinnern uns an die Definition 2.25 von Überlagerungen. Eine Überlagerung heißt universell, wenn sie zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist.

2.55. BEISPIEL. In Beispiel 2.26 hatten wir bereits eine universelle Überlagerung $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ kennengelernt. Andere zusammenhängende Überlagerungen von $S^1 \subset \mathbb{C}$ sind von der Form

$$p_k: S^1 \longrightarrow S^1 \quad \text{mit} \quad z \longmapsto z^k$$

für $0 < k \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$\text{im } p_{k*} = k\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1, 1).$$

Wir werden später sehen, dass das bis auf Isomorphie alle zusammenhängenden Überlagerungen der S^1 sind.

Unter einem *Lift* einer Abbildung $F: Y \rightarrow X$ in eine Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ verstehen wir eine Abbildung $\tilde{F}: Y \rightarrow \tilde{X}$ mit $F = p \circ \tilde{F}$. Wenn wir von punktierten Räumen und Abbildungen $(Y, y_0) \rightarrow (X, x_0) \leftarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ sprechen, erwarten wir von einem Lift ebenfalls, dass er y_0 auf \tilde{x}_0 abbildet.

Wir erinnern uns an den Homotopie-Liftungssatz 2.27 und insbesondere an den Beweis des Satzes 2.28. Dort hatten wir für $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ gesehen, dass wir jede Schleife in (X, x_0) zu einem Weg in \tilde{X} mit vorgegebenem Anfangspunkt eindeutig liften können, und dass relativ homotope Schleifen zu relativ homotopen Wegen liften. Das dortige Argument überträgt sich auf alle Überlagerungen.

2.56. SATZ. Sei $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung, dann ist die Abbildung

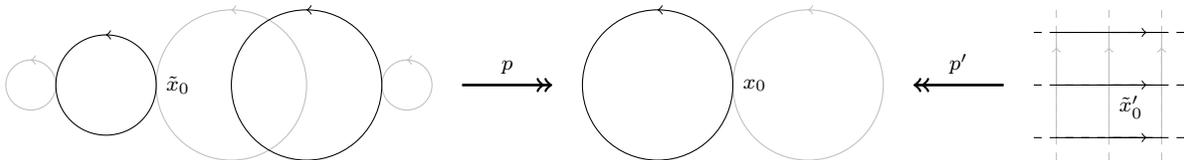
$$p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

injektiv, und für $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ liegt $[\gamma]$ genau dann im Bild von p_* , wenn γ einen Lift $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}_0$ besitzt.

BEWEIS. Sei $\tilde{\gamma}: S^1 \rightarrow \tilde{X}$ eine Schleife, so dass $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ relativ zu Anfangs- und Endpunkt nullhomotop ist. Dann lässt sich die Nullhomotopie mit Satz 2.27 zu einer relativen Nullhomotopie von $\tilde{\gamma}$ liften. Also ist p_* injektiv.

Eine Schleife γ , deren Lift $\tilde{\gamma}$ mit Anfangspunkt \tilde{x}_0 wiederum eine Schleife ist, liegt im Bild von p_* , da $p_*[\tilde{\gamma}] = [p \circ \tilde{\gamma}] = [\gamma]$. Sei umgekehrt γ eine Schleife mit $[\gamma] \in \text{im}(p_*)$. Dann ist γ homotop zu einer Schleife der Form $\gamma' = p \circ \tilde{\gamma}'$. Liften der Homotopie liefert eine Homotopie zwischen dem Lift $\tilde{\gamma}$ von γ mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ und $\tilde{\gamma}'$, also folgt $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1) = \tilde{x}_0$. \square

2.57. BEISPIEL. Die „Acht“ $X = S^1 \vee S^1$ hat sehr viele paarweise nicht isomorphe Überlagerungen, siehe [H1]. Wir werden sehen, dass das Bild im p_* der Fundamentalgruppe $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ in $\pi_1(X, x_0)$ die Überlagerung $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ bereits bis auf Isomorphie festlegt.



Wir wollen allgemeiner fragen, wann sich eine Abbildung $F: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ zu einer Abbildung $\tilde{F}: (Y, t_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $F = p \circ \tilde{F}$ liften lässt.

Wir erinnern uns an den Begriff „lokal wegzusammenhängend“ aus Definition 1.68. Falls Y lokal wegzusammenhängend ist, sind alle Wegzusammenhangskomponenten sowohl offen als auch abgeschlossen. Also ist Y in diesem Fall genau dann wegzusammenhängend, wenn Y zusammenhängend ist.

2.58. SATZ (Liftungssatz). Sei $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung, und sei Y zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann lässt sich eine Abbildung $F: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$

genau dann zu einer Abbildung $\tilde{F}: (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $F = p \circ \tilde{F}$ liften, wenn

$$\text{im } F_* \subset \text{im } p_* \subset \pi_1(X, p). \quad (*)$$

In diesem Fall ist der Lift \tilde{F} durch $\tilde{F}(y_0) = \tilde{x}_0$ eindeutig bestimmt.

Falls Y nicht zusammenhängend ist, müssen wir den Lift auf jeder Wegzusammenhangskomponente von Y einzeln konstruieren; eventuell benötigen wir dazu jeweils andere Basispunkte.

BEWEIS. Die Aussage „ \implies “ ist klar, da aus der Existenz von \tilde{F} bereits

$$\text{im } F_* = \text{im}(p_* \circ \tilde{F}_*) \subset \text{im } p_*$$

folgt.

Sei umgekehrt (*) erfüllt. Wir definieren einen Lift \tilde{F} wie folgt. Da Y wegzusammenhängend ist, können wir zu jedem $y \in Y$ einen Pfad σ von y_0 nach y angeben, und dazu wie im Beweis von Satz 2.28 einen Lift $\tilde{\tau}$ von $\tau = F \circ \sigma$ mit Anfangspunkt $\tilde{\tau}(0) = x_0$. Wir setzen $\tilde{F}(y) = \tilde{\tau}(1)$. Hieraus folgt auch bereits die Eindeutigkeit von \tilde{F} .

Um zu zeigen, dass \tilde{F} wohldefiniert ist, wählen wir einen weiteren Weg σ' von y_0 nach y und konstruieren einen Lift $\tilde{\tau}'$ von $\tau' = F \circ \sigma'$ wie oben. Dann ist $\tau'\tilde{\tau} \in \text{im } F_* \subset \text{im } p_*$ nach (*), also existiert ein geschlossener Lift $\tilde{\tau}'\tilde{\tau}$ nach Satz 2.56. Das heisst, ein Lift $\tilde{\tau}$ von $\tilde{\tau}$ startet bei $\tilde{\tau}'(1)$ und führt zu \tilde{x}_0 . Wegen der Eindeutigkeit des Lifts ist $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}'$, und es folgt $\tilde{\tau}(1) = \tilde{\tau}'(1)$, was zu zeigen war.

Zur Stetigkeit von \tilde{F} sei $y \in Y$, und sei U eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von $x = F(y)$ in X . Dann existiert eine Umgebung $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ von $\tilde{x} = \tilde{F}(y)$, so dass $p: \tilde{U} \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist. Hierbei können wir offensichtlich U so wählen, dass \tilde{U} als Umgebung von \tilde{y} beliebig klein wird. Wegen Stetigkeit von F ist $F^{-1}(U)$ offen, und es existiert eine wegzusammenhängende Umgebung $V \subset F^{-1}(U)$ von y .

Sei σ ein Weg von y_0 nach y . Sei $\tilde{\tau}$ der Lift von $\tau = F \circ \sigma$ wie oben, so dass also $\tilde{\tau}(1) = \tilde{F}(y)$. Sei $y' \in V$, und sei α ein Weg von y nach y' in V . Da $\beta = F \circ \alpha$ in U verläuft, hat β einen Lift $\tilde{\beta} = (p|_{\tilde{U}})^{-1} \circ \beta$ in \tilde{U} . Dann ist $\tilde{\tau}\tilde{\beta}$ ein Lift von $\tau\beta = F \circ (\sigma\alpha)$, und es folgt

$$\tilde{F}(y') = (\tilde{\tau}\tilde{\beta})(1) = \tilde{\beta}(1) \in \tilde{U}.$$

Also gilt $\tilde{F}(V) \subset \tilde{U}$, und da \tilde{U} beliebig klein gewählt werden kann folgt die Stetigkeit von \tilde{F} bei y . Da y beliebig war, ist \tilde{F} stetig. \square

2.59. BEMERKUNG. Der lokale Wegzusammenhang wurde nur eingesetzt, um die Stetigkeit von \tilde{F} nachzuweisen, er ist aber nötig für die Existenz des Liftes, siehe Übung 2.93. Zur Eindeutigkeit von \tilde{F} reicht Zusammenhang jedoch aus: Sei etwa $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung, und sei Y zusammenhängend. Seien $\tilde{F}, \tilde{F}': (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ Lifts von F . Dann ist die Menge

$$\{y \in Y \mid \tilde{F}(y) = \tilde{F}'(y)\} \subset Y$$

offen, abgeschlossen und nicht leer, also stimmen die Lifts auf ganz Y überein.

Eine Gruppenwirkung einer Gruppe G auf einem topologischen Raum X ist ein Homomorphismus von G in die Gruppe der Homöomorphismen von X . Unter Umständen trägt der Quotient X/G , dessen Punkte die Bahnen der G -Wirkung sind, wieder die Struktur eines topologischen Raumes, so dass die kanonische Abbildung $X \rightarrow X/G$ eine Überlagerung ist. Wir beschreiben zunächst diese Konstruktion. Später überlegen wir uns, welche Überlagerungen von Gruppenwirkungen kommen.

2.60. DEFINITION. Eine (*Gruppen-*) *Wirkung* oder *Operation* einer Gruppe Γ auf einem topologischen Raum X ist ein Gruppenhomomorphismus ρ von Γ in die Gruppe $\text{Aut } X$ der Homöomorphismen von X , schreibe ρ_γ oder kurz $\gamma: X \rightarrow X$ für das Bild von $\gamma \in \Gamma$.

Eine *Bahn* von ρ (oder auch kurz von Γ) ist eine Teilmenge der Form

$$\rho_\Gamma(x) = \Gamma x = \{\rho_\gamma(x) \mid \gamma \in \Gamma\} \subset X$$

mit $x \in X$. Der *Quotient*

$$X/\Gamma = \{\Gamma x \mid x \in X\} \subset \mathcal{P}X$$

ist die Menge aller Bahnen. Es bezeichne

$$p: X \longrightarrow X/\Gamma \quad \text{mit} \quad p(x) = \Gamma x$$

die Projektionsabbildung. Der Raum X/Γ trage die Quotiententopologie unter p .

Es folgen zwei Bedingungen an Gruppenwirkungen, die sicherstellen, dass die Projektionsabbildung eine Überlagerung ist.

2.61. DEFINITION. Eine Gruppenwirkung von Γ auf X heißt *frei*, wenn für alle $x \in X$ und alle $\gamma \in \Gamma$ aus $\gamma(x) = x$ bereits $\gamma = e$ folgt. Sie heißt *eigentlich diskontinuierlich*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U in X besitzt, so dass $\gamma(U) \cap U = \emptyset$ falls $\gamma(x) \neq x$.

Wenn Γ frei operiert, kann $\gamma(x) = x$ nur für das neutrale Element gelten.

2.62. BEISPIEL. Wir geben verschiedene Beispiele von Gruppenwirkungen.

- (1) Es sei $X = \mathbb{R}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$ und $\gamma(x) = x + \gamma$. Dann ist der Quotient \mathbb{R}/\mathbb{Z} homöomorph zu $S^1 \subset \mathbb{C}$ wie in Beispiel 2.26 via

$$\mathbb{Z}x \longmapsto e^{2\pi i x}.$$

Diese Wirkung ist frei und eigentlich diskontinuierlich. Wähle dazu als Umgebung von $x \in \mathbb{R}$ das Intervall $U = (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$, dann gilt $(x + n - \frac{1}{2}, x + n + \frac{1}{2}) \cap (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}) = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

- (2) Es sei $X = S^1 \subset \mathbb{C}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$, $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ eingekürzter Bruch und $\gamma(z) = e^{2\pi i r \gamma} \cdot z$. Elemente $\gamma \in q\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ wirken trivial, das heißt, es gilt $\gamma(z) = z$ für alle $z \in S^1$. Daher ist diese Wirkung nicht frei. Sie ist aber eigentlich diskontinuierlich: zu $z \in S^1$ wähle

$$U = \left\{ e^{2\pi i \varphi} \cdot z \mid \varphi \in \left(-\frac{1}{2q}, \frac{1}{2q} \right) \right\},$$

dann gilt $U \cap \rho_n(U) = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus q\mathbb{Z}$.

Die Faktorgruppe $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ wirkt ebenfalls auf S^1 . Der Quotient ist homöomorph zu S^1 via

$$(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})z \longmapsto z^q \in S^1,$$

und die Abbildung $S^1 \rightarrow S^1$ ist dieselbe wie in Beispiel 2.55. Diese Wirkung ist sowohl frei als auch eigentlich diskontinuierlich.

- (3) Es seien X , Γ wie in (2), aber $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann liegen alle Bahnen dicht in X . Da jede offene Menge alle Bahnen schneidet, ist X/Γ jetzt eine überabzählbare Menge mit der Klumpentopologie. Die Wirkung ist zwar frei, aber nicht eigentlich diskontinuierlich. Denn die Bahn von $z \in S^1$ trifft jede noch so kleine Umgebung U : Zu jeder Umgebung U von $z \in S^1$ existiert also $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $\rho_n(z) \in U$, insbesondere $U \cap \rho_n(U) \neq \emptyset$.

2.63. PROPOSITION. *Es sei ρ eine freie und eigentlich diskontinuierliche Wirkung einer Gruppe Γ auf X . Dann ist die Projektionsabbildung $p: X \rightarrow X/\Gamma$ eine Überlagerung.*

BEWEIS. Es sei $y = \Gamma x \in X/\Gamma$, und es sei U eine Umgebung von x wie in Definition 2.61. Es sei $V = p(U) \in X/\Gamma$, dann folgt aus Definition 2.61, dass

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(U) \subset X .$$

Wir dürfen U als offen annehmen. Dann sind alle $\gamma(U)$ offen, und $A \subset p^{-1}(V)$ ist genau dann offen, wenn alle $A \cap \gamma(U)$ offen sind. Also erhalten wir den gesuchten Homöomorphismus

$$p^{-1}(V) \cong \coprod_{\gamma \in \Gamma} \gamma(U) \cong \Gamma \times U ,$$

das heißt, $V \subset X/\Gamma$ ist gleichmäßig überlagert. Da das für alle $y \in X/\Gamma$ funktioniert, folgt unsere Behauptung. \square

2.64. BEMERKUNG. Der Raum X/Γ trägt die Quotiententopologie. Nach Bemerkung 1.74 ist nicht klar, dass sich „schöne“ Eigenschaften von X auf den Quotienten vererben. Als Beispiel betrachte den normalen Raum $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Hierauf operiert \mathbb{Z} durch $n(x, y) = (2^n x, 2^{-n} y)$. Da $(0,0) \notin X$, ist diese Operation frei und eigentlich diskontinuierlich. Sei etwa $(x, y) \in X$, dann können wir als Umgebung U wie in Definition 2.61 von x die Menge $(2^{-1/2}x, 2^{1/2}x) \times \mathbb{R}$ wählen, falls $x \neq 0$, oder die Menge $\mathbb{R} \times (2^{-1/2}y, 2^{1/2}y)$, falls $y \neq 0$.

Allerdings ist der Quotient nicht einmal Hausdorffsch. Die Punkte $a = p(x, 0)$ und $b = p(0, y) \in X/\Gamma$ lassen sich nicht trennen, denn für noch so kleine Umgebungen U von a und V von b gibt es ein hinreichend großes $n \in \mathbb{Z}$ so dass

$$U \ni p(x, 2^{-n}y) = p(2^{-n}x, y) \in V .$$

2.65. DEFINITION. Eine *Decktransformation* einer Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ ist ein Homöomorphismus $F: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$, so dass $p \circ F = p$. Eine zusammenhängende Überlagerung heißt *normal*, wenn es zu je zwei $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$ eine Decktransformation F mit $F(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ gibt.

Warnung: „normal“ hat hier nichts mit (T1) und (T4) zu tun, sondern mit dem Begriff des Normalteilers, siehe Folgerung 2.68.

2.66. BEMERKUNG. Die Decktransformationen einer gegebenen Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ bilden stets eine Gruppe Γ , die *Decktransformationsgruppe*. Sei \tilde{X} zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Da jede Decktransformation ein Lift \tilde{p} von $p: \tilde{X} \rightarrow X$ mit $\tilde{p}(\tilde{x}_0) = F(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ ist, operiert Γ wegen der Eindeutigkeit der Lifte frei. Indem wir Urbilder gleichmäßig überlagelter Umgebungen von Punkten in X betrachten, sehen wir, dass Γ auch eigentlich diskontinuierlich wirkt. Falls $p: \tilde{X} \rightarrow X$ normal ist, folgt $X \cong \tilde{X}/\Gamma$.

Seien umgekehrt X, Γ wie in Proposition 2.63 und X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann ist $p: X \rightarrow X/\Gamma$ eine normale Überlagerung, und Γ ist die Gruppe der Decktransformationen. Hier benutzen wir wieder die Eindeutigkeit im Liftungssatz 2.58, um zu zeigen, dass es keine weiteren Decktransformationen gibt.

2.67. BEISPIEL. Wir haben in Beispiel 2.62 schon gesehen, dass die zusammenhängenden Überlagerungen der S^1 in Beispiel 2.55 normal sind. Das linke Bild in Beispiel 2.57 besitzt keine Decktransformationen außer der Identität, ist also nicht normal. Für das rechte Bild erhalten wir eine Decktransformationsgruppe $\Gamma \cong \mathbb{Z}^2$, also ist dieses Beispiel normal. Dreht man aber nur je einen horizontalen und einen vertikalen Pfeil in dem Bild um, so erhält man eine neue Überlagerung ohne nichttriviale Decktransformationen.

2.68. FOLGERUNG (aus dem Liftungssatz 2.58). *Es sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine zusammenhängende, lokal wegzusammenhängende Überlagerung, seien $x_0 \in X$ und $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$, und sei $\tilde{\gamma}$ ein Weg in \tilde{X} von \tilde{x}_0 nach \tilde{x}_1 . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (1) *Es existiert eine Decktransformation $F: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ mit $F(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$.*
- (2) *Es gilt $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) \subset \pi_1(X, x_0)$.*
- (3) *Für $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ gilt $[\gamma]^{-1}p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))[\gamma] = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.*

Insbesondere ist p genau dann eine normale Überlagerung, wenn $\text{im } p_$ Normalteiler von $\pi_1(X, x_0)$ ist. In diesem Fall ist $\Gamma = \pi_1(X, x_0)/\text{im}(p_*)$ die Gruppe der Decktransformationen.*

BEWEIS. Da Decktransformationen invertierbar sind und die Abbildung p liften, folgt die Äquivalenz von (1) und (2) unmittelbar aus Satz 2.58.

Wie im Satz 2.15 liefert $\sigma \mapsto \bar{\gamma}\sigma\gamma$ einen Isomorphismus von $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. Es folgt

$$p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = [\gamma]^{-1}p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))[\gamma],$$

und daraus die Äquivalenz von (2) und (3). Da sich je zwei Wege $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ von \tilde{x}_0 nach \tilde{x}_1 bis auf Homotopie nur bis auf Verkettung mit der Schleife $\tilde{\gamma}_2\bar{\tilde{\gamma}}_1$ am Punkt \tilde{x}_0 unterscheiden, kommt es nicht auf die Wahl von $\tilde{\gamma}$ an.

Wenn $\text{im } p_*$ ein Normalteiler ist, gilt (3), wegen (1) existieren alle Decktransformationen, und p ist normal. Sei umgekehrt p normal, also gilt (1). Da es zwischen je zwei Punkten in $p^{-1}(x_0)$ einen Weg $\tilde{\gamma}$ gibt, folgt aus (3), dass $\text{im } p_*$ ein Normalteiler ist.

Um eine Wirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf \tilde{X} zu konstruieren, betrachten wir zu $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ die nach dem Liftungssatz 2.58 eindeutige Decktransformation $\rho_{[\gamma]}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$, die den Basispunkt \tilde{x}_0 auf den Endpunkt $\tilde{\gamma}(1)$ des Lifts $\tilde{\gamma}$ von γ mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ abbildet.

Wir müssen zeigen, dass ρ einen Gruppenhomomorphismus liefert. Sei dazu $[\gamma_1] \in \pi_1(X, x_0)$, und sei $\tilde{\gamma}_1$ der Lift von γ_1 mit $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{x}_0$. Dann folgt $\rho_{[\gamma_1]}(\tilde{x}_0) = \tilde{\gamma}_1(1)$. Außerdem ist $\tilde{\gamma}' = \rho_{[\gamma]} \circ \tilde{\gamma}$ ein Lift von γ mit $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{\gamma}_1(1)$, also ist die Verkettung $\widetilde{\gamma_1\gamma} = \tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}'$ ein Lift von $\gamma_1\gamma$ mit $\widetilde{\gamma_1\gamma}(0) = \tilde{x}_0$. Es folgt

$$\rho_{[\gamma_1]}(\rho_{[\gamma]}(\tilde{x}_0)) = \rho_{[\gamma_1]}(\tilde{\gamma}(1)) = \tilde{\gamma}'(1) = \widetilde{\gamma_1\gamma}(1) = \rho_{[\gamma_1\gamma]}(\tilde{x}_0).$$

Wegen der Eindeutigkeitsaussage im Liftungssatz 2.58 folgt $\rho_{[\gamma_1]} \circ \rho_{[\gamma]} = \rho_{[\gamma_1\gamma]}$, und wir erhalten eine Gruppenwirkung.

Da nach Satz 2.56 gerade die Elemente von $\text{im } p_*$ zu Schleifen in (\tilde{X}, \tilde{x}_0) liften, folgt $\ker \rho = \text{im } p_*$, so dass die Gruppe $\Gamma = \pi_1(X, x_0)/\text{im } p_*$ frei und wegen Bemerkung 2.66 auch eigentlich diskontinuierlich auf \tilde{X} operiert, mit $X \cong \tilde{X}/\Gamma$. \square

2.g. Die universelle Überlagerung

Nach Satz 2.56 bestimmt jede Überlagerung $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Untergruppe im p_* der Fundamentalgruppe von (X, x_0) . Wir wollen zeigen, dass es für geeignete Räume X umgekehrt zu jeder Untergruppe $G \subset \pi_1(X, x_0)$ bis auf Isomorphie genau eine zusammenhängende Überlagerung $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ mit $\text{im } p_* = G$ gibt. Dazu erinnern wir uns, dass eine Überlagerung nach Definition 2.25 universell heißt, wenn sie zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist. Eine universelle Überlagerung $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ haben wir in Beispiel 2.26 bereits kennengelernt.

Wir werden später sehen, dass die universelle Überlagerung von X jede zusammenhängende Überlagerung von X überlagert, daher der Name. Außerdem kann man jede beliebige (auch nicht zusammenhängende) Überlagerung mit Hilfe der universellen Überlagerung konstruieren.

2.69. DEFINITION. Ein topologischer Raum X heißt *semilokal einfach zusammenhängend*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, so dass $\text{im}(\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)) = 0$.

2.70. SATZ. Jeder zusammenhängende, lokal wegzusammenhängende und semilokal einfach zusammenhängende topologische Raum X mit $x_0 \in X$ hat eine universelle Überlagerung.

2.71. BEMERKUNG. Die Voraussetzung „semilokal einfach zusammenhängend“ wirkt technisch. Tatsächlich ist sie notwendig, siehe Übung 2.94. Sei nämlich $\tilde{X} \rightarrow X$ eine universelle Überlagerung, sei $U \subset X$ eine wegzusammenhängende, gleichmäßig überlagerte Umgebung von $x \in X$, sei \tilde{U} eine Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(U)$, sei $\tilde{x} \in \tilde{U}$ und $x = p(\tilde{x})$. Dann folgt $\text{im}(\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)) = \{e\}$ aus den folgenden kommutativen Diagrammen.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \longrightarrow & \tilde{X} & & \pi_1(\tilde{U}, \tilde{x}) & \longrightarrow & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = \{e\} \\ p|_{\tilde{U}} \downarrow \cong & & \downarrow p & \implies & (p|_{\tilde{U}})_* \downarrow \cong & & p_* \downarrow \\ U & \longrightarrow & X & & \pi_1(U, x) & \longrightarrow & \pi_1(X, x) \end{array}$$

BEWEIS von Satz 2.70. Angenommen, es gebe eine universelle Überlagerung. Dann wissen wir nach Satz 2.56, dass eine Schleife γ in X mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ genau dann zu einer Schleife in der universellen Überlagerung liftet, wenn sie in X nullhomotop ist. Wie immer folgt, dass zwei Wege σ, σ' von x_0 nach $x \in X$ genau dann Lifts $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'$ mit $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{\sigma}'(0) = \tilde{x}_0$ und gleichem Endpunkt $\tilde{x} = \tilde{\sigma}(1) = \tilde{\sigma}'(1)$ haben werden, wenn σ und σ' homotop sind. Also definieren wir

$$\tilde{X} = \{ \sigma : [0, 1] \rightarrow X \mid \sigma(0) = x_0 \} / \sim \quad \text{und} \quad p([\sigma]) = \sigma(1),$$

wobei „ \sim “ hier Homotopie relativ zu $\{0, 1\}$ bezeichne.

Zur Topologie von \tilde{X} sei zunächst $U \subset X$ offen und $x \in U$, dann hat x nach Voraussetzung eine wegzusammenhängende offene Umgebung $V \subset U$ mit $\text{im}(\pi_1(V, x) \rightarrow \pi_1(X, x)) = 0$. Also bildet

$$\mathcal{B} = \{ V \in \mathcal{O}_X \mid V \text{ wegzusammenhängend und } \text{im}(\pi_1(V, x) \rightarrow \pi_1(X, x)) = 0 \}$$

eine Basis von \mathcal{O}_X .

Für $V \in \mathcal{B}$ und einen Weg $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\sigma(0) = x_0$ und $\sigma(1) \in V$ setze

$$U(V, \sigma) = \{ [\sigma\beta] \mid \beta \text{ Weg in } V \text{ mit } \beta(0) = \sigma(1) \} \subset \tilde{X}.$$

Dann ist die Abbildung

$$U(V, \sigma) \longrightarrow V \quad \text{mit} \quad [\sigma\beta] \longmapsto \beta(1) \quad (*)$$

eine Bijektion, denn Surjektivität folgt, da V wegzusammenhängend ist, und Injektivität, da für zwei Wege β, β' mit gleichem Anfangspunkt x und gleichem Endpunkt die Schleife $\beta'\beta^{-1}$ in V ja in X zusammenziehbar ist, somit also auch $[\sigma\beta] = [\sigma\beta'] \in \tilde{X}$.

Wir definieren also eine Topologie auf \tilde{X} durch Angabe einer Basis

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{ U(V, \sigma) \mid V \in \mathcal{B} \text{ und } \sigma \text{ Weg in } X \text{ mit } \sigma(0) = x_0 \text{ und } \sigma(1) \in V \}.$$

Aus (*) folgt jetzt sofort die Stetigkeit von p und die Überlagerungseigenschaft, da alle $V \in \mathcal{B}$ gleichmäßig überlagert sind.

Es gilt $\text{im} p_* = 0$, denn sei $\tilde{\gamma}$ eine Schleife in \tilde{X} , dann zerlegen wir $[0, 1]$ in Teilintervalle $[t_i, t_{i+1}]$, so dass jedes Teilintervall in eine der Mengen $U(V_i, \sigma_i) \in \tilde{\mathcal{B}}$ abgebildet wird. Wir erhalten eine Nullhomotopie von $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$, indem wir ausnutzen, dass $\sigma_i \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \sim \sigma_{i+1}$ gilt (Bild). Aus Satz 2.56 folgt $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = 0$ da offensichtlich $\text{im} p_* = 0$. \square

2.72. BEMERKUNG. Auf der soeben konstruierten universellen Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ operiert die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ durch $[\gamma] \cdot [\sigma] = [\gamma\sigma]$. Außerdem folgt aus obigem Beweis, dass $\tilde{X}/\pi_1(X, x_0) \cong X$. Beides erhalten wir aber auch direkt aus Folgerung 2.68, da die Gruppe $\text{im} p_* = \{e\}$ trivial und insbesondere ein Normalteiler von $\pi_1(X, x_0)$ ist.

Die universelle Überlagerung erfüllt eine universelle Eigenschaft und ist daher bis auf eindeutige Isomorphie von punktierten Überlagerungen eindeutig bestimmt.

2.73. FOLGERUNG. *Es sei (X, x_0) zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, und es sei $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine universelle Überlagerung.*

- (1) *Es sei $q: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine weitere Überlagerung. Dann existiert genau eine Abbildung $r: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (Y, y_0)$ mit $p = q \circ r$, und r ist ebenfalls eine universelle Überlagerung von Y .*
- (2) *Sei insbesondere $p': (\tilde{X}', \tilde{x}'_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine weitere universelle Überlagerung, dann existiert ein eindeutiger Homöomorphismus $F: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{x}'_0)$, so dass $p = p' \circ F$.*

BEWEIS. Da \tilde{X} einfach zusammenhängend ist, folgt die Existenz und Eindeutigkeit eines Liftes r von p aus Satz 2.58, da $\{e\} = \text{im } p_* \subset \text{im } q_*$. Um zu sehen, dass r eine Überlagerung ist, wählen wir zu $y \in Y$ eine wegzusammenhängende Umgebung U von $x = q(y)$, die sowohl von p als auch von q gleichmäßig überlagert wird. Dann sind die Wegzusammenhangskomponenten von $p^{-1}(U)$ und $q^{-1}(U)$ jeweils homöomorph zu U via p beziehungsweise q . Sei $V \subset Y$ die Wegzusammenhangskomponente von $q^{-1}(U)$, die y enthält. Da $p = q \circ r$, und da stetige Abbildungen zusammenhängende Mengen auf zusammenhängende Mengen abbilden, ist $r^{-1}(V) \subset p^{-1}(U)$ eine disjunkte Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten von $p^{-1}(U)$. Also ist r eine Überlagerung von Y , und da \tilde{X} einfach zusammenhängend ist, sogar eine universelle.

Die zweite Aussage zeigt man mit dem üblichen universellen Trick. \square

Es seien X, \tilde{X} und Y wie oben. Aus Satz 2.56 und Folgerung 2.68 ergibt sich sofort, dass

$$Y \cong \tilde{X}/\pi_1(Y, y_0) \cong \tilde{X}/\text{im } q_* .$$

Auf diese Weise kann man eine Kategorie aller punktierten zusammenhängenden Überlagerungen von (X, x_0) konstruieren und zeigen, dass sie zur Kategorie aller Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$ äquivalent ist. Dabei ist ein Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Funktor, so dass

- (1) zu jedem $B \in \text{Obj}(\mathcal{B})$ ein $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ mit $\mathcal{F}A = B$ existiert, das heißt, so dass \mathcal{F} auf Objekten bis auf Isomorphie surjektiv ist, und
- (2) für alle $A, C \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ die Abbildung $\mathcal{F}: \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}C)$ eine Bijektion ist, das heißt, so dass \mathcal{F} auf Morphismen bijektiv ist.

In unserem Fall betrachten wir eine Kategorie, deren Objekte gerade Untergruppen G, H, \dots von $\pi_1(X, x_0)$ und deren Morphismen gerade die Inklusionsabbildungen sind, also

$$\text{Hom}(H, G) = \begin{cases} \{H \hookrightarrow G\} & \text{falls } H \subset G, \text{ und} \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Außerdem betrachten wir eine Kategorie, deren Objekte gerade punktierte, zusammenhängende Überlagerungen $p: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$, $q: (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ von (X, x_0) , \dots , und deren Morphismen $F: p \rightarrow q$ gerade punktierte Überlagerungen $r: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ mit $p = q \circ r$ sind. Als Funktoren erhalten wir zum einen die Zuordnung

$$\pi_1(X, x_0) \supset G \longmapsto \tilde{X}/G \quad \text{und} \quad (H \hookrightarrow G) \longmapsto (\tilde{X}/H \twoheadrightarrow \tilde{X}/G \text{ mit } Hx \mapsto Gx) ,$$

zum anderen die Zuordnung

$$p \longmapsto \text{im } p_* \subset \pi_1(X, x_0) \quad \text{und} \quad (p \twoheadrightarrow q) \longmapsto (\text{im } p_* \hookrightarrow \text{im } q_*) ;$$

für eine Äquivalenz von Kategorien hätte es gereicht, nur einen dieser zwei Funktoren anzugeben.

Einen ähnlichen Sachverhalt lernt man in der Algebra kennen. Dort klassifizieren die Untergruppen der Galois-Gruppe genau die Zwischenkörper in einer Galois-Körpererweiterung. Die Rolle der universellen Überlagerung spielt der algebraische Abschluss eines perfekten Körpers, siehe unten.

Allgemeiner kann man auch beweisen, dass die Kategorie aller Überlagerungen äquivalent ist zur Kategorie aller Gruppenwirkungen von $\pi_1(X, x_0)$ auf (diskreten) Mengen. Diese Kategorie umfasst die Kategorie der Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$, wobei man einer Untergruppe $\Gamma \subset \pi_1(X, x_0)$ die Menge der Rechtsnebenklassen $M = \pi_1(X, x_0)/\Gamma$ zuordnet. Um aus einer diskreten Menge M mit $\pi_1(X, x_0)$ -Wirkung eine Überlagerung zu konstruieren, betrachtet man den Quotienten

$$\tilde{X} \times_{\Gamma} M = (\tilde{X} \times M)/\Gamma,$$

wobei γ auf $\tilde{X} \times M$ durch $\gamma(\tilde{x}, m) = (\gamma\tilde{x}, \gamma m)$ wirkt. Die Bahnen der Γ -Wirkung auf M entsprechen genau den Zusammenhangskomponenten der Überlagerung $\tilde{X} \times_{\Gamma} M$. Die obige Zuordnung lässt sich zu einem Funktor ausbauen, von dem man wieder zeigen kann, dass er eine Äquivalenz von Kategorien liefert.

Zum Schluss dieses Kapitels geben wir ein „Wörterbuch“ zur Übersetzung zwischen Sachverhalten aus der Galois-Theorie und der Überlagerungstheorie an.

<i>Galois-Theorie</i>	<i>Überlagerungstheorie</i>
Perfekter Körper K	Zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender, semilokal einfach zusammenhängender, punktierter topologischer Raum (X, x_0)
Algebraische Erweiterung $L \supset K$	Zusammenhängende, punktierte Überlagerung $q: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$
Algebraischer Abschluss \bar{K}	Universelle Überlagerung $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$
Absolute Galoisgruppe $G = G(\bar{K}/K)$	Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$
abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$	Untergruppe $\Gamma \subset \pi_1(X, x_0)$
Fixkörper von H	Quotient $(\tilde{X}/\Gamma, \Gamma\tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$
Normale Erweiterung $L \supset K$	Normale Überlagerung $q: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$
Relative Galoisgruppe $G(L/K)$	Decktransformationsgruppe $\pi_1(X, x_0)/(\text{im } q_*)$

Die Parallelen sind klar erkennbar. Entscheidender Unterschied: alle „Pfeile“ in der Kategorie der algebraischen Erweiterungen verlaufen genau andersherum als in der Kategorie der punktierten Überlagerungen. Das liegt daran, dass die entsprechenden Äquivalenzen von Kategorien in der Galois-Theorie kontravariante Funktoren sind. Wenn wir anstelle der topologischen Räume X die Algebra der stetigen Funktionen $X \rightarrow \mathbb{C}$ betrachten, sind wir in einer ähnlichen Situation wie bei den Körpern. Wie Sie umgekehrt im Falle von Zahlkörpern zu einer „geometrischen“ Beschreibung kommen, lernen Sie in der arithmetischen Geometrie.

2.h. Übungen zu Kapitel 2

Übungen zu Abschnitt 2.a.

2.74. ÜBUNG. Sei (X, A) ein Paar und Y ein Raum. Zeigen Sie: Homotopie relativ zu A ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Abbildungen von X nach Y .

2.75. ÜBUNG. Seien X, Y, Z topologische Räume, und seien $F: X \rightarrow Y$ und $G: Y \rightarrow Z$ Homotopieäquivalenzen, dh., es existieren Abbildungen P, Q mit $P \circ F \sim \text{id}_X$, $F \circ P \sim \text{id}_Y \sim Q \circ G$ und $G \circ Q \sim \text{id}_Z$. Konstruieren Sie Homotopien

$$(P \circ Q) \circ (G \circ F) \sim \text{id}_X \quad \text{und} \quad (G \circ F) \circ (P \circ Q) \sim \text{id}_Z.$$

Insbesondere ist Homotopieäquivalenz eine Äquivalenzrelation.

Übungen zu Abschnitt 2.b.

2.76. ÜBUNG. Seien X, Y topologische Räume, seien $x \in X$ und $y \in Y$ Punkte. Finden Sie einen natürlichen Gruppenisomorphismus

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \cong \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y).$$

2.77. ÜBUNG. Sei X ein topologischer Raum. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen, in dem Sie jeweils geeignete Homotopien angeben.

- (1) Jede Abbildung $S^1 \rightarrow X$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung.
- (2) Jede Abbildung $F: S^1 \rightarrow X$ lässt sich zu einer Abbildung $\bar{F}: D^2 \rightarrow X$ mit $\bar{F}|_{\partial D^2} = F$ ausdehnen.
- (3) Die Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x)$ sind für alle $x \in X$ trivial.
- (4) Je zwei Wege zwischen zwei Punkten $x, y \in X$ sind homotop.

2.78. ÜBUNG. Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe eines wegzusammenhängenden Raumes X genau dann abelsch ist, wenn für alle $x, y \in X$ der Isomorphismus

$$\pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y), \quad [\gamma] \mapsto [\gamma_0^{-1} \gamma \gamma_0]$$

nicht vom Weg γ_0 von x nach y abhängt.

2.79. ÜBUNG. (1) Sei \circ eine Verknüpfung auf einer Menge G und $e \in G$. Dann sind äquivalent:

- (a) (G, \circ, e) ist eine Gruppe.
 - (b) Es gibt eine Kategorie \mathcal{G} in der jeder Morphismus invertierbar ist (siehe Bemerkung 2.6) mit $\text{Obj}(\mathcal{G}) = \{*\}$, $\text{Hom}_{\mathcal{G}}(*, *) = G$ mit Verknüpfung \circ und $\text{id}_* = e$.
- (2) Seien G, H Gruppen, \mathcal{G}, \mathcal{H} Kategorien wie in (1) und sei $F: G \rightarrow H$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:
- (a) F ist ein Gruppenhomomorphismus.
 - (b) Es gibt einen Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ mit $\mathcal{F}* = *$ und $\mathcal{F} = F: \text{Hom}_{\mathcal{G}}(*, *) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}}(*, *)$.

Übungen zu Abschnitt 2.c.

2.80. ÜBUNG. Seien T (Toast), S (Schinken) und A (Ananas) drei kompakte, paarweise disjunkte Teilmengen des \mathbb{R}^3 . Zeigen Sie, dass es eine Schnittebene $E \subset \mathbb{R}^3$ gibt, die jede der drei Teilmengen T, S und A in zwei Teile von gleichem Volumen zerlegt.

Hinweis: Zu jedem $v \in S^2$ existiert (mindestens) ein $d = d_v$, so dass die Hyperebene

$$\{x \mid \langle x, v \rangle = d\}$$

das gesamte Sandwich $T \cup S \cup A$ in zwei gleichgroße Teile teilt. Überlegen Sie sich, dass die Funktionen t, s und $a: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$t(v) = \text{vol}\{x \in T \mid \langle x, v \rangle \leq d_v\}$$

und s, a analog nicht von der Wahl von d_v wie oben, sondern nur von v abhängen, und in v stetig sind. Folgern Sie dann die Behauptung mit dem Satz von Borsuk-Ulam.

2.81. ÜBUNG. Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Algebra wie folgt. Sei $P = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n z^0: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Polynom. Zeigen Sie: Für $R > \max\{1, \sum_{i=1}^n |a_i|\}$ ist der Pfad

$$\gamma: S^1 \rightarrow S^1, \quad z \mapsto \gamma(z) := \frac{P(Rz)}{|P(Rz)|}$$

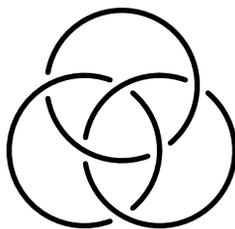
in S^1 homotop zu $\gamma_0: S^1 \rightarrow S^1, \gamma_0(z) = z^n$. Folgern Sie: P hat mindestens eine Nullstelle z_0 mit $|z_0| \leq R$.

Übungen zu Abschnitt 2.d.

2.82. ÜBUNG. Seien G, H Gruppen. Zeigen Sie:

- (1) Das Zentrum $Z(G * H) = \{z \in G * H \mid zw = wz \text{ für alle } w \in G * H\}$ von $G * H$ ist die triviale Gruppe $\{e\} = \{\emptyset\} \subset G * H$;
- (2) alle Torsionselemente (Elemente $w \in G * H$ mit $w^N = e$ für ein $N > 0$) sind von der Form $w = vgv^{-1}$ oder $w = vhv^{-1}$ mit $v \in G * H$ und $g \in G$ bzw. $h \in H$ mit $g^N = e$ bzw. $h^N = e$.

2.83. ÜBUNG. Zeigen Sie mit Hilfe von Beispiel 2.47 (2), dass die Borromäischen Ringe $R_1, R_2, R_3 \subset \mathbb{R}^3$ sich im umgebenden \mathbb{R}^3 nicht trennen lassen. Bestimmen Sie dazu die Äquivalenzklasse $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (R_1 \cup R_2), \gamma(0)) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ eines Weges γ , der R_3 parametrisiert.



2.84. ÜBUNG. Es sei

$$X = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ \frac{1}{n}(\cos \varphi + 1, \sin \varphi) \mid \varphi \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

versehen mit der Unterraumtopologie. Zeigen Sie, dass X überabzählbare Fundamentalgruppe hat, indem Sie für jede \mathbb{Z} -wertige Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Schleife angeben, die den Kreis mit Radius $\frac{1}{n}$ genau a_n -mal umläuft.

2.85. ÜBUNG. Es sei G eine Gruppe. Für $g, h \in G$ schreibe $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1} \in G$. Dann definiert man die Abolisierung von G als

$$G^{\text{ab}} = G / (\{[g, h] \mid g, h \in G\}).$$

Es sei $p: G \rightarrow G^{\text{ab}}$ die Projektion auf den Quotienten. Zeigen Sie:

- (1) Die Gruppe G^{ab} ist abelsch (kommutativ).
- (2) Sei H eine abelsche Gruppe und $f: G \rightarrow H$ ein Homomorphismus, dann gibt es genau einen Homomorphismus $\bar{f}: G^{\text{ab}} \rightarrow H$, so dass $f = \bar{f} \circ p$.

2.86. ÜBUNG. Seien G, H Gruppen, $p: G \rightarrow G^{\text{ab}}, q: H \rightarrow H^{\text{ab}}$ wie in Aufgabe 2.85, und $f: G \rightarrow H$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie:

- (1) Es gibt genau einen Homomorphismus $f^{\text{ab}}: G^{\text{ab}} \rightarrow H^{\text{ab}}$, so dass $q \circ f = f^{\text{ab}} \circ p$.
- (2) Dadurch wird Abolisierung zu einem Funktor von der Kategorie aller Gruppen in die der abelschen Gruppen.
- (3) Folgern Sie, dass die freien Gruppen F_k und F_l für $k \neq l$ nicht isomorph sind.

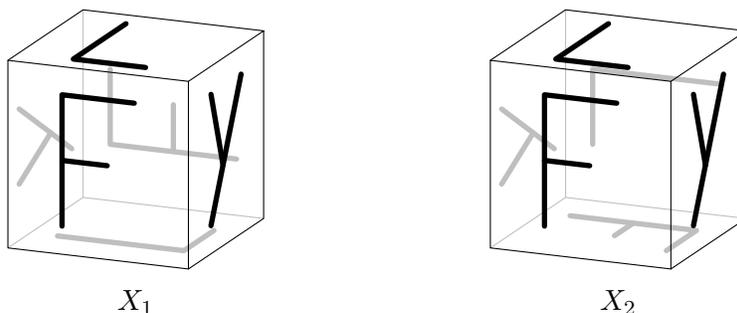
2.87. ÜBUNG. Es seien \mathcal{C}, \mathcal{D} zwei Kategorien, in denen es alle Produkte „ \times “, Koprodukte „ \sqcup “ und Pushouts „ \sqcup “ gibt, und sei $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor. Konstruieren Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaften Morphismen in \mathcal{D} , und zwar

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(A \times B) &\longrightarrow \mathcal{F}(A) \times \mathcal{F}(B), \\ \mathcal{F}(A) \sqcup \mathcal{F}(B) &\longrightarrow \mathcal{F}(A \sqcup B), \\ \mathcal{F}(A) \cup_{\mathcal{F}(C)} \mathcal{F}(B) &\longrightarrow \mathcal{F}(A \cup_C B), \end{aligned}$$

für alle Objekte A, B, C von \mathcal{C} und Morphismen $f: C \rightarrow A, g: C \rightarrow B$.

Übungen zu Abschnitt 2.e.

2.88. ÜBUNG. Man betrachte den Würfel $[0, 1]^3$ und erzeuge X_1, X_2 , indem man je zwei Seiten gemäß der beiden Skizzen identifiziert. Finden Sie eine CW-Struktur für *einen* der Räume X_i mit je zwei 0-Zellen, vier 1-Zellen, drei 2-Zellen und einer 3-Zelle, und beweisen Sie *entweder*, dass $\pi_1(X_1, x) = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ zur Gruppe der ganzen Einheits-Quaternionen isomorph ist, *oder* dass $\pi_1(X_2, x) = \mathbb{Z}_8$ zyklisch von der Ordnung 8 ist.



Anleitung: Färben Sie in der Skizze jeweils die Ecken und die Kanten, die miteinander identifiziert werden, gleich ein, und geben Sie den Kanten eine Richtung. Orientieren Sie sich dazu an den Buchstaben auf den Seiten. Ein maximaler Baum besteht aus einer Kante zwischen den Ecken. Die verbleibenden gerichteten Kanten liefern drei Erzeuger, die drei Flächen je eine Relation. Versuchen Sie, die so erhaltene Präsentation soweit wie möglich zu vereinfachen.

2.89. ÜBUNG. (1) Geben Sie eine CW-Zerlegung von $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ an, so dass $S^n \cap \mathbb{R}^{k+1} \times \{0\}$ aus zwei k -Zellen besteht für alle $0 \leq k \leq n$.

(2) Die Gruppe $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ operiert auf S^n durch Multiplikation. Zeigen Sie, dass der Quotient S^n/\mathbb{Z}_2 genau der reell projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ aus Aufgabe 1.130 ist.

(3) Berechnen Sie $\pi_1(\mathbb{R}P^n, [1 : 0 : \dots : 0])$ für $n \geq 2$.

2.90. ÜBUNG. Seien $X_1, X_2 \cong S^1 \times S^1$ zwei Tori. Erzeugen Sie X , indem Sie X_1 und X_2 entlang eines Kreises $S^1 \times \{1\}$ miteinander verkleben.

(1) Finden Sie eine CW-Struktur auf X und berechnen Sie so $\pi_1(X)$.

(2) Stellen Sie X als topologisches Produkt aus zwei bekannten Räumen dar, und berechnen Sie so $\pi_1(X)$.

Übungen zu Abschnitt 2.f.

2.91. ÜBUNG. Seien $p: \tilde{X} \rightarrow X$, $p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X_1$ und $p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X_2$ Überlagerungen. Zeigen Sie:

(1) sei $A \subset X$ eine Unterraum und $\tilde{A} = p^{-1}A \subset \tilde{X}$, dann ist $p|_{\tilde{A}}: \tilde{A} \rightarrow A$ eine Überlagerung;

(2) die natürliche Abbildung $p_1 \times p_2: \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \rightarrow X_1 \times X_2$ ist eine Überlagerung.

2.92. ÜBUNG. Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, wobei X zusammenhängend sei. Zeigen Sie:

(1) die Mengen $p^{-1}(\{x\}) \subset \tilde{X}$ sind für alle $x \in X$ gleichmächtig;

(2) der Raum \tilde{X} ist genau dann kompakt, wenn X kompakt ist und $p^{-1}(\{x_0\})$ endlich ist für ein $x_0 \in X$.

2.93. ÜBUNG. Wir betrachten den topologischen Raum

$$Y := \left\{ \left(2 + \sin \frac{\pi}{t} \right) e^{2\pi i t} \mid \varphi \in (0, 1] \right\} \cup [1, 3] \subset \mathbb{C}.$$

(1) Skizzieren Sie Y , und zeigen Sie, dass $\pi_1(Y) = 0$.

(2) Beweisen Sie, dass die Radialprojektion $F: Y \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$ dennoch keinen Lift $\tilde{F}: Y \rightarrow \mathbb{R}$ zulässt.

Übungen zu Abschnitt 2.g.

2.94. ÜBUNG. Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ die Vereinigung aller Kreise um $(\frac{1}{n}, 0)$ mit Radius $\frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ wie in Übung 2.84, und X trage die vom \mathbb{R}^2 induzierte Unterraumtopologie. Skizzieren Sie X und zeigen Sie, dass X keine einfach zusammenhängende Überlagerung besitzt.

2.95. ÜBUNG. Überlagerungstheorie benötigt keine Trennungseigenschaften. Sei $X = ((-1, 1) \times \{1, -1\}) / \sim$ der Ihnen wohlbekannte, nicht Hausdorffsche Raum aus Beispiel 1.29, wobei die Äquivalenzrelation „ \sim “ erzeugt werde von $(t, 1) \sim (t, -1)$ für alle $t \neq 0$.

- (1) Zeigen Sie, dass X zusammenhängend und lokal zusammenziehbar ist.
- (2) Bestimmen Sie die universelle Überlagerung von X .
- (3) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von X .

2.96. ÜBUNG. Bestimmen Sie wie in Folgerung 2.53 einen CW-Komplex mit Fundamentalgruppe isomorph zur unendlichen Diedergruppe, präsentiert durch

$$\langle a, b \mid a^2, b^2 \rangle \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

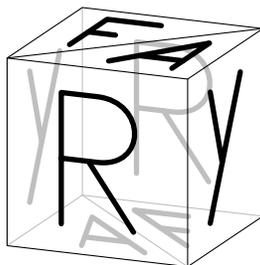
und seine universelle Überlagerung. Sie dürfen Beispiel 2.54 (2) zu Hilfe nehmen.

2.97. ÜBUNG. Bestimmen Sie alle zusammenhängenden punktierten Überlagerungen der beiden Räume X_1 und X_2 aus Übung 2.88 bis auf punktierte Überlagerungs-Homöomorphismen, und geben Sie gegebenenfalls die Gruppe der Decktransformationen an.

2.98. ÜBUNG. Verkleben Sie die acht Seiten des unten skizzierten Polytopes wie angegeben, und zeigen Sie, dass der entstehende topologische Raum X die Fundamentalgruppe

$$\pi_1(X, x_0) \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ & 1 & b \\ & & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

besitzt. Finden Sie eine universelle Überlagerung. Wie kann man eine Überlagerung von X konstruieren, die nicht normal ist?



Homotopiegruppen

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir die Fundamentalgruppe aus der Topologie und erhalten höhere Homotopiegruppen. Wir lernen einige Berechnungsmethoden kennen, unter anderem die lange exakten Sequenzen für Paare und für Faserungen.

Als Beispiel zeigen wir, dass eine stetige Abbildung der n -dimensionalen Sphäre S^n in sich durch ihren Abbildungsgrad in \mathbb{Z} bis auf Homotopie eindeutig bestimmt wird, mit anderen Worten gilt $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Als Anwendung beweisen wir den Brouwerschen Fixpunktsatz 0.2. Höhere Homotopiegruppen $\pi_{n+k}(S^n)$ der Sphären lassen sich geometrisch als sogenannte gerahmte Bordismusgruppen k -dimensionaler Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^{n+k} interpretieren.

Da wir zur Berechnung der Homotopiegruppen nur wenige Werkzeuge haben, führen wir außerdem stabile Homotopiegruppen ein. Die höheren stabilen Homotopiegruppen der Sphären sind zwar leichter zu bestimmen als die $\pi_k(S^n)$, sind aber dennoch bis zum heutigen Tage noch nicht vollständig bekannt.

3.a. Höhere Homotopiegruppen

Wir betrachten zunächst die Kategorie \mathcal{Top}_+ der punktierten topologischen Räume aus Definition 2.19. Da wir in diesem Kapitel fast nur punktierte Räume betrachten, schreiben wir statt (X, x_0) auch manchmal nur kurz X . Eine Homotopie zwischen zwei punktierten Abbildungen $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ist eine Homotopie relativ zu $\{x_0\}$, siehe Definitionen 2.2 und 2.8. Falls eine solche Homotopie existiert, nennen wir f und g homotop in \mathcal{Top}_+ und schreiben wieder kurz $f \sim g$. Wie in Bemerkung 2.3 erhalten wir eine Äquivalenzrelation, die mir der Verkettung von stetigen Abbildungen verträglich ist.

Indem wir als Morphismen zwischen punktierten Räumen nicht einzelne punktierte stetige Abbildungen, sondern punktierte Homotopieklassen betrachten, erhalten wir die punktierte Homotopiekategorie \mathcal{HTop}_+ , siehe Definition 2.19. Streng genommen sollten wir hier nur gut punktierte Räume zulassen, siehe Definition 3.55 und Beispiel 4.64 (2) unten. Wir schreiben dafür kurz

$$[X, Y] = [(X, x_0), (Y, y_0)] = \text{Hom}_{\mathcal{HTop}_+}((X, x_0), (Y, y_0)) .$$

In Satz 2.21 haben wir bereits gesehen, dass die Fundamentalgruppe einen kovarianten Funktor $\pi_1: \mathcal{HTop}_+ \rightarrow \mathcal{Grp}$ definiert. Wir wollen jetzt weitere Funktoren π_n auf \mathcal{HTop}_+ definieren. Für $n = 0$ erhalten wir nur punktierte Mengen, für $n \geq 2$ erhalten wir abelsche Gruppen.

Es seien $A \subset X$ topologische Räume, dann bezeichne $X/A \in \mathcal{Top}_+$ den Quotientenraum mit Basispunkt A/A . Er trage die Quotiententopologie aus Definition 1.71, die zugrundeliegende Äquivalenzrelation hat dann also A als eine Äquivalenzklasse, alle Punkte von $X \setminus A$ hingegen bilden je einpunktige Äquivalenzklassen. Falls $A = \emptyset$ und X kompakt ist, definieren wir

$$X/\emptyset = X_+ \cong X \sqcup \{*\} \in \mathcal{Top}_+ ,$$

wir fügen also zu X einen zusätzlichen Basispunkt $*$ mit der Topologie der disjunkten Vereinigung (Definition 1.39) hinzu. Übrigens ist der Funktor $\cdot_+ : \mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{Top}_+$ linksadjungiert zum vergesslichen Funktor $\mathcal{Top}_+ \rightarrow \mathcal{Top}$, das heißt, für einen unpunktieren Raum X und einen punktierten Raum Y

gilt

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}op_+}(X_+, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y) .$$

Es sei $I = [0, 1]$ das Einheitsintervall und I^k der k -dimensionale Einheitswürfel, dann bezeichne

$$\partial I^k = I^k \setminus (0, 1)^k$$

den (*geometrischen*) *Rand* des Einheitswürfels. Im Falle $k = 0$ ist $\partial(I^0) = \partial \text{pt} = \emptyset$ leer, dabei ist pt ein fester einpunktiger Raum. Nach Übung 3.103 gibt es für alle k einen Homöomorphismus

$$I^k / \partial I^k \cong S^k .$$

Den Basispunkt, also die Äquivalenzklasse des Randes ∂I^k , identifizieren wir mit dem Nordpol.

3.1. DEFINITION. Für einen punktierten Raum X und $k \geq 0$ definieren wir die k -te *Homotopiegruppe*

$$\pi_k(X) = ([I^k / \partial I^k, X], 0) ,$$

dabei sei $0 \in \pi_k(X)$ die Homotopieklasse der konstanten Abbildung $c(t_1, \dots, t_k) = x_0$. Sei $F: X \rightarrow Y$ eine punktierte Abbildung, dann definieren wir $\pi_k F: \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(Y)$ durch

$$\pi_k F([f]) = [F \circ f] .$$

Sei schließlich $k \geq 1$ und $a = [f], b = [g] \in \pi_k(X)$, dann definieren wir $ab = [fg] \in \pi_k(X)$, wobei

$$(fg)(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} f([2t_1, t_2, \dots, t_k]) & \text{falls } t_1 \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ g([2t_1 - 1, t_2, \dots, t_k]) & \text{falls } t_1 \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Wie in Bemerkung 2.3 und Satz 2.14 folgt, dass die Verknüpfung und die Abbildung $\pi_k F$ wohldefiniert sind. Für $k = 0$ erhalten wir keine Gruppe, da wir keine Verknüpfung definiert haben, so dass wir hier eigentlich nur 0-te *Homotopiemenge* sagen dürften. Für $\pi_k F$ schreibt man oft auch kurz F_* , und für ab schreibt man meist $a + b$, wenn $k \geq 2$.

3.2. BEMERKUNG. Wir können $\pi_k(X)$ auch wie folgt beschreiben.

- (1) Für $k = 0$ ist $I^0 / \partial I^0 \cong \{0\} / \emptyset \cong S^0$ ein diskreter Raum aus zwei Punkten $*$ (Basispunkt, Nordpol) und 0 (Südpol). Die Menge der punktierten Abbildungen $f: S^0 \rightarrow X$ entspricht genau den Punkten $x \in X$, wobei $f(*) = x_0$ und $f(0) = x$. Eine Homotopie h zwischen solchen Abbildungen bildet $\{*\} \times I$ konstant auf x_0 ab, und

$$\gamma = h|_{\{0\} \times I}: I \rightarrow X \quad \text{mit} \quad \gamma(t) = h(0, t)$$

beschreibt einen Weg von $f(0)$ nach $g(0)$. Umgekehrt liefert jeder Weg $\gamma: I \rightarrow X$ von $f(0)$ nach $g(0)$ eine punktierte Homotopie h zwischen f und g mit

$$h(s, t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{falls } s = 0, \text{ und} \\ x_0 & \text{falls } s = *. \end{cases}$$

Somit ist $\pi_0(X)$ gerade die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X , und $0 \in \pi_0(X)$ bezeichnet die Wegzusammenhangskomponente des Basispunktes x_0 .

- (2) Für $k = 1$ ist eine punktierte Abbildung $f: S^1 \rightarrow X$ gerade eine Schleife am Basispunkt x_0 , und 0 bezeichnet die konstante Schleife. Die Verkettung entspricht der üblichen Verkettung von Schleifen. Also ist $\pi_1(X)$ genau die Fundamentalgruppe von X aus Abschnitt 2.b.
- (3) Da es für alle k einen Homöomorphismus $I^k / \partial I^k \rightarrow (S^k, *)$ gibt, gibt es eine natürliche Bijektion

$$\pi_k(X) \cong [S^k, X] .$$

3.3. DEFINITION. Es seien \mathcal{C}, \mathcal{D} Kategorien und $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ kovariante (kontravariante) Funktoren. Eine *natürliche Transformation* $\tau: F \rightarrow G$ ordnet jedem Objekt X von \mathcal{C} einen Morphismus $\tau_X: F(X) \rightarrow G(X)$ in \mathcal{D} so zu, dass für jeden Morphismus $f: X \rightarrow Y$ in \mathcal{C} das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(X) \xrightarrow{Ff} F(Y) & & F(X) \xleftarrow{Ff} F(Y) \\ \tau_X \downarrow & & \tau_X \downarrow \\ G(X) \xrightarrow{Gf} G(Y) & \text{beziehungsweise} & G(X) \xleftarrow{Gf} G(Y) \\ & & \tau_Y \downarrow \end{array}$$

kommutiert. Wenn τ_X für alle X ein Iso-/Mono-/Epimorphismus ist, spricht man entsprechend von einem *natürlichen* Iso-/Mono-/Epimorphismus.

Oftmals wird das Adjektiv „natürlich“ benutzt, ohne die beteiligten Funktoren im einzelnen zu spezifizieren. In der obigen Bemerkung 3.2 (3) erhalten wir beispielsweise einen natürlichen Isomorphismus zwischen den Funktoren π_k und $[S^k, \cdot]: \mathcal{HTop}_+ \rightarrow \mathcal{Set}_+$.

3.4. BEISPIEL. Der einpunktige Raum pt ist initiales (kofinales) und terminales (finales) Objekt in der Kategorie \mathcal{Top}_+ . Das heißt, zu jedem punktierten Raum (X, x_0) gibt es genau eine punktierte Abbildung $\text{pt} \rightarrow X$, nämlich $*$ $\mapsto x_0$ (pt ist *initial*), und genau eine Abbildung $X \rightarrow \text{pt}$, nämlich die konstante Abbildung (pt ist *terminal*). Ein initiales und terminales Objekt heißt auch *Nullobjekt*.

Insbesondere sei $X = S^k$. Wegen Bemerkung 3.2 (3) gilt

$$\pi_k(\text{pt}) \cong [S^k, \text{pt}] = \{e\} = 0.$$

Für unser nächstes Zwischenergebnis benötigen wir drei weitere Kategorien. Die Kategorie \mathcal{Set}_+ der *punktierten Mengen* hat als Objekte Paare (A, a_0) aus einer Menge A mit einem ausgezeichneten Element $a_0 \in A$. Manchmal schreiben wir wieder kurz A für (A, a_0) . Wie bei den punktierten Räumen definieren wir

$$\text{Hom}_{\mathcal{Set}_+}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{Set}_+}((A, a_0), (B, b_0)) = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_0) = b_0\}.$$

Außerdem sei \mathcal{Grp} die Kategorie der Gruppen, mit Gruppenhomomorphismen als Morphismen, und \mathcal{Ab} sei die Kategorie der abelschen Gruppen, wiederum mit Gruppenhomomorphismen als Morphismen.

Wir erhalten „vergessliche“ Funktoren

$$\mathcal{Ab} \longrightarrow \mathcal{Grp} \longrightarrow \mathcal{Set}_+.$$

Da jede abelsche Gruppe insbesondere eine Gruppe ist, ist der erste Funktor eine Einbettung. Die Kategorie \mathcal{Ab} ist sogar eine *volle Unterkategorie* von \mathcal{Grp} , das heißt, für zwei Objekte $A, B \in \mathcal{Ab}$ gilt

$$\text{Hom}_{\mathcal{Ab}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{Grp}}(A, B).$$

Der zweite Funktor $\mathcal{Grp} \rightarrow \mathcal{Set}_+$ ordnet jeder Gruppe A mit neutralem Element e die punktierte Menge (A, e) zu. Da jeder Gruppenhomomorphismus die neutralen Elemente aufeinander abbildet, ist er auch ein Morphismus punktierter Mengen.

3.5. SATZ. *Die Homotopiegruppen haben folgende Eigenschaften.*

- (1) Für alle $k \geq 0$ ist $\pi_k: \mathcal{HTop}_+ \rightarrow \mathcal{Set}_+$ ein Funktor.
- (2) Für alle $k \geq 1$ ist $\pi_k: \mathcal{HTop}_+ \rightarrow \mathcal{Grp}$ ein Funktor.
- (3) Für alle $k \geq 2$ ist $\pi_k: \mathcal{HTop}_+ \rightarrow \mathcal{Ab}$ ein Funktor.

Damit sind die wichtigsten elementaren Eigenschaften der π_k bereits zusammengefasst. Insbesondere sind die Homotopiegruppen homotopieinvariant, verträglich mit punktierten Abbildungen, und für $k \geq 2$ sogar abelsche Gruppen.

BEWEIS. Der Beweis von (1) und (2) ist ähnlich wie bei der Fundamentalgruppe, siehe Satz 2.14 und Satz 2.21.

Wir beginnen mit (1) für $k \geq 0$ beliebig, dabei hilft Bemerkung 3.2 (1), den Fall $k = 0$ besser zu verstehen. Seien $F: X \rightarrow Y$ und $f_0 \sim f_1: I^k/\partial I^k \rightarrow X$ punktiert homotope punktierte Abbildungen. Wie in Bemerkung 2.3 (2) sind dann auch $F \circ f_0$ und $F \circ f_1: I^k/\partial I^k \rightarrow Y$ punktiert homotop, so dass

$$\pi_k F([f_0]) = [F \circ f_0] = [F \circ f_1] = \pi_k F([f_1]) .$$

Wir erhalten also in der Tat eine Abbildung

$$\pi_k F: \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(Y) .$$

Es gilt offensichtlich $\pi_k \text{id}_X = \text{id}_{\pi_k(X)}$. Für $F: X \rightarrow Y$, $G: Y \rightarrow Z$ und $f: I^k/\partial I^k \rightarrow X$ folgt außerdem

$$\pi_k(G \circ F)([f]) = [G \circ F \circ f] = \pi_k G([F \circ f]) = \pi_k G(\pi_k F([f])) ,$$

also gilt auch $\pi_k(G \circ F) = (\pi_k G) \circ (\pi_k F)$, und π_k ist insbesondere ein Funktor von der Kategorie \mathcal{Top}_+ in die Kategorie \mathcal{Set}_+ der punktierten Mengen.

Seien jetzt $F_0 \sim F_1: X \rightarrow Y$ punktiert homotop, und sei $f: I^k/\partial I^k \rightarrow X$ eine punktierte Abbildung. Dann sind $F_0 \circ f$, $F_1 \circ f$ nach Bemerkung 2.3 (2) punktiert homotop, also gilt

$$\pi_k F_0([f]) = [F_0 \circ f] = [F_1 \circ f] = \pi_k F_1([f]) .$$

Somit ist π_k mit Homotopie verträglich und liefert daher eine Abbildung

$$\pi_k: \text{Hom}_{\mathcal{HTop}_+}(X, Y) = [X, Y] \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{Set}_+}(\pi_k(X), \pi_k(Y)) .$$

Also ist π_k sogar ein Funktor von der Kategorie \mathcal{HTop}_+ in die Kategorie \mathcal{Set}_+ der punktierten Mengen. Damit ist (1) gezeigt.

Zu (2) sei $k \geq 1$. Punktierte Homotopien $H_1, H_2: (I^k/\partial I^k) \times I \rightarrow X$ zwischen f_1 und g_1 beziehungsweise f_2 und $g_2: I^k/\partial I^k \rightarrow X$ lassen sich zusammensetzen zu einer Homotopie H zwischen $f_1 f_2$ und $g_1 g_2$ mit

$$H([t_1, \dots, t_k], s) = \begin{cases} H_1([2t_1, t_2, \dots, t_k], s) , & \text{falls } t_1 \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ H_2([2t_1 - 1, t_2, \dots, t_k], s) , & \text{falls } t_1 \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Genauso wie in Definition 3.1 behandeln wir also die Variable t_1 so, wie die Variable t in Definition 2.13 und im Beweis von Satz 2.14. Mit dem gleichen Trick lassen sich die Homotopien aus dem Beweis von Satz 2.14 zum Beweis der Gruppenaxiome auf die hiesige Situation übertragen.

Außerdem gilt wie im Beweis von Satz 2.21 für $F: X \rightarrow Y$ und $f, g: I^k/\partial I^k \rightarrow X$, dass

$$\pi_k F([f]) \pi_k F([g]) = (F \circ f)(F \circ g) = F \circ (fg) = \pi_k F([fg]) ,$$

also ist $\pi_k F$ ein Gruppenhomomorphismus. Die Funktoraxiome

$$\pi_k \text{id}_X = \text{id}_{\pi_k(X)} \quad \text{und} \quad \pi_k(F \circ G) = \pi_k F \circ \pi_k G$$

folgen bereits aus (1), also ist (2) bewiesen.

Zum Beweis von (3) benötigen wir die Variablen t_1 und t_2 . Wir definieren eine punktierte Homotopie H zwischen fg und gf durch

$$H([t_1, \dots, t_k], s) = \begin{cases} f([2t_1, \frac{t_2}{1-2s}, t_3, \dots, t_k]) & \text{für } s \in [0, \frac{1}{4}], \quad t_1 \in [0, \frac{1}{2}], \quad t_2 \in [0, 1-2s], \\ g([2t_1 - 1, \frac{t_2-2s}{1-2s}, t_3, \dots, t_k]) & \text{für } s \in [0, \frac{1}{4}], \quad t_1 \in [\frac{1}{2}, 1], \quad t_2 \in [2s, 1], \\ f([2(t_1 - s) + \frac{1}{2}, 2t_2, \dots]) & \text{für } s \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], \quad t_1 \in [s - \frac{1}{4}, s + \frac{1}{4}], \quad t_2 \in [0, \frac{1}{2}], \\ g([2(t_1 + s) - \frac{3}{2}, 2t_2 - 1, \dots]) & \text{für } s \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], \quad t_1 \in [\frac{3}{4} - s, \frac{5}{4} - s], \quad t_2 \in [\frac{1}{2}, 1], \\ f([2t_1 - 1, \frac{t_2}{2s-1}, t_3, \dots, t_k]) & \text{für } s \in [\frac{3}{4}, 1], \quad t_1 \in [\frac{1}{2}, 1], \quad t_2 \in [0, 2s-1], \\ g([2t_1, \frac{t_2+2s-2}{2s-1}, t_3, \dots, t_k]) & \text{für } s \in [\frac{3}{4}, 1], \quad t_1 \in [0, \frac{1}{2}], \quad t_2 \in [2-2s, 1], \\ x_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hieraus folgt, dass $\pi_k(X)$ abelsch ist für $k \geq 2$. Nach (2) ist $\pi_k F: \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(Y)$ für alle stetigen Abbildungen $F: X \rightarrow Y$ ein Homomorphismus, der nach (1) nur von der punktierten Homotopieklasse von F abhängt, also erhalten wir einen Funktor $\pi_k: \mathcal{HTop}_+ \rightarrow \mathcal{Ab}$. \square

3.6. BEMERKUNG. Nach Bemerkung 2.6 sind Isomorphismen in der Homotopiekategorie \mathcal{HTop}_+ gerade punktierte Homotopieäquivalenzen. Ein topologischer Raum ist nach Beispiel 2.5 genau dann zusammenziehbar, wenn er zum einpunktigen Raum pt homotopieäquivalent ist. Da ein Funktor isomorphe Objekte auf isomorphe Objekte abbildet, folgt aus Beispiel 3.4, dass

$$X \text{ zusammenziehbar} \quad \implies \quad \pi_k(X) = 0 \text{ für alle } k \geq 0.$$

Wir werden später im Satz von Whitehead sehen, dass für eine große Klasse topologischer Räume auch die Umkehrung gilt.

3.7. PROPOSITION. Für alle $k \geq 1$ liefert jede relative Homotopieklasse $[\gamma]$ von Pfaden von x_0 nach x_1 einen Isomorphismus

$$[\gamma]: \pi_k(X, x_1) \rightarrow \pi_k(X, x_0) \quad \text{mit} \quad [\gamma] \cdot [f] = [\gamma \cdot f],$$

$$\text{wobei} \quad \gamma \cdot f = \begin{cases} f(2t_1 - \frac{1}{2}, \dots, 2t_k - \frac{1}{2}) & \text{für } \frac{1}{4} \leq t_1, \dots, t_k \leq \frac{3}{4}, \text{ und} \\ \gamma(2 - 4 \max\{|t_1 - \frac{1}{2}|, \dots, |t_k - \frac{1}{2}|\}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere wirkt die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ durch Gruppenautomorphismen auf $\pi_k(X)$.

Für $k = 1$ erhalten wir innere Automorphismen von $\pi_1(X)$, siehe Bemerkung 2.16.

BEWEIS. Mit ähnlichen Methoden wie im vorangegangenen Beweis überprüft man die folgenden Aussagen.

- (1) Die Abbildung $\gamma \cdot f$ ist stetig.
- (2) Relativ homotope Pfade γ_0, γ_1 von x_0 nach x_1 und punktiert homotope Abbildungen $f_0, f_1: I^k / \partial I^k \rightarrow (X, x_1)$ liefern punktiert homotope Abbildungen $\gamma_0 \cdot f_0, \gamma_1 \cdot f_1$. Wenn wir Schleifen an x_0 betrachten, erhalten wir also eine wohldefinierte Abbildung $\pi_1(X) \times \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(X)$.
- (3) Es gilt $\gamma_0 \cdot (\gamma_1 \cdot f) \sim (\gamma_0 \gamma_1) \cdot f$, und für den konstanten Pfad e gilt $e \cdot f \sim f$. Wenn wir Schleifen an x_0 betrachten, ist die obige Abbildung also eine Gruppenwirkung.
- (4) Die obige Operation ist mit der Gruppenstruktur auf $\pi_k(X)$ verträglich. \square

Wir wollen uns jetzt die Menge $\text{Hom}_{\mathcal{HTop}}(S^n, X) = [S_+^n, X]$ der freien Homotopieklassen von Abbildungen von S^n nach X anschauen.

3.8. FOLGERUNG (aus Proposition 3.7). *Es sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum und $k \geq 1$. Dann steht die Menge $[S_+^n, X]$ der freien Homotopieklassen nicht punktierter Abbildungen $S^n \rightarrow X$ in natürlicher Bijektion zur Menge $\pi_k(X)//\pi_1(X)$ der Orbits der $\pi_1(X)$ -Wirkung auf $\pi_k(X)$.*

Wir schreiben hier $\pi_k(X)//\pi_1(X)$ um deutlich zu machen, dass es sich nicht um den Quotienten nach einer Untergruppe handelt.

BEWEIS. Fixiere $x_0 \in X$. Es sei $f: S^k \rightarrow X$ gegeben, dann wählen wir einen Weg γ in X von x_0 zu $f(e_1)$ und erhalten nach Proposition 3.7 ein Element $[\gamma \cdot f] \in \pi_k(X, x_0)$. Für einen weiteren Weg γ' gilt dann

$$[\gamma' \cdot f] = [\gamma' \bar{\gamma}] \cdot [\gamma \cdot f],$$

der Orbit von $[\gamma \cdot f]$ unter der $\pi_1(X, x_0)$ -Wirkung hängt also nicht von der Wahl von γ ab.

Sei h eine freie Homotopie zwischen f und $g: S^n \rightarrow X$, dann setzen wir $\gamma(t) = h(e_1, t)$. Mithilfe von h lässt sich eine punktierte Homotopie zwischen f und $\gamma \cdot g$ konstruieren, so dass der obige Orbit auch nicht von der freien Homotopieklassen von f abhängt. Also ist die obige Zuordnung wohldefiniert. Sie ist auch natürlich im Sinne von Definition 3.3, denn sei $F: X \rightarrow Y$ stetig, dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [S_+^n, X] & \longrightarrow & \pi_k(X)//\pi_1(X) \\ F \circ \downarrow & & \downarrow F_* \\ [S_+^n, Y] & \longrightarrow & \pi_k(Y)//\pi_1(Y). \end{array}$$

Surjektivität ist klar, da wir jede punktierte Abbildung als nicht punktierte Abbildung auffassen können. Zur Injektivität bleibt zu zeigen, dass $f, g: S^k \rightarrow X$ frei homotop sind, wenn $[\gamma \cdot f] = [\gamma' \cdot g]$ für geeignete Wege γ, γ' gilt. Aber das folgt, da $\gamma \cdot f$ stets frei homotop zu f ist. \square

3.9. DEFINITION. Es sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum und $k \geq 1$. Wir definieren den k -ten Schleifenraum von (X, x_0) durch

$$\Omega^k(X) = \Omega^k(X, x_0) = \{ f: I^k \rightarrow X \mid \partial I^k \subset f^{-1}(x_0) \} \subset C(I^k, X),$$

wobei $C(I^k, X)$ die kompakt-offene und $\Omega^k(X, x_0)$ die Unterraumtopologie trage. Als Basispunkt von $\Omega^k(X, x_0)$ fixieren wir die konstante Abbildung auf x_0 .

3.10. BEMERKUNG. Es gilt (Übung 3.105, siehe Bemerkung 2.17):

- (1) für $k, \ell \geq 0$ gilt $\Omega^k(\Omega^\ell(X)) \cong \Omega^{k+\ell}(X)$;
- (2) für $k, \ell \geq 0$ gilt $\pi_k(\Omega^\ell(X)) \cong \pi_{k+\ell}(X)$.

3.b. Die lange exakte Homotopiesequenz eines Paares

Ein *punktiertes Paar* (X, A) besteht aus einem punktierten topologischen Raum X mit Basispunkt x_0 und einer Teilmenge $A \subset X$, so dass $x_0 \in A$. Eine *Abbildung* zwischen punktierten Paaren $(X, A), (Y, B)$ ist eine punktierte Abbildung $f: X \rightarrow Y$, so dass $f(A) \subset B$. Die punktierten Paare mit ihren Abbildungen bilden eine Kategorie

$$\mathcal{P}air_+.$$

Zwei Abbildungen $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ punktierter Paare heißen (*als Abbildungen punktierter Paare*) *homotop*, wenn es eine punktierte Homotopie $h: X \times I \rightarrow Y$ zwischen ihnen gibt, so dass

$$A \times I \subset h^{-1}(B). \tag{3.1}$$

Die punktierten Paare mit Homotopieklassen von Abbildungen bilden eine Kategorie

$$\mathcal{H}P}air_+.$$

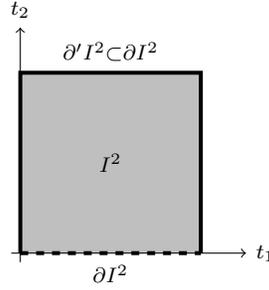


ABBILDUNG 3.1. Das Tripel $\partial'I^2 \subset \partial I^2 \subset I^2$

Für $k \geq 1$ bezeichne

$$\partial'I^k = \partial I^k \setminus ((0, 1)^{k-1} \times \{0\})$$

den Rand von I^k ohne eine (offene) Seite, siehe Abbildung 3.1. Da wir im Folgenden manche Abbildungen auf $(0, 1)^{k-1} \times \{0\}$ nicht festlegen, nennen wir $I^{k-1} \times \{0\}$ die „offene Seite“ von I^k .

3.11. DEFINITION. Für ein punktiertes Paar (X, A) und $k \geq 1$ definieren wir

$$\pi_k(X, A) = [(I^k/\partial'I^k, \partial I^k/\partial'I^k), (X, A)], 0),$$

dabei bezeichne wieder 0 die konstante Abbildung auf $x_0 \in A$. Seien $a = [f]$, $b = [g] \in \pi_k(X, A)$ und $k \geq 2$, dann definieren wir $ab = [fg] \in \pi_k(X, A)$ wie in Definition 3.1. Außerdem bezeichnen wir die Homotopieklasse der konstanten Abbildung $c(t_1, \dots, t_k) = x_0$ mit $0 = [c] \in \pi_k(X, A)$. Sei schließlich $F: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine Abbildung punktierter Paare, dann definieren wir $\pi_k F: \pi_k(X, A) \rightarrow \pi_k(Y, B)$ durch

$$\pi_k F([f]) = [F \circ f].$$

Für $k = 0$ setzen wir

$$\pi_0(X, A) = \pi_0(X/A) = \pi_0(X)/\pi_0(A),$$

wobei der rechte Quotient als Quotient punktierter Mengen zu verstehen ist. Für eine Abbildung F punktierter Paare sei $\pi_0 F: \pi_0(X, A) \rightarrow \pi_0(Y, B)$ die von $\pi_0 F: \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ induzierte Abbildung.

Man beachte, dass wir aufgrund der Sonderrolle der Koordinate t_k in der Definition von $\partial'I^k$ eine gesonderte Definition für π_0 benötigen und im Falle $k = 1$ keine Gruppenstruktur erhalten. Wie in Bemerkung 2.3 folgt wieder, dass die Verknüpfung und die Abbildung $\pi_k F$ wohldefiniert sind. Für $\pi_k F$ schreibt man oft auch kurz F_* , und für ab schreibt man meist $a + b$, wenn $k \geq 3$.

3.12. BEMERKUNG. Wenn in der obigen Definition $A = \{x_0\}$ gilt, dann wird $\partial I^k/\partial'I^k$ auf x_0 abgebildet. Nach der charakteristischen Eigenschaft der Quotiententopologie in Satz 1.72 entsprechen solche Abbildungen $f: I^k/\partial'I^k \rightarrow (X, x_0)$ genau den Abbildungen aus Definition 3.1. Es folgt

$$\pi_k(X, \{x_0\}, x_0) = \pi_k(X, x_0)$$

sogar für alle $k \geq 0$, aber für $k = 1$ fehlt der linken Seite die Gruppenstruktur.

3.13. BEMERKUNG. Nach Übung 3.103 gibt es für alle $k \geq 1$ einen Homöomorphismus

$$(I^k/\partial'I^k, \partial I^k/\partial'I^k) \cong (D^k, S^{k-1}).$$

Dabei liegt der Basispunkt auf dem Rand S^{k-1} der Einheitskreisscheibe. Wir erhalten also für $k \geq 1$ natürliche Bijektionen

$$\pi_k(X, A, x_0) = [(D^k, S^{k-1}, *), (X, A, x_0)].$$

3.14. PROPOSITION. Die relativen Homotopiegruppen haben folgende Eigenschaften.

- (1) Für alle $k \geq 0$ ist $\pi_k: \mathcal{H}\text{Pair}_+ \rightarrow \text{Set}_+$ ein Funktor.
- (2) Für alle $k \geq 2$ ist $\pi_k: \mathcal{H}\text{Pair}_+ \rightarrow \text{Grp}$ ein Funktor.
- (3) Für alle $k \geq 3$ ist $\pi_k: \mathcal{H}\text{Pair}_+ \rightarrow \text{Ab}$ ein Funktor.

BEWEIS. Völlig analog zum Beweis von Satz 3.5, wobei wir aber, da die Variable t_k eine Sonderrolle spielt, $k \geq 2$ in (2) und $k \geq 3$ in (3) fordern müssen. \square

3.15. PROPOSITION. Für alle $k \geq 1$ liefert jede relative Homotopieklasse $[\gamma]$ von Pfaden in A von x_0 nach x_1 einen Isomorphismus

$$[\gamma]: \pi_k(X, A, x_1) \rightarrow \pi_k(X, A, x_0) \quad \text{mit} \quad [\gamma].[f] = [\gamma.f],$$

$$\text{wobei} \quad \gamma.f = \begin{cases} f(2t_2 - \frac{1}{2}, \dots, 2t_{k-1} - \frac{1}{2}, 2t_k) & \text{für } \frac{1}{4} \leq t_1, \dots, t_{k-1} \leq \frac{3}{4}, \quad t_k \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma(2 - 4 \max\{|t_1 - \frac{1}{2}|, \dots, |t_{k-1} - \frac{1}{2}|, |\frac{t_k}{2}|\}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere wirkt die Fundamentalgruppe $\pi_1(A)$ durch Gruppenautomorphismen auf $\pi_k(X, A)$.

BEWEIS. Analog zum Beweis von Proposition 3.7. \square

3.16. BEMERKUNG. Für $k \geq 1, \ell \geq 0$ gilt (Übung 3.106, siehe Bemerkung 3.10)

$$\pi_k(\Omega^\ell(X), \Omega^\ell(A)) \cong \pi_{k+\ell}(X, A).$$

Für $k = 0$ ist die Behauptung falsch, wie man am Beispiel (D^1, S^0) mit $\ell = 1$ sehen kann.

Wir definieren exakte Sequenzen hier in Set_+ . Sei $f: (A, a_0) \rightarrow (B, b_0)$ eine punktierte Abbildung, dann definieren wir ihren Kern als

$$\ker f = f^{-1}\{b_0\} \subset A.$$

Außerdem sei $0 = \text{pt} = \{*\}$ eine feste einpunktige Menge. Mit dieser Notation sieht alles genauso aus wie in der Kategorie der Gruppen oder R -Moduln, die wir später noch betrachten werden. Allerdings folgt in Set_+ aus $\ker f = \{a_0\} \cong \{*\}$ noch nicht, dass f injektiv ist.

3.17. DEFINITION. Eine Sequenz in Set_+ ist eine Familie $(f_i: M_i \rightarrow M_{i-1})_{i \in \mathbb{Z}}$ punktierter Abbildungen zwischen punktierten Mengen. Eine Sequenzabbildung von $(f_i: M_i \rightarrow M_{i-1})$ nach $(g_i: N_i \rightarrow N_{i-1})$ vom Grad $d \in \mathbb{Z}$ ist eine Familie punktierter Abbildungen $(k_i: M_i \rightarrow N_{i+d})_{i \in \mathbb{Z}}$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longleftarrow & M_{i-1} & \xleftarrow{f_i} & M_i & \xleftarrow{f_{i+1}} & M_{i+1} & \longleftarrow & \cdots \\ & & k_{i-1} \downarrow & & k_i \downarrow & & k_{i+1} \downarrow & & \\ \cdots & \longleftarrow & N_{i+d-1} & \xleftarrow{g_{i+d}} & N_{i+d} & \xleftarrow{g_{i+d+1}} & N_{i+d+1} & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

kommutiert, das heißt, es gilt $k_{i-1} \circ f_i = g_{i+d} \circ k_i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Eine Sequenz $(f_i: M_i \rightarrow M_{i-1})$ heißt *exakt an der Stelle M_i* , wenn $\ker f_i = \text{im } f_{i+1} \subset M_i$ gilt. Sie heißt (*lange*) *exakte Sequenz*, wenn sie an allen Stellen exakt ist. Eine *kurze exakte Sequenz* ist eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longleftarrow A' \longleftarrow A \longleftarrow A'' \longleftarrow 0.$$

Völlig analog definieren wir Sequenzen und exakte Sequenzen in den Kategorien Grp und Ab .

Kurze exakte Sequenzen denken wir uns nach links und rechts fortgesetzt durch $0 = \{*\}$ beziehungsweise durch die einelementige Gruppe. Wir werden Diagramme zu Sequenzen teils wie oben mit Pfeilen von rechts nach links darstellen, teils aber auch die Richtung der Pfeile umdrehen:

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

3.18. BEMERKUNG. Wenn in einer exakten Sequenz von Gruppen eine der Abbildungen konstant auf e abbildet, dann erlaubt es Rückschlüsse über die benachbarten Gruppen und Abbildungen, siehe Übung 3.107. Das passiert insbesondere dann, wenn eine der Gruppen trivial ist.

Es sei (X, A, x_0) ein punktiertes Paar. Dann haben wir natürliche Inklusionen in \mathcal{Top}_+ beziehungsweise \mathcal{Pair}_+ ,

$$i: (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0) \quad \text{und} \quad j: (X, \{x_0\}, x_0) \hookrightarrow (X, A, \{x_0\}) .$$

3.19. SATZ (Homotopiesequenz eines Paares). *Es sei (X, A, x_0) ein punktiertes Paar. Für $k \geq 1$ und $[f] \in \pi_k(X, A, x_0)$ mit $f: I^k/\partial I^k \rightarrow X$ definiere $\partial[f] = [\partial f] \in \pi_{k-1}(A, x_0)$ durch*

$$\partial f = f|_{(I^{k-1} \times \{0\})/(\partial I^{k-1} \times \{0\})}: I^{k-1}/\partial I^{k-1} \rightarrow A .$$

Dann erhalten wir eine natürliche lange exakte Sequenz

$$\cdots \longleftarrow \{*\} \longleftarrow \pi_0(X, A) \xleftarrow{j_*} \pi_0(X) \xleftarrow{i_*} \pi_0(A) \xleftarrow{\partial} \pi_1(X, A) \xleftarrow{j_*} \pi_1(X) \xleftarrow{i_*} \pi_1(A) \xleftarrow{\partial} \cdots$$

Die Gruppe $\pi_1(A, x_0)$ operiert durch Sequenzabbildungen, wobei sie auf $\pi_0(X)$, $\pi_0(A)$ und $\pi_0(X, A)$ trivial operiere.

Von rechts kommend bis $\pi_1(X)$ handelt es sich dabei um eine exakte Sequenz von Gruppen, bis $\pi_2(X)$ sogar um eine exakte Sequenz abelscher Gruppen. Die Abbildung ∂ nennt man auch den *Verbindungshomomorphismus*. Die Sequenz setzt sich durch $\{*\}$ unendlich weit nach links fort. Eine Verallgemeinerung für Tripel findet sich in Übung 3.110.

BEWEIS. Zunächst einmal ist die Einschränkung ∂f wie gefordert eine punktierte Abbildung. Außerdem ist ∂ mit punktierten Homotopien von Abbildungen von Paaren verträglich und respektiert die Gruppenstruktur, falls $k \geq 2$. Also ist die Abbildung $\partial: \pi_k(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{k-1}(A, x_0)$ wohldefiniert.

Sei $F: (X, A, x_0) \rightarrow (Y, A, y_0)$ eine Abbildung punktierter Paare, dann induziert F eine Sequenzabbildung von der Sequenz des Paares (X, A, x_0) in die des Paares (Y, A, y_0) . Somit ist die Sequenz natürlich, das heißt, i_* , j_* und ∂ sind natürliche Transformationen zwischen Funktoren $\mathcal{HPair}_+ \rightarrow \mathcal{Set}_+$ im Sinne von Definition 3.3.

Schließlich sind die Gruppenwirkungen aus den Propositionen 3.7 und 3.15 ebenfalls mit i_* , j_* und δ verträglich; dabei wirkt $g \in \pi_1(A)$ als i_*g auf $\pi_k(X)$.

Zur Exaktheit sind sechs Inklusionen zu beweisen. Wir überprüfen nur zwei davon, der Rest ist Übung 3.108. Zu einer Abbildung $f: I^k/\partial I^k \rightarrow X$ wie in Definition 3.1 oder $f: I^k/\partial I^k \rightarrow X$ wie in Definition 3.11 bezeichne dabei \bar{f} die entsprechende Abbildung auf I^k . Wenn wir umgekehrt nur \bar{f} angeben, so lässt sich mit der charakteristischen Eigenschaft der Quotiententopologie aus Satz 1.72 (2) die Stetigkeit der zugehörigen Abbildung f überprüfen. Im Folgenden sei stets $k \geq 1$.

„im $j_* \subset \ker \partial$ “. Gegeben sei $f: I^k/\partial I^k \rightarrow X$. Da $I^{k-1} \times \{0\} \subset \partial I^k$, ist $\partial(j \circ \bar{f}) = f|_{I^{k-1} \times \{0\}}$ die konstante Abbildung auf den Basispunkt, also $\partial j_*[f] = 0 \in \pi_{k-1}(A)$.

„ $\ker \partial \subset \text{im } j_*$ “. Es sei $f: I^k/\partial I^k \rightarrow X$ gegeben, und es sei $h: (I^{k-1}/\partial I^{k-1}) \times I \rightarrow A$ eine Nullhomotopie von ∂f in A . Betrachte $\bar{g}: I^k \rightarrow X$ mit

$$\bar{g}(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} \bar{h}(t_1, \dots, t_{k-1}, 1 - 2t_k) & \text{für } t_k \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ \bar{f}(t_1, \dots, t_{k-1}, 2t_k - 1) & \text{für } t_k \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Betrachte die Homotopie $\bar{k}: I^k \times I \rightarrow X$ zwischen $j \circ \bar{g}$ und \bar{f} mit

$$\bar{k}(t_1, \dots, t_k, s) = \bar{g}\left(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{s + (2-s)t_k}{2}\right) .$$

Da \bar{g} ganz $\partial'I^k$ auf x_0 abbildet, bildet sie $\partial'I^k \times I$ auf x_0 ab. Da h Werte in A annimmt, erhalten wir

$$\bar{k}(t_1, \dots, t_{k-1}, 0, s) = \bar{g}\left(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{s}{2}\right) = \bar{h}(t_1, \dots, t_{k-1}, 1 - s) \in A.$$

Somit $j_*[g] = [f] \in \pi_k(X, A)$. □

Das folgende Lemma ist sehr hilfreich im Umgang mit exakten Sequenzen.

3.20. LEMMA (Vierer- und Fünferlemma). *Gegeben sei eine Sequenzabbildung*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longleftarrow & B & \longleftarrow & C & \longleftarrow & D & \longleftarrow & E \\ a \downarrow & & b \downarrow & & c \downarrow & & d \downarrow & & e \downarrow \\ A' & \longleftarrow & B' & \longleftarrow & C' & \longleftarrow & D' & \longleftarrow & E' \end{array}$$

in Set_+ . Beide Zeilen seien exakt. Außerdem seien C, C' Gruppen und c ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt:

- (1) seien b, d surjektiv und a injektiv, und sei B' ebenfalls eine Gruppe und $C' \rightarrow B'$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist c surjektiv;
- (2) seien b, d injektiv und e surjektiv. Dann ist c injektiv;
- (3) seien b, d bijektiv, a injektiv und e surjektiv, und $C' \rightarrow B'$ wie in (1). Dann ist c bijektiv.

BEWEIS. Man beweist (1) und (2) durch Diagrammjagd. Es folgt (3). □

3.21. FOLGERUNG. *Es sei $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren. Wenn f und $f|_A$ für alle k Isomorphismen $\pi_k(X) \rightarrow \pi_k(Y)$ beziehungsweise $\pi_k(A) \rightarrow \pi_k(B)$ induzieren, dann ist $f_*: \pi_k(X, A) \rightarrow \pi_k(Y, B)$ ebenfalls ein Isomorphismus für alle k .* □

3.c. Faserungen

Die lange exakte Sequenz aus Satz 3.19 ist in der vorliegenden Form noch nicht wirklich hilfreich, um Homotopiegruppen zu bestimmen. Hier formulieren wir sie um in eine lange exakte Sequenz für Serre-Faserungen. Später werden wir noch eine (nicht so lange, aber noch wichtigere) exakte Sequenz für Kofaserungen kennenlernen.

3.22. DEFINITION. Eine Abbildung $p: E \rightarrow B$ hat die *Homotopieliftungseigenschaft* bezüglich eines Raumes X , wenn zu jeder Abbildung $\tilde{f}: X \rightarrow E$ und jeder Abbildung $h: X \times I \rightarrow B$ mit

$$h(\cdot, 0) = p \circ \tilde{f}: X \rightarrow B$$

ein Lift $\tilde{h}: X \times I \rightarrow E$ existiert mit

$$p \circ \tilde{h} = h \quad \text{und} \quad \tilde{h}(\cdot, 0) = \tilde{f}: X \rightarrow E.$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \times\{0\} \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Die Abbildung p heißt *Serre-Faserung*, wenn sie die Homotopieliftungseigenschaft bezüglich $X = I^k$ für alle $k \geq 0$ besitzt. Sie heißt *Hurewicz-Faserung*, wenn sie die Homotopieliftungseigenschaft sogar bezüglich aller topologischen Räume X besitzt.

Wenn die Abbildung p überdies punktiert ist, nennen wir sie eine punktierte Serre- beziehungsweise Hurewicz-Faserung, und $p^{-1}(b_0) \subset E$ ihre *Faser*.

3.23. BEMERKUNG. Nach Übung 3.111 sind die Paare $(I^k, I^{k-1} \times \{0\})$ und $(I^k, \partial'I^k)$ homöomorph. Also ist eine Abbildung $p: E \rightarrow B$ genau dann eine Serre-Faserung, wenn für alle $k \geq 1$ und alle Abbildungen $f: I^k \rightarrow B$ und $\tilde{g}: \partial'I^k \rightarrow E$ mit

$$f|_{\partial'I^k} = p \circ \tilde{g}: \partial'I^k \rightarrow B$$

eine Abbildung $\tilde{f}: I^k \rightarrow E$ existiert mit

$$p \circ \tilde{f} = f \quad \text{und} \quad \tilde{f}|_{\partial'I^k} = \tilde{g}.$$

Das gleiche geht selbstverständlich auch, wenn man eine andere offene Seite aus $\partial'I^k$ entfernt.

$$\begin{array}{ccc} \partial'I^k & \xrightarrow{\tilde{g}} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ I^k & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

3.24. PROPOSITION. *Es sei $p: (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ eine Serre-Faserung, und es sei $F = p^{-1}(b_0) \subset E$. Dann induziert p für alle $k > 0$ einen Isomorphismus*

$$p_*: \pi_k(E, F, e_0) \rightarrow \pi_k(B, \{b_0\}, b_0) \cong \pi_k(B, b_0).$$

Für $k = 0$ ist diese Aussage falsch: es kann durchaus Wegzusammenhangskomponenten von B geben, deren Urbild leer ist.

BEWEIS. Zur Surjektivität betrachte eine punktierte Abbildung $f: I^k/\partial'I^k \rightarrow (B, b_0)$, aufgefasst als Abbildung $(I^k, \partial'I^k) \rightarrow (B, \{b_0\})$. Die Abbildung $\tilde{g}: \partial'I^k \rightarrow \{e_0\} \subset E$ sei konstant. Dann liefert Bemerkung 3.23, angewandt auf $\tilde{f}: I^k \rightarrow B$, das gesuchte Urbild \tilde{f} , denn $\tilde{f}|_{\partial'I^k} = \tilde{g}$ ist die konstante Abbildung, und auf der „offenen Seite“ $I^{k-1} \times \{0\}$ nimmt \tilde{f} Werte in $F = p^{-1}(e_0)$ an.

Zur Injektivität seien $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1: (I^k/\partial'I^k, \partial'I^k/\partial'I^k) \rightarrow (E, F)$ mit $p_*[\tilde{f}_0] = p_*[\tilde{f}_1]$ gegeben. Dann bilden $p \circ \tilde{f}_i$ den gesamten Rand nach b_0 ab. Es sei $h: (I^k/\partial'I^k) \times I \rightarrow B$ eine punktierte Homotopie zwischen $p \circ \tilde{f}_0$ und $p \circ \tilde{f}_1$ in B . Definiere $\tilde{g}: \partial'I^{k+1} \setminus ((0, 1)^{k-1} \times \{0\} \times (0, 1)) \rightarrow E$ durch

$$\tilde{g}(t_1, \dots, t_{k+1}) = \begin{cases} \tilde{f}_i(t_1, \dots, t_k) & \text{falls } t_{k+1} = i \in \{0, 1\}, \text{ und} \\ e_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, siehe Abbildung 3.2. Nach Bemerkung 3.23, angewandt auf \tilde{h} , existiert eine Abbildung $\tilde{\tilde{h}}$, die \tilde{g} fortsetzt, und auf der „offenen Seite“ $t_k = 0$ Werte in F annimmt, da \tilde{h} dort auf b_0 abbildet. Also ist $\tilde{\tilde{h}}$ eine punktierte Homotopie von Paaren zwischen \tilde{f}_0 und \tilde{f}_1 , was zu zeigen war. \square

Es ist nicht ungewöhnlich, dass Injektivität ähnlich wie Surjektivität bewiesen wird: „Injektivität bis auf Homotopie ist Surjektivität für Homotopien“.

3.25. SATZ (Homotopiesequenz für Serre-Faserungen). *Es sei $p: (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ eine punktierte Serre-Faserung, und es sei $i: F = p^{-1}(b_0) \rightarrow E$ die Inklusion der Faser. Dann existiert für alle $k \geq 1$ ein Verbindungshomomorphismus $\partial: \pi_k(B) \rightarrow \pi_{k-1}(F)$, so dass die Sequenz*

$$\pi_0(B) \xleftarrow{p_*} \pi_0(E) \xleftarrow{i_*} \pi_0(F) \xleftarrow{\partial} \pi_1(B) \xleftarrow{p_*} \pi_1(E) \longleftarrow \dots$$

exakt und natürlich ist.

Im Gegensatz zur Homotopiesequenz 3.19 eines Paares bricht diese Sequenz bei $\pi_0(B)$ ab.

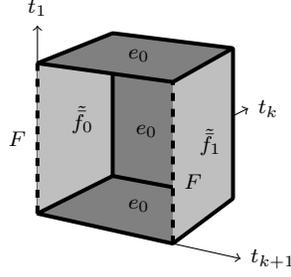


ABBILDUNG 3.2. Der Definitionsbereich von \tilde{g}

BEWEIS. Mit Proposition 3.24 erhalten wir eine Sequenzabbildung

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longleftarrow & \pi_{k-1}(F, e_0) & \xleftarrow{\partial'} & \pi_k(E, F, e_0) & \xleftarrow{j_*} & \pi_k(E, e_0) & \longleftarrow & \dots \\ & & \parallel & & p_* \downarrow \cong & & \parallel & & \\ \dots & \longleftarrow & \pi_{k-1}(F, e_0) & \xleftarrow{\partial} & \pi_k(B, b_0) & \xleftarrow{p_*} & \pi_k(E, e_0) & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

hierbei sei ∂' der Verbindungshomomorphismus aus Satz 3.19. In der Tat kommutiert das rechte Quadrat, da $p \circ j = \text{id}_{(B, \{b_0\})} \circ p$. Das linke Quadrat nehmen wir als Definition für den Verbindungshomomorphismus $\partial = \partial' \circ (p_*)^{-1}$. Da die obere Sequenz exakt ist, ist es die untere auch.

Da nicht notwendigerweise $\pi_0(E, F) \cong \pi_0(B)$ gilt, bleibt Exaktheit bei $\pi_0(E, e_0)$ zu prüfen. Sei zunächst $f: S^0 \rightarrow (F, e_0)$ gegeben, dann bildet $p \circ i \circ f$ konstant auf b_0 ab, also gilt $\text{im } i_* \subset \ker p_*$. Sei umgekehrt $f: S^0 \rightarrow (E, e_0)$ mit $[f] \in \ker p_*$ gegeben, dann existiert eine punktierte Nullhomotopie von $p \circ f$ in B , also ein Pfad von $p(f(0))$ nach b_0 . Mit der Homotopieliftungseigenschaft erhalten wir einen Pfad von $f(0)$ nach F , also eine punktierte Homotopie von f zu einem Element in $\text{im } i_*$.

Zur Natürlichkeit betrachte ein kommutatives Diagramm punktierter Serre-Faserungen

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & D \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ B & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

Seien $F = p^{-1}(b_0)$ und $G = q^{-1}(c_0)$ die Fasern, dann bildet $g|_F$ die Faser F auf G ab. Betrachte jetzt die zugehörigen langen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longleftarrow & \pi_{k-1}(E) & \xleftarrow{i_*} & \pi_{k-1}(F) & \xleftarrow{\partial} & \pi_k(B) & \xleftarrow{p_*} & \pi_k(E) & \longleftarrow & \dots \\ & & g_* \downarrow & & g|_{F_*} \downarrow & & f_* \downarrow & & g_* \downarrow & & \\ \dots & \longleftarrow & \pi_{k-1}(D) & \xleftarrow{i_*} & \pi_{k-1}(G) & \xleftarrow{\partial} & \pi_k(C) & \xleftarrow{p_*} & \pi_k(D) & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

Die äußeren Quadrate kommutieren, da die entsprechenden punktierten Abbildungen ebenfalls kommutieren. Nach Definition des Verbindungshomomorphismus kommutiert das innere Quadrat, da die Sequenz aus Satz 3.19 natürlich ist. \square

3.26. FOLGERUNG (aus dem Liftungssatz 2.58). *Es sei $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung. Dann ist die Abbildung*

$$p_* = \pi_k p: \pi_k(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_k(X, x_0)$$

ein Isomorphismus für alle $k \geq 2$. Außerdem haben wir eine exakte Sequenz

$$\pi_0(X) \longleftarrow \pi_0(\tilde{X}) \longleftarrow \pi_0(p^{-1}(x_0)) \longleftarrow \pi_1(X) \xleftarrow{\pi_1 p} \pi_1(\tilde{X}) \longleftarrow 0.$$

Die Injektivität von $\pi_1 p$ kennen wir bereits aus Satz 2.56.

BEWEIS. Nach dem Homotopieliftungssatz 2.27 sind alle Überlagerungen Hurewicz-Faserungen, also erst recht Serre-Faserungen. Dabei ist die Faser $F = p^{-1}(x_0)$ einer Überlagerung diskret, und S^k ist zusammenhängend für $k \geq 1$, folglich sind alle stetigen punktierten Abbildungen $S^k \rightarrow F$ konstant. Es folgt $\pi_k(F) = 0$ für alle $k \geq 1$. Mit Satz 3.25 und Bemerkung 3.18 folgen die Behauptungen. \square

3.27. BEISPIEL. Die universelle Überlagerung von S^1 ist \mathbb{R} nach Beispiel 2.26, also zusammenziehbar. Wegen den Bemerkungen 3.2 (1) und 3.6, Satz 2.28 und Folgerung 3.26 gilt daher

$$\pi_k(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 1, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3.28. BEISPIEL. Es sei $E = B \times F$ ein Produkt punktierter Räume und $p: E \rightarrow B$ die Projektion auf den ersten Faktor. Dann ist p nach Übung 3.112 eine Hurewicz-, also auch eine Serre-Faserung. Es gilt $\pi_k(E) = \pi_k(B) \times \pi_k(F)$, siehe Übung 3.104. Also hat die Homotopiesequenz die Form

$$\cdots \longleftarrow \pi_{k-1}(F) \xleftarrow{\partial} \pi_k(B) \xleftarrow{p_*} \underbrace{\pi_k(B) \times \pi_k(F)}_{\cong \pi_k(E)} \xleftarrow{i_*} \pi_k(F) \xleftarrow{\partial} \pi_{k+1}(B) \longleftarrow \cdots$$

Die Abbildung p_* ist die Projektion auf $\pi_k(B)$, und $i_*(a) = (0, a) \in \pi_k(B) \times \pi_k(F)$ für alle $a \in \pi_k(F)$. Die Sequenz ist offensichtlich bei $\pi_k(E)$ exakt. Da p_* surjektiv und i_* injektiv ist, folgt aus der Exaktheit an den anderen Stellen, dass

$$\ker \partial = \operatorname{im} p_* = \pi_k(B) \quad \text{und} \quad \operatorname{im} \partial = \ker i_* = 0,$$

also ist der Verbindungshomomorphismus $\partial = 0$ für alle k .

3.29. BEMERKUNG. Allgemeiner sei $p: E \rightarrow B$ eine Faserung. Unter einem *Schnitt* von p verstehen wir ein Rechtsinverses von p , also eine Abbildung $s: B \rightarrow E$ mit $p \circ s = \operatorname{id}_B$. Mit anderen Worten ist im $B \subset E$ in diesem Fall ein Retrakt von E . Im obigen Beispiel $E = B \times F$ liefert jeder Punkt $f \in F$ einen Schnitt s_f mit $s_f(b) = (b, f)$.

Wenn p einen Schnitt besitzt, gibt es in der Homotopiesequenz 3.25 ein Rechtsinverses s_* von p_* . Aus $p_* \circ s_* = \operatorname{id}_{\pi_k(B)}$ folgt die Surjektivität von p_* , somit gilt $\partial = 0$. Also können wir ∂ als *Hindernis* gegen die Existenz eines Schnittes auffassen.

In Übung 5.85 werden wir sehen, dass die Homotopiesequenz 3.25 ab $k \geq 2$ genau die gleiche Gestalt wie im obigen Beispiel hat. Im Falle $k = 1$ können wir lediglich folgern, dass $\pi_1(E)$ isomorph zu einem semidirekten Produkt $\pi_1(B) \ltimes \pi_1(F)$ ist.

3.30. DEFINITION. Ein *Faserbündel* mit *typischer Faser* F ist eine stetige Abbildung $p: E \rightarrow B$, so dass jeder Punkt b eine Umgebung $U \subset B$ besitzt, für die ein Homöomorphismus $\varphi: p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ existiert, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ & \cong & \\ & \searrow p & \swarrow \operatorname{pr}_U \\ & & U \end{array}$$

kommutiert, wobei pr_U die Projektion auf den ersten Faktor bezeichne. Dann heißt E der *Totalraum*, B die *Basis*, und φ eine *lokale Trivialisierung* oder *Bündelkarte* von $p: E \rightarrow B$.

Ein Produkt wie in Beispiel 3.28 heißt auch *triviales Faserbündel*, daher die Terminologie.

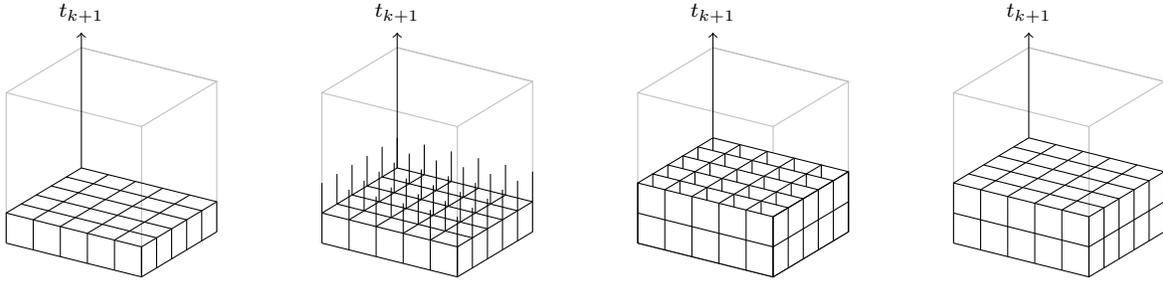


ABBILDUNG 3.3. Schichtweise Konstruktion von \tilde{h}

3.31. PROPOSITION. *Es sei $p: E \rightarrow B$ eine Abbildung, und jeder Punkt $b \in B$ besitze eine Umgebung $U \subset B$, so dass $p: p^{-1}(U) \rightarrow U$ eine Serre-Faserung ist. Dann ist p ebenfalls eine Serre-Faserung.*

3.32. FOLGERUNG. *Jedes Faserbündel $p: E \rightarrow B$ ist eine Serre-Faserung.* \square

Faserbündel über parakompakten Räumen sind sogar Hurewicz-Faserungen [tD2, Section 13.4], aber das zeigen wir hier nicht.

BEWEIS von Proposition 3.31. Es sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von B durch Mengen U , über denen p eine Serre-Faserung ist. Es sei $X = I^k$ für $k \geq 0$, und $h: X \times I \rightarrow B$ und $\tilde{f}: X \rightarrow E$ seien Abbildungen wie in Definition 3.22. Dann ist $\{h^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ eine offene Überdeckung von I^{k+1} . Nach dem Satz 1.55 von Lebesgue können wir I^{k+1} für ein geeignetes $N \gg 1$ in N^{k+1} Würfeln der Kantenlänge $\frac{1}{N}$ unterteilen, so dass jeder dieser Würfeln ganz in einer der Mengen $h^{-1}(U)$ mit $U \in \mathcal{U}$ enthalten ist.

Um \tilde{h} zu konstruieren, setzen wir \tilde{f} von $I^k \times \{0\}$ Schicht für Schicht auf I^{k+1} fort. Wir konstruieren in jeder Schicht \tilde{h} zunächst auf den Strecken über allen Ecken, dann auf den Quadraten über allen Kanten, und so weiter, und zum Schluss auf den $k+1$ -dimensionalen Würfeln selbst, siehe Abbildung 3.3. Dabei müssen wir in jedem Schritt von einer Menge der Form $\partial^i I^i$ auf I^i fortsetzen. Dazu benutzen wir Bemerkung 3.23 und die Tatsache, dass wir stets über einer der offenen Mengen $U \subset B$ arbeiten, für die $p^{-1}(U) \rightarrow U$ eine Serre-Faserung ist. \square

3.33. BEISPIEL. Der *komplex projektive Raum* $\mathbb{C}P^n$ ist definiert als Quotientenraum

$$\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim,$$

wobei $(z_0, \dots, z_n) \sim (w_0, \dots, w_n)$ genau dann, wenn es $a \in \mathbb{C}^\times$ mit $a \cdot (z_0, \dots, z_n) = (w_0, \dots, w_n)$ gibt, siehe Übung 1.129. Man schreibt für die Äquivalenzklassen auch gern $(z_0 : \dots : z_n) = q(z_0, \dots, z_n)$. Der $\mathbb{C}P^n$ wird überdeckt von den $n+1$ Teilmengen U_0, \dots, U_n mit

$$U_k = \{(z_0 : \dots : z_n) \mid z_k \neq 0\} = \text{im}(q|_{\mathbb{C}^k \times \{0\} \times \mathbb{C}^{n-k}}).$$

Wir betrachten die sogenannte *Hopf-Faserung*

$$p: S^{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{q} \mathbb{C}P^n.$$

Über jedem U_k erhalten wir als lokale Trivialisierung den Homöomorphismus

$$\varphi: p^{-1}(U_k) \rightarrow U_k \times S^1 \quad \text{mit} \quad \varphi(z_0, \dots, z_n) = ((z_0 : \dots : z_n), \frac{z_k}{|z_k|})$$

$$\text{und} \quad \varphi^{-1}((z_0 : \dots : z_n), w) = \frac{w(z_k^{-1}z_0, \dots, 1, \dots, z_k^{-1}z_n)}{\|(z_k^{-1}z_0, \dots, 1, \dots, z_k^{-1}z_n)\|}.$$

Also ist die Hopf-Faserung ein Faserbündel mit typischer Faser $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$.

Es gilt $S^2 \cong \mathbb{C}P^1$ (Riemannsche Zahlenkugel). Also erhalten wir als Spezialfall insbesondere die klassische Hopf-Faserung $S^3 \rightarrow S^2$ mit Faser S^1 . Die zugehörige exakte Homotopiesequenz 3.25 hat die Form

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\pi_{k-1}(S^1)}_{=0 \text{ für } k \neq 2} \xleftarrow{\partial} \pi_k(S^2) \xleftarrow{p_*} \pi_k(S^3) \xleftarrow{i_*} \underbrace{\pi_k(S^1)}_{=0 \text{ für } k \neq 1} \longleftarrow \cdots$$

Also gilt $\pi_k(S^2) \cong \pi_k(S^3)$ für alle $k \geq 3$.

3.34. BEISPIEL. Der *quaternionisch projektive Raum* $\mathbb{H}P^n$ ist definiert als Quotient

$$\mathbb{H}P^n = (\mathbb{H}P^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim,$$

wobei $(q_0, \dots, q_n) \sim (r_0, \dots, r_n)$ genau dann, wenn es $a \in \mathbb{H}^\times$ mit $a \cdot (q_0, \dots, q_n) = (r_0, \dots, r_n)$ gibt. Mit den gleichen Argumenten wie oben erhalten wir die *quaternionische Hopf-Faserung*

$$p: S^{4n+3} \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{H}P^n$$

als Faserbündel mit typischer Faser $S^3 \subset \mathbb{H}^\times$.

Es gilt $S^4 \cong \mathbb{H}P^1$, also existiert ein Faserbündel $p: S^7 \rightarrow S^4$ mit typischer Faser S^3 . Die zugehörige Homotopiesequenz hat die Gestalt

$$\cdots \longleftarrow \pi_{k-1}(S^3) \xleftarrow{\partial} \pi_k(S^4) \xleftarrow{p_*} \pi_k(S^7) \xleftarrow{i_*} \pi_k(S^3) \xleftarrow{\partial} \pi_{k+1}(S^4) \longleftarrow \cdots$$

3.d. Der Ausschneidungssatz

Für kleine k ist es manchmal möglich, die k -te Homotopiegruppe eines Raumes aus den k -ten Homotopien von Unterräumen (genauer, von Unterraum-Paaren) zusammensetzen, ähnlich wie im Satz 2.42 von Seifert und van Kampen. Einen direkter Vergleich mit diesem Ergebnis nehmen wir später vor.

3.35. DEFINITION. Ein Raum $X \neq \emptyset$ heißt *n -zusammenhängend*, wenn $\pi_k(X, x) = 0$ für alle $x \in X$ und alle $0 \leq k \leq n$.

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ mit $X \neq \emptyset$ heißt *n -zusammenhängend*, wenn für alle $x \in X$ die induzierte Abbildung $f_*: \pi_k(X, x) \rightarrow \pi_k(Y, f(x))$ ein Isomorphismus ist für alle $0 \leq k < n$ und surjektiv für $k = n$.

Ein Paar (X, A) mit $A \neq \emptyset$ heißt *n -zusammenhängend*, wenn die Inklusion $A \hookrightarrow X$ eine n -zusammenhängende Abbildung ist.

Eine Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ von Paaren mit $A, B \neq \emptyset$ heißt *n -zusammenhängend*, wenn für alle $x \in A$ und alle $0 \leq k < n$ die induzierte Abbildung $f_*: \pi_k(X, A, x) \rightarrow \pi_k(Y, B, f(x))$ ein Isomorphismus ist, und eine Surjektion für $k = n$.

Für einen Raum bedeutet 0-zusammenhängend das gleiche wie wegzusammenhängend, siehe Bemerkung 3.2 (1), und 1-zusammenhängend bedeutet wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend nach Bemerkung 3.2 (2). Ein Paar (X, A) ist 0-zusammenhängend, wenn jede Wegzusammenhangskomponente von X einen Punkt von A enthält.

3.36. BEMERKUNG. Für einen Raum X sind äquivalent:

- (1) der Raum X ist n -zusammenhängend;
- (2) für alle $k \leq n$ lässt sich jede Abbildung $S^k \rightarrow X$ zu einer Abbildung $D^{k+1} \rightarrow X$ fortsetzen;
- (3) für alle $k \leq n$ lässt sich jede Abbildung $\partial I^{k+1} \rightarrow X$ zu einer Abbildung $I^{k+1} \rightarrow X$ fortsetzen.

Die Äquivalenz von (2) und (3) ist offensichtlich, da die Paare (D^{k+1}, S^k) und $(I^{k+1}, \partial I^{k+1})$ homöomorph sind.

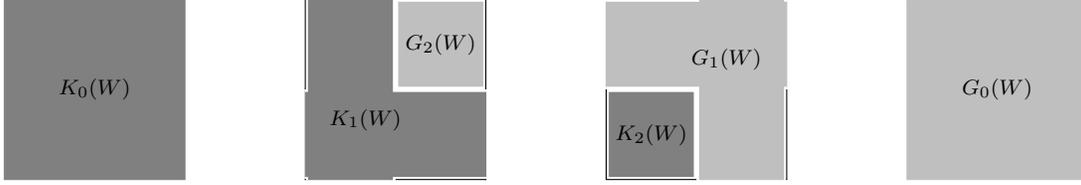


ABBILDUNG 3.4. Die Mengen $K_r(W)$ und $G_r(W)$

Zur Äquivalenz von (1) und (2) sei $f: S^k = I^k/\partial I^k \rightarrow X$ gegeben. Eine Nullhomotopie h von f ist eine Fortsetzung von f auf $I^{k+1}/\partial I^{k+1}$ und umgekehrt, und das Paar $(I^{k+1}/\partial I^{k+1}, I^k/\partial I^k)$ ist homöomorph zu (D^{k+1}, S^k) .

3.37. BEMERKUNG. Für ein Paar (X, A) und $n \geq 0$ sind äquivalent:

- (1) das Paar (X, A) ist n -zusammenhängend;
- (2) für alle $k \leq n$ und alle $x \in A$ gilt $\pi_k(X, A, x) = 0$;
- (3) für alle $1 \leq k \leq n$ ist jede Abbildung $(I^k, \partial I^k) \rightarrow (X, A)$ als Abbildung von Paaren homotop zu einer Abbildung $(I^k, \partial I^k) \rightarrow (A, A)$, und jeder Punkt in X lässt sich durch einen Weg mit A verbinden;
- (4) für alle $k \leq n$ lässt sich jede Abbildung $(\partial I^{k+1}, \partial I^k \times \{0\}) \rightarrow (X, A)$ zu einer Abbildung $(I^{k+1}, I^k \times \{0\}) \rightarrow (X, A)$ fortsetzen.

Die Äquivalenz von (1) und (2) ergibt aus der langen exakten Sequenz 3.19 des Paares (X, A) .

Zu (2) \Rightarrow (3) überlegt man sich, dass die Paare $(I^k, \partial I^k)$, (D^k, S^{k-1}) und $(I^k/\partial I^k, \partial I^k/\partial I^k)$ paarweise homöomorph sind.

Wie in Bemerkung 3.23 existiert ein Homöomorphismus $g: I^{k+1} \rightarrow I^{k+1}$, der ∂I^{k+1} auf $I^k \times \{0\}$ abbildet und umgekehrt. Zu (3) \Rightarrow (4) sei $h: (I^{k+1}, \partial I^{k+1}) \rightarrow (X, A)$ die Homotopie aus (3) zu $f \circ g^{-1}|_{I^k \times \{0\}}$. Dann ist $h \circ g$ die gesuchte Fortsetzung.

Für (4) \Rightarrow (2) betrachte $f: (I^k/\partial I^k, \partial I^k/\partial I^k) \rightarrow (X, A)$. Da das Paar $(I^k/\partial I^k, \partial I^k/\partial I^k)$ zu $(\partial I^{k+1}, \partial I^k \times \{0\})$ homöomorph ist, ist f relativ zum Rand $\partial I^k/\partial I^k$ homotop zu einer Abbildung $(I^k/\partial I^k, \partial I^k/\partial I^k) \rightarrow (A, A)$, liegt also im Bild von $\pi_k(A, A, x) = 0$.

3.38. SATZ (Ausschneidungssatz, Blakers-Massey). *Es sei X ein topologischer Raum und $U, V \subset X$ offen mit $X = U \cup V$ und $U \cap V \neq \emptyset$. Das Paar $(U, U \cap V)$ sei p -zusammenhängend, und $(V, U \cap V)$ sei q -zusammenhängend mit $p, q \geq 0$, dann ist $i: (U, U \cap V) \rightarrow (X, V)$ eine $(p+q)$ -zusammenhängende Abbildung von Paaren.*

Der Name rührt daher, dass wir die abgeschlossene Menge $V \setminus U$ aus X „ausschneiden“ können, ohne die ersten $p+q-1$ Homotopiegruppen zu verändern. Mit Hilfe dieses Satzes werden wir später einige nichttriviale Homotopiegruppen ausrechnen und viele wichtige Resultate beweisen.

Wir kopieren den Beweis von Puppe, siehe [tD2, Abschnitt 6.9]. Als erstes bringen wir die Repräsentanten von Homotopieklassen oder Homotopien zwischen ihnen in eine spezielle Form (Propositionen 3.39, 3.40), siehe Abbildung 3.6. Anschließend können wir den Anteil mit Werten in $V \setminus U$ wegdeformieren (Proposition 3.41).

Dazu betrachten wir achsenparallele Würfel der Form

$$W(a, \delta, J) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in [a_i, a_i + \delta] \text{ für } i \in J, \text{ und } x_i = a_i \text{ sonst} \} \subset \mathbb{R}^n$$

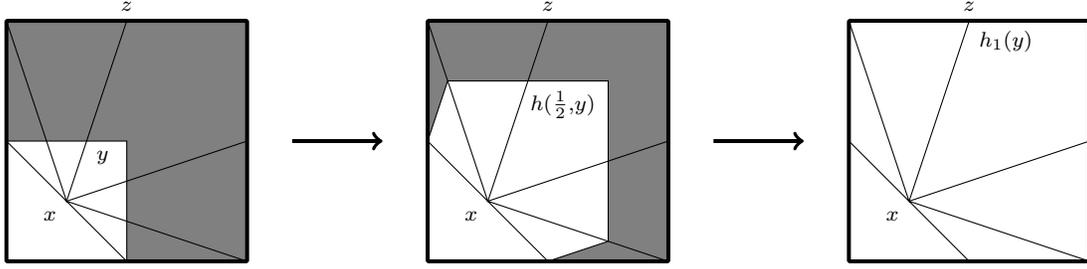


ABBILDUNG 3.5. Die Homotopie h_1

für $a \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ und $J \subset \{1, \dots, n\}$. Für $W = W(a, \delta, J)$ und $0 \leq r$ definieren wir Teilmengen $K_r(W)$ und $G_r(W) \subset W$ — wie in Abbildung 3.4 angedeutet — durch

$$\begin{aligned} K_r(W) &= \left\{ x \in W \mid x_i \in \left(a_i, a_i + \frac{\delta}{2}\right) \text{ für mindestens } r \text{ verschiedene } i \in J \right\}, \\ G_r(W) &= \left\{ x \in W \mid x_i \in \left(a_i + \frac{\delta}{2}, a_i + \delta\right) \text{ für mindestens } r \text{ verschiedene } i \in J \right\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Inbesondere gilt $K_r(W) = G_r(W) = \emptyset$ falls $r > \dim W = \#J$. Unter den Seiten von $W(a, \delta, J)$ verstehen wir alle Würfel $W(a', \delta, J')$ mit $J' \subset J$ und mit $a'_i \in \{a_i, a_i + \delta\}$ für alle $i \in J \setminus J'$ und $a'_i = a_i$ sonst. Die Vereinigung aller echten Seiten W heißt wieder der (*geometrische*) Rand ∂W von W .

3.39. PROPOSITION. *Es seien $r \leq \dim W$, $f: W \rightarrow X$ und $A \subset X$ gegeben, so dass*

$$f^{-1}(A) \cap W' \subset K_r(W')$$

für alle Seiten W' von W gilt. Dann ist f homotop relativ zum Rand ∂W zu einer Abbildung $g: W \rightarrow X$ mit $g^{-1}(A) \subset K_r(W)$. Eine entsprechende Aussage gilt, wenn man K_r überall durch G_r ersetzt.

BEWEIS. Ohne Einschränkung sei $W = I^k$ ein Einheitswürfel. Wir definieren eine Abbildung $h = h_1: I^k \rightarrow I^k$ homotop zur Identität und ersetzen f durch die homotope Abbildung $f \circ h$. Dazu fixieren wir $x = (\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4})$. Für jeden Strahl s am Punkt x sei y der Schnittpunkt von s mit $\partial[0, \frac{1}{2}]^k$, und z sei der Schnittpunkt von s mit ∂I^k . Dann bilde h_1 die Strecke xy affin auf die Strecke xz , und die Strecke yz konstant auf den Punkt z ab, siehe Abbildung 3.5. Diese Abbildung ist stetig, eine Homotopie zur Identität wird gegeben durch $h_t = (1-t)\text{id}_W + t h_1$, und man sieht leicht, dass $g = f \circ h_1$ die gestellte Bedingung erfüllt. \square

Wir betrachten jetzt eine Abbildung $f: I^k \rightarrow X$. Nach dem Satz 1.55 können wir I^k für ein geeignetes N so in N^k Würfel der Kantenlänge $\frac{1}{N}$ zerlegen, dass jeder dieser Würfel entweder in $f^{-1}(U)$ oder in $f^{-1}(V)$ liegt.

3.40. PROPOSITION. *Das Paar $(U, U \cap V)$ sei p -zusammenhängend, und $(V, U \cap V)$ sei q -zusammenhängend für $p, q \geq 0$. Dann existiert zu jeder Abbildung $f: I^k \rightarrow X$ eine Homotopie h von f zu $g: I^k \rightarrow X$, die für alle Seiten W von Würfeln der obigen Zerlegung folgendes erfüllt:*

- (1) falls $W \subset f^{-1}(U \cap V)$, gelte $h(x, t) = f(x)$ für alle $x \in W$, $t \in I$;
- (2) falls $W \subset f^{-1}(U)$, gelte $h(x, t) \subset U$ für alle $x \in W$, $t \in I$, und $g^{-1}(U \setminus V) \cap W \subset K_{p+1}(W)$;
- (3) falls $W \subset f^{-1}(V)$, gelte $h(x, t) \subset V$ für alle $x \in W$, $t \in I$, und $g^{-1}(V \setminus U) \cap W \subset G_{q+1}(W)$.

BEWEIS. Wir konstruieren h der Reihe nach für alle Ecken der Würfel W , dann für alle Kanten, und so weiter, und zum Schluss für die Würfel W selbst.

Sei also zunächst $W = \{x\}$ eine Ecke. Falls $f(x) \in U \cap V$, definieren wir $h|_{W \times I}$ durch (1). Sei also $f(x) \in U \setminus V$. Da $\pi_0(U, U \cap V) = 0$, finden wir einen Weg von x zu einem Punkt in $U \cap V$; dieser sei unsere Homotopie. Genauso verfahren wir, falls $f(x) \in V \setminus U$.

Sei jetzt W ein Würfel der Dimension $n \geq 1$. Nach Induktion ist h auf $\partial W \times I$ bereits konstruiert und wird auf $W \times \{0\}$ durch $f|_W$ gegeben. Falls $W \subset f^{-1}(U \cap V)$, definieren wir $h|_{W \times I}$ wieder durch (1). Gelte also $W \subset f^{-1}(U)$, aber nicht $W \subset f^{-1}(V)$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Falls $n \leq p$, gilt $\pi_n(U, U \cap V) = 0$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $h(x, t) \in U$ und $h(x, 1) \in U \cap V$ für alle $x \in \partial W$ und alle $t \in I$. Wir setzen $f|_{W \times \{0\}}$ und $h|_{\partial W \times I}$ gemäß Bemerkung 3.37 (4) zu einer Abbildung $h: W \times I \rightarrow U$ so fort, dass $h(x, 1) \in U \cap V$ für alle $x \in W$. Es folgt

$$g^{-1}(U \setminus V) = \emptyset = K_{p+1}(W) .$$

Falls $n > p$, konstruieren wir h und g mit Hilfe von Proposition 3.39. Analog verfahren wir, falls $W \subset f^{-1}(V)$, aber nicht $W \subset f^{-1}(U)$. \square

3.41. PROPOSITION. *Es sei $k \leq p+q$ und $f: (I^k, \partial I^k) \rightarrow (X, U)$ eine Abbildung mit $I^{k-1} \times \{0\} \subset f^{-1}(V)$. Dann existiert eine Homotopie $h: I^{k+1} \rightarrow X$ von f zu einer Abbildung $g: I^k \rightarrow U$ mit folgenden Eigenschaften.*

- (1) *Wenn f eine Seite $W \subset \partial I^k$ von I^k nach $U \cap V$ abbildet, gelte $h(x, t) = f(x)$ für alle $t \in I$ und alle $x \in W$.*
- (2) *Für alle $t \in I$ und alle $x \in \partial I^k$ gelte $h(x, t) \in U$.*
- (3) *Für alle $t \in I$ und alle $x \in I^{k-1} \times \{0\}$ gelte $h(x, t) \in V$.*

BEWEIS. Wir wenden Proposition 3.40 an und erhalten eine zu f homotope Abbildung $I^k \rightarrow X$. Die Bedingungen (1)–(3) in Proposition 3.40 stellen sicher, dass diese Homotopie die obigen Eigenschaften (1)–(3) erfüllt. Wir dürfen daher ohne Einschränkung für alle W annehmen, dass

$$f^{-1}(U \setminus V) \subset K_{p+1}(W) \quad \text{und} \quad f^{-1}(V \setminus U) \subset G_{q+1}(W) .$$

Betrachte jetzt die orthogonale Projektion $P: I^k \rightarrow I^{k-1} \times \{0\}$. Sei W' das Bild unter p eines Würfels W der obigen Zerlegung. Da wir die Kontrolle über eine Koordinate verlieren, gilt

$$K_{p+1}(W) \subset P^{-1}(K_p(W')) \quad \text{und} \quad G_{q+1}(W) \subset P^{-1}(G_q(W')) .$$

Da $k-1 < p+q$, sind die Mengen $K_p(W')$ und $G_q(W')$ nach Konstruktion (3.2) disjunkt, siehe Abbildung 3.4. Wegen Proposition 3.40 (2) und (3) sind dann auch die kompakten Mengen

$$A = \{ P(x) \mid x \in f^{-1}(U \setminus V) \} \quad \text{und} \quad B = \{ P(x) \mid x \in f^{-1}(V \setminus U) \} \subset I^{k-1}$$

disjunkt. Da ∂I^k auf U abgebildet wird, ist insbesondere B auch disjunkt zu ∂I^{k-1} . Nach Urysohns Lemma 1.30 existiert eine stetige Funktion $u: I^{k-1} \rightarrow I$ mit $u|_{A \cup \partial I^{k-1}} = 0$ und $u|_B = 1$.

Insbesondere liegt $f^{-1}(U \setminus V)$ oberhalb des Graphen von u in I^k , und $f^{-1}(V \setminus U)$ unterhalb, siehe Abbildung 3.6. Wir konstruieren eine Homotopie relativ zu ∂I^k durch

$$h(x_1, \dots, x_k, t) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + (1 - x_k)tu(x_1, \dots, x_{k-1})) .$$

Diese Homotopie bildet ganz $\partial I^k \times I$ nach V ab, und die Abbildung $g = h(\cdot, 1)$ nimmt Werte in U an. Zusammen mit der Homotopie aus Proposition 3.40 ist die Behauptung bewiesen. \square

BEWEIS des Ausschneidungssatzes 3.38. Es sei $k = 0$. Jede Wegzusammenhangskomponente von U und V enthält Punkte von $U \cap V$, da $p, q \geq 0$. Es folgt

$$\pi_0(X, V) = \{*\} = \pi_0(U, U \cap V) .$$

Zur Surjektivität der Abbildung

$$i_*\pi_k(U, U \cap V, x) \rightarrow \pi_k(X, V, x)$$

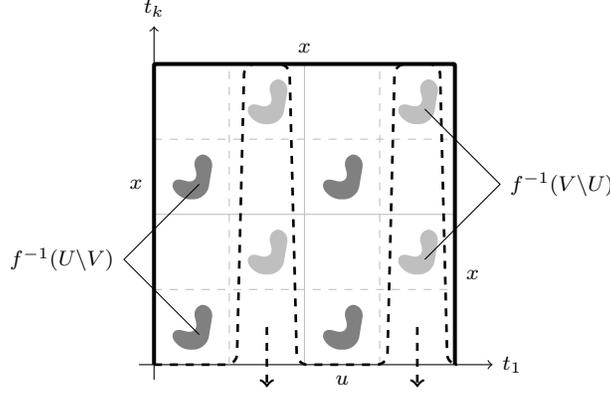


ABBILDUNG 3.6. Die Urbilder von $V \setminus U$ und $U \setminus V$ in I^k

seien $1 \leq k \leq p + q$ und $f: (I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k) \rightarrow (X, V)$ gegeben. Wir wenden Proposition 3.41 auf $\bar{f}: I^k \rightarrow X$ an. Es folgt $[f] = [g] \in \pi_k(X, V)$ und $[g] \in \text{im}(i_*)$. Damit ist Surjektivität von i_* bewiesen.

Der Beweis der Injektivität verläuft ähnlich. Sei $2 \leq k \leq p + q$, und seien $f_0, f_1 \in \pi_{k-1}(U, U \cap V, x)$ mit $i_* f_0 = i_* f_1$ repräsentiert durch $\bar{f}_j: (I^{k-1}, \partial I^{k-1}) \rightarrow (U, U \cap V)$, so dass $\partial' I^{k-1} \subset \bar{f}_j^{-1}(\{x\})$ für $j = 0, 1$. Dann existiert eine Homotopie $\bar{h}: (I^k, \partial I^{k-1} \times I) \rightarrow (X, V)$ zwischen \bar{f}_0 und \bar{f}_1 , wobei ganz $\partial' I^{k-1} \times I$ auf x abgebildet wird. Insbesondere bildet \bar{h} die Seite $\partial I^{k-2} \times \{0\} \times I$ nach V ab, alle anderen Seiten von I^k werden nach U abgebildet. Wir wenden Proposition 3.41 auf \bar{h} an und erhalten eine neue Abbildung $\bar{k}: I^k \rightarrow U$. Dabei wird zunächst f_j durch eine in $(U, U \cap V)$ punktiert homotope Abbildung $g_j = k(\cdot, j)$ ersetzt, und k ist eine punktierte Homotopie zwischen g_0 und g_1 in $(U, U \cap V)$. Es folgt $[f_0] = [g_0] = [g_1] = [f_1] \in \pi_{k-1}(U, U \cap V)$, und wir erhalten die Injektivität von i_* in den Graden $0, \dots, p + q - 1$. Zusammen mit der obigen Surjektivität ist $i: (U, U \cap V) \rightarrow (X, V)$ also eine $(p + q)$ -zusammenhängende Abbildung von Paaren. \square

3.e. Der Satz von Brouwer und Hopf

In diesem Abschnitt berechnen wir einige Homotopiegruppen von Sphären. Die Homotopiegruppen der S^1 kennen wir bereits aus Beispiel 3.27.

Für $n \geq 1$ bezeichne $e_1 \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ den Basispunkt. Wir zerlegen $S^n = U \cup V$ mit $U = S^n \setminus \{-e_2\}$ und $V = S^n \setminus \{e_2\}$; beide Teilmengen sind zusammenziehbar. Mit Bemerkung 3.6 liefert die lange exakte Sequenz des Paares (S^n, V) Isomorphismen

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\pi_{k-1}(V)}_{=0} \longleftarrow \pi_k(S^n, V) \xleftarrow{\cong} \pi_k(S^n) \longleftarrow \underbrace{\pi_k(V)}_{=0} \longleftarrow \cdots \quad (3.3)$$

für alle k . Der Durchschnitt $U \cap V$ ist homotopieäquivalent zu einer S^{n-1} . Mit Folgerung 3.21 schließen wir, dass die jeweiligen Inklusionen der „oberen“ und „unteren“ Hemisphären in die S^n für alle k Isomorphismen

$$\pi_k(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_k(U, U \cap V) \quad \text{und} \quad \pi_k(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_k(V, U \cap V) \quad (3.4)$$

induzieren. Der Raum D^n ist zusammenziehbar. Die Homotopiesequenz 3.19 des Paares (D^n, S^{n-1}) liefert also Isomorphismen

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\pi_{k-1}(D^n)}_{=0} \longleftarrow \pi_{k-1}(S^{n-1}) \xleftarrow{\cong} \pi_k(D^n, S^{n-1}) \longleftarrow \underbrace{\pi_k(D^n)}_{=0} \longleftarrow \cdots \quad (3.5)$$

für alle k .

3.42. SATZ (Brouwer, Hopf). Für alle $n \geq 1$ gilt:

- (1) der Raum S^n ist $(n - 1)$ -zusammenhängend;
- (2) das Paar (D^n, S^{n-1}) ist $(n - 1)$ -zusammenhängend;
- (3) es gilt

$$\pi_n(S^n) \cong \pi_{n+1}(D^{n+1}, S^n) \cong \mathbb{Z},$$

dabei werden beide Gruppen von der jeweiligen Identität erzeugt;

- (4) die Abbildung

$$\pi_{k-1}(S^{n-1}) \xrightarrow[\cong]{\partial^{-1}} \pi_k(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_k(U, U \cap V) \xrightarrow{i_*} \pi_k(S^n, V) \xrightarrow[\cong]{j_*^{-1}} \pi_k(S^n)$$

ist ein Isomorphismus für alle $1 \leq k < 2n - 2$, und surjektiv, falls $1 \leq k = 2n - 2$.

In (3) haben wir $I^n/\partial I^n$ gemäß Bemerkung 3.2 (3) mit S^n und $(I^n/\partial' I^n, \partial I^n/\partial' I^n)$ gemäß Bemerkung 3.13 mit (D^n, S^{n-1}) identifiziert.

Aussage (1) kann man auch elementar (ohne Ausschneidung) beweisen, allerdings ist der Beweis immer noch etwas aufwändig. Dazu stellt man ein Element von $\pi_k(S^n)$ mit $k < n$ durch eine punktierte Abbildung $f: I^k/\partial I^k \rightarrow S^n$ dar. Diese Abbildung kann surjektiv sein, siehe Beispiel 1.22. Indem man f im Inneren von I^k geschickt glättet, erhält man eine punktiert homotope Abbildung, die einen Punkt in S^n nicht trifft, ohne Einschränkung den Südpol x . Dann zieht man $S^n \setminus \{x\}$ auf den Nordpol zusammen und erhält so eine Nullhomotopie von f .

BEWEIS. Wir beweisen zunächst (1), (2) und (4) durch Induktion über n . Für $n = 1$ gelten die Behauptungen, denn S^1 ist zusammenhängend, es gilt $\pi_0(D^1, S^0) = \{*\}$, und Aussage (4) ist leer.

Sei jetzt $n > 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\pi_k(S^{n-1}) = 0$ für $k \leq n - 2$. Aus (3.5) folgt $\pi_k(D^n, S^{n-1}) = 0$ für alle $k \leq n - 1$, also ist (D^n, S^{n-1}) ein $(n - 1)$ -zusammenhängendes Paar nach Bemerkung 3.37, und (2) ist gezeigt.

Wegen (3.4) sind auch die Paare $(U, U \cap V)$ und $(V, U \cap V)$ jeweils $(n - 1)$ -zusammenhängend. Nach dem Ausschneidungssatz 3.38 ist $(U, U \cap V) \rightarrow (S^n, V)$ eine $(2n - 2)$ -zusammenhängende Abbildung. Es folgt Behauptung (4).

Für $n \geq 2$ ist $2n - 2 \geq n$, und für $k < n$ erhalten wir

$$0 = \pi_k(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_k(U, U \cap V) \cong \pi_k(S^n, V) \cong \pi_k(S^n).$$

Damit sind (1), (2) und (4) für alle n gezeigt.

Für $n = 1$ folgt (3) aus Satz 2.28. Für $n = 2$ betrachten wir die Homotopiesequenz der Hopf-Faserung aus Beispiel 3.33. Wegen (1) hat sie die Form

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\pi_1(S^3)}_{=0} \xleftarrow{i_*} \underbrace{\pi_1(S^1)}_{\cong \mathbb{Z}} \xleftarrow{\partial} \pi_2(S^2) \xleftarrow{p_*} \underbrace{\pi_2(S^3)}_{=0} \longleftarrow \cdots$$

Mit (4) und (3.5) erhalten wir die Isomorphismen in (3) induktiv für alle n .

Wir konstruieren induktiv Homöomorphismen

$$\varphi_k: I^k/\partial I^k \xrightarrow{\cong} S^k \quad \text{und} \quad \psi_k: (I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k) \xrightarrow{\cong} (D^k, S^{k-1})$$

wie in den Bemerkung 3.2 (3), und zeigen, dass $[\text{id}_{S^n}] = [\varphi_n]$ und $[\text{id}_{(D^{n+1}, S^n)}] = [\psi_{n+1}]$ jeweils Erzeuger von $\pi_n(S^n)$ beziehungsweise $\pi_{n+1}(D^{n+1}, S^n)$ sind. Für $\pi_1(S^1)$ folgt das aus Satz 2.28.

Sei also $n \geq 2$ und $[\varphi_{n-1}]$ Erzeuger von $\pi_{n-1}(S^{n-1})$. Dann können wir ψ_n konstruieren, indem wir

$$\psi_n|_{(I^{n-1} \times \{0\})/(\partial I^{n-1} \times \{0\})} = \varphi_{n-1}$$

auf $(I^n/\partial I^n, \partial I^n/\partial I^n)$ fortsetzen. Nach Satz 3.19 und (3.5) ist dann $[\psi_n] = \partial^{-1}[\varphi_{n-1}]$ Erzeuger von $\pi_n(D^n, S^{n-1})$.

Mit dem Ausschneidungssatz 3.38 erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z} \cong \pi_n(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_n(U, U \cap V) \longrightarrow \pi_n(S^n, V) \cong \pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$$

(für $n = 2$ ist diese Abbildung wegen (4) zunächst nur surjektiv, aber die einzigen surjektiven Gruppen-Endomorphismen von \mathbb{Z} sind $a \mapsto \pm a$, also bijektiv). Das Bild von $[\psi_n]$ ist Erzeuger von $\pi_n(S^n)$.

Das Bild von $[\psi_n]$ in $\pi_n(S^n, V)$ entspricht einer Abbildung, die das Innere von I^n homöomorph auf die Hemisphäre $\{x \in S^n \mid x_2 > 0\}$ abbildet. In $\pi_n(S^n, \{e_1\}) \cong \pi_n(S^n)$ entspricht das einer Abbildung, die das Innere von I^n homöomorph auf $S^n \setminus \{e_1\}$ abbildet; diese sei unsere neue Abbildung φ_n . \square

3.43. BEISPIEL. Wir betrachten die Hopf-Faserungen aus den Beispielen 3.33 und 3.34.

- (1) Da $\pi_1(S^{2n+1}) = 0$ für $n \geq 1$ nach Satz 3.42 (1), ist die Inklusion $i: S^1 \rightarrow S^{2n+1}$ der Faser in der Hopf-Faserung $p: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ homotop zur konstanten Abbildung; es folgt $\pi_k i = 0$ für alle k . Somit zerfällt die lange exakte Sequenz in eine Folge kurzer exakter Sequenzen der Form

$$0 \longleftarrow \pi_{k-1}(S^1) \xleftarrow{\partial} \pi_k(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{p_*} \pi_k(S^{2n+1}) \longleftarrow 0.$$

Aus Beispiel 3.27 folgt jetzt

$$\pi_2(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \pi_k(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_k(S^{2n+1}) \quad \text{für alle } k \neq 2.$$

Wegen Satz 3.42 (3) gilt für $k \neq 2$ also auch

$$\pi_{2n+1}(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_{2n+1}(S^{2n+1}) \cong \mathbb{Z}, \quad \text{insbesondere} \quad \pi_3(S^2) \cong \pi_3(\mathbb{C}P^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Erzeuger dieser Gruppe \mathbb{Z} ist übrigens die Hopf-Faserung selbst, denn

$$[p] = [p \circ \text{id}_{S^{2n+1}}] = p_*[\text{id}_{S^{2n+1}}].$$

Interessanterweise kann man also eine Sphäre in eine Mannigfaltigkeit M kleinerer Dimension nicht-nullhomotop abbilden.

- (2) Genauso ist in der quaternionischen Hopf-Faserung $i: S^3 \rightarrow S^{4n+3}$ homotop zur konstanten Abbildung, und wir erhalten eine Folge kurzer exakter Sequenzen

$$0 \longleftarrow \pi_{k-1}(S^3) \xleftarrow{\partial} \pi_k(\mathbb{H}P^n) \xrightarrow{p_*} \pi_k(S^{4n+3}) \longleftarrow 0.$$

Im Gegensatz zur S^1 gilt $\pi_k(S^3) \neq 0$ für unendlich viele $k \geq 3$. Für $k = 4n + 3$ sehen wir aber immerhin, dass die Klasse $[p] = p_*[\text{id}_{S^{4n+3}}]$ der quaternionischen Hopf-Faserung unendliche Ordnung in der Gruppe $\pi_{4n+3}(\mathbb{H}P^n)$ hat. Im Spezialfall $n = 1$ folgt daraus, dass $\pi_7(S^4)$ eine unendliche Gruppe ist.

In der Tat enthält $\pi_{4n-1}(S^{2n})$ stets \mathbb{Z} als direkten Summanden für alle $n \in \mathbb{Z}$, aber das können wir jetzt noch nicht beweisen. Ansonsten ist $\pi_k(S^n)$ endlich für $k > n$, und wir sehen, dass die Bedingung in Satz 3.42 (4) scharf ist, denn $\pi_{4n-1}(S^{2n}) \rightarrow \pi_{4n}(S^{2n+1})$ ist sicher nicht injektiv.

Der Satz 3.42 von Brouwer-Hopf hat viele topologische und geometrische Anwendungen. Einige fassen wir hier zusammen, weitere folgen in Übung 3.117.

3.44. SATZ (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Für $n \geq 0$ hat jede stetige Abbildung $f: D^n \rightarrow D^n$ einen Fixpunkt.*

Der Fall $n = 1$ folgt aus dem Zwischenwertsatz, siehe Bemerkung 2.29, und $n = 2$ haben wir bereits in Satz 2.31 behandelt.

BEWEIS. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen, es sei also $n \geq 1$. Wie im Beweis von Satz 2.31 im Fall $n = 2$ nehmen wir an, dass die Abbildung $f: D^n \rightarrow D^n$ keinen Fixpunkt hat, und konstruieren dann eine Retraktion $r: D^n \rightarrow S^{n-1} = \partial D^n$ wie in Abbildung 2.2. Sei $i: S^{n-1} \rightarrow D^n$ die Inklusion, dann gilt also $r \circ i = \text{id}_{S^{n-1}}$. Wie in Bemerkung 2.30 folgt für jeden kovarianten Funktor Φ von der Kategorie \mathcal{Top}_+ in eine Kategorie \mathcal{C} , dass $\Phi r \circ \Phi i = \text{id}_{\Phi S^{n-1}}$. Der Funktor $\pi_{n-1}: \mathcal{Top}_+ \rightarrow \mathcal{Set}_+$ liefert jetzt einen Widerspruch, da $\pi_{n-1}(S^{n-1}) \neq \{*\} = \pi_{n-1}(D^n)$. \square

Wir wollen jetzt freie Homotopieklassen von Abbildungen von S^n nach S^n betrachten und erinnern uns an Folgerung 3.8. Für die Sphären S^n mit $n \geq 1$ wirkt $\pi_1(S^n)$ trivial auf $\pi_k(S^n)$, denn $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ ist abelsch und alle anderen $\pi_k(S^1)$ verschwinden, und für $n > 1$ ist $\pi_1(S^n)$ trivial. Daher identifizieren wir $[S_+^k, S^n]$ mit $\pi_k(S^n)$.

3.45. DEFINITION. Sei $\text{deg}: [S_+^n, S^n] \cong \pi_n(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$ der Isomorphismus aus Satz 3.42 (3). Für eine Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ heißt $\text{deg } f = \text{deg}[f] \in \mathbb{Z}$ der *Abbildungsgrad* von f .

Später werden wir diesen Begriff verallgemeinern auf Abbildungen zwischen orientierten topologischen Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension.

3.46. FOLGERUNG (aus Satz 3.42). *Zwei Abbildungen $f, g: S^n \rightarrow S^n$ sind genau dann homotop, wenn sie den gleichen Abbildungsgrad haben.* \square

3.47. BEISPIEL. Es sei $A \in GL(n, \mathbb{R})$ für $n \geq 1$, dann hat die Abbildung $f_A: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ mit

$$f_A(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|}$$

den Abbildungsgrad $\text{deg } f_A = \text{sign det } A \in \{1, -1\}$.

Die Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ hat genau zwei Wegzusammenhangskomponenten, auf denen die Determinante unterschiedliches Vorzeichen hat. Ein Weg γ zwischen zwei Elementen $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$ liefert eine Homotopie

$$h(x, t) = \frac{\gamma(t)x}{\|\gamma(t)x\|}$$

zwischen f_A und f_B . Da $\text{deg } f_{E_n} = \text{deg id} = \text{sign det } E_n$ gilt, reicht es, ein Element A mit $\text{deg } f_A = \text{sign det } A = -1$ anzugeben. Aus dem Beweis von Satz 3.5 schließen wir, dass folgende Matrix das Gewünschte leistet:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Unter einem Vektorfeld auf S^n verstehen wir eine Abbildung $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, so dass x und $f(x)$ für alle x aufeinander senkrecht stehen.

3.48. SATZ (Satz vom Igel). *Die Sphäre S^n trägt genau dann ein nirgends verschwindendes Vektorfeld, wenn n ungerade ist.*

BEWEIS. Sei $n = 2k - 1$ ungerade. Ein nicht verschwindendes Vektorfeld wird gegeben durch

$$f(z) = iz \quad \text{für alle } z \in S^n \subset \mathbb{C}^k.$$

Umgekehrt sei f ein nirgends verschwindendes Vektorfeld. Indem wir $f(x)$ durch $\frac{f(x)}{\|f(x)\|}$ ersetzen, dürfen wir $\|f(x)\| = 1$ für alle $x \in S^n$ annehmen. Dann erhalten wir eine Homotopie zwischen id und $-\text{id}$ durch

$$h(x, t) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)f(x).$$

Es folgt

$$1 = \text{deg id} = \text{deg}(-\text{id}) = \text{sign det}(-E_{n+1}) = (-1)^{n+1},$$

also ist n ungerade. \square

Wir beweisen noch die Invarianz der Dimension und die Invarianz des Gebietes. Dabei ist interessant, dass wir mit Hilfe eines homotopieinvarianten Funktors Eigenschaften nachweisen können, die nicht homotopieinvariant sind. Wir erinnern uns an den Begriff der topologischen Mannigfaltigkeit aus Definition 1.77, siehe auch Bemerkung 1.79 (3). Es sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum und $x \in X$, $x \neq x_0$. Dann schreiben wir $X|x = (X, X \setminus \{x\}) = (X, X \setminus \{x\}, x_0)$.

3.49. BEISPIEL. Bis auf Homöomorphie gibt es nur zwei zusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeiten: den Kreis S^1 und das offene Intervall \mathbb{R} . In diesem Fall erhalten wir für jeden Punkt x Bijektionen $\pi_0(S^1|x) = \pi_0(\mathbb{R}|x) = \{*\}$, sowie mit Folgerung 3.21 auch

$$\pi_1(S^1|x) \cong \pi_1(S^1, \{x_0\}) \cong \mathbb{Z}, \quad \text{und} \quad \pi_1(\mathbb{R}|x) \cong \pi_1(D^1, S^0) \cong \pi_0(S^0) \cong \{0, *\}.$$

3.50. PROPOSITION. *Es sei M eine zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$, und es sei $x \in M$. Dann gilt*

- (1) Für $0 \leq k \leq n - 1$ ist $\pi_k(M|x) = 0$.
- (2) Die Gruppe $\pi_n(M|x)$ enthält eine Kopie von \mathbb{Z} als Untergruppe.

Falls M nicht zusammenhängend ist, gilt die Aussage, falls wir den Basispunkt in der gleichen Zusammenhangskomponente wie x wählen.

BEWEIS. Es sei $U \subset M$ eine offene Umgebung von x , die zu B^n (oder äquivalent zu \mathbb{R}^n) homöomorph ist. Indem wir U gegebenenfalls verkleinern, dürfen wir annehmen, dass sich der Homöomorphismus zu einem Homöomorphismus $\bar{U} \cong D^n$ fortsetzt.

Wir zerlegen

$$M = U \cup (M \setminus \{x\}).$$

Da M zusammenhängend ist, ist $(M \setminus \{x\}, U \setminus \{x\})$ ein 0-zusammenhängendes Paar. Da U zusammenziehbar und $U \setminus \{x\}$ zu S^{n-1} homotopieäquivalent ist, ist $U|x = (U, U \setminus \{x\})$ ein $(n - 1)$ -zusammenhängendes Paar. Aus dem Ausschneidungssatz folgt für $k \leq n - 1$, dass

$$\pi_k(M|x) = \pi_k(M, M \setminus \{x\}) \cong \pi_k(U, U \setminus \{x\}) = \pi_k(U|x) = 0.$$

Betrachte jetzt die Inklusion $U \rightarrow M$ und die Quotientenabbildung

$$q: M \rightarrow M/(M \setminus U) \cong S^n.$$

Wie im Beweis von Satz 3.42 erhalten wir einen Isomorphismus

$$\pi_n(q \circ i): \pi_n(U|x) \cong \pi_n(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow \pi_n(S^n).$$

Wie in Bemerkung 2.30 folgt die Injektivität von $\pi_n i$. □

3.51. SATZ (Invarianz der Dimension, Brouwer). *Es seien M, N topologische Mannigfaltigkeiten der Dimensionen $m, n \in \mathbb{N}$. Wenn M und N homöomorph sind, gilt $m = n$.*

BEWEIS. Wir betrachten als erstes den Spezialfall, dass $m = 0$. In diesem Fall trägt M die diskrete Topologie. Wenn M und N homöomorph ist, trägt auch N die diskrete Topologie, also gilt auch $n = 0$. Andernfalls können wir mit Beispiel 3.49 und Proposition 3.50 die Dimension von M charakterisieren als

$$m = \inf \{ k \in \mathbb{N} \mid \pi_k(M|x) \neq 0 \}.$$

Wenn M und N homöomorph sind, folgt $m = n$. □

3.52. DEFINITION. Eine (*topologische*) *Mannigfaltigkeit mit Rand* der Dimension $n \in \mathbb{N}$ ist ein Hausdorff-Raum M mit abzählbarer Basis, so daß jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset M$ besitzt, die homöomorph zu \mathbb{R}^n oder zu $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ ist.

Der (*geometrische*) *Rand* ∂M von M ist die Teilmenge derjenigen Punkte, die von Homöomorphismen $U \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ wie oben auf Punkte in $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ abgebildet werden.

3.53. BEMERKUNG. Für einen Punkt x in einer Mannigfaltigkeit M mit Rand gibt es genau zwei Möglichkeiten, siehe Übung 3.118.

- (1) Für jede offene Umgebung $U \subset M$ von x und jeden Homöomorphismus $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ gilt $\varphi(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$; in diesem Fall heißt x ein *innerer Punkt* von M , oder
- (2) Es gibt keine offene Umgebung von x in M , die zu \mathbb{R}^n homöomorph ist, und für jede offene Umgebung $U \subset M$ von x und jeden Homöomorphismus $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ gilt $\varphi(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$; in diesem Fall heißt x ein *Randpunkt* von M .

3.54. BEISPIEL. Wir kennen bereits einige topologische Mannigfaltigkeiten mit Rand.

- (1) Jede topologische Mannigfaltigkeit M im Sinne von Definition 1.77 ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = \emptyset$.
- (2) Jede differenzierbare Mannigfaltigkeit M mit Rand $N \subset M$ ist topologische Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = N$.
- (3) Der Halbraum $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.
- (4) Der abgeschlossene Ball D^n ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand S^{n-1} .
- (5) Der Einheitswürfel I^n ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand ∂I^n , denn es gilt $(D^n, S^{n-1}) \cong (I^n, \partial I^n)$.

3.f. Kofaserungen und Quotienten

Wenn man in einem Diagramm alle Pfeile umdreht, erhält man ein dazu duales Diagramm. In diesem Sinne sind Produkte dual zur disjunkten Vereinigung (Sätze 1.40 und 1.46), Unterräume sind dual zu Quotienten (Sätze 1.43 und 1.72). Solange man nur abstrakt mit universellen Eigenschaften arbeitet, lassen sich alle Argumente übertragen. Aber bereits die Existenz von Produkten oder disjunkten Vereinigungen lässt sich nicht rein abstrakt zeigen, man braucht konkrete Überlegungen.

Eckmann-Hilton-Dualität ist die Idee, dass es auch zu jedem homotopietheoretischen Begriff einen dualen Begriff geben sollte. In diesem Abschnitt geht es um den dualen Begriff zu den Faserungen aus Abschnitt 3.c, der tatsächlich mindestens so wichtig ist wie das Original. Im Hinblick auf später betrachten wir in diesem Abschnitt auch Räume ohne Basispunkt. Wir bilden das duale Diagramm zum Diagramm zur Homotopieliftungseigenschaft

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\
 \times\{0\} \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p \\
 Y \times I & \xrightarrow{h} & B
 \end{array}
 \quad \text{und} \quad
 \begin{array}{ccc}
 Y & \xleftarrow{f} & X \\
 \text{ev}_0 \uparrow & \nwarrow H & \uparrow i \\
 C(I, Y) & \xleftarrow{h} & A
 \end{array}$$

Hier ist nach dem Exponentialgesetz 1.60 (3) das Produkt mit dem festen, lokalkompakten Raum I dual zum Wegeraum $C(I, \cdot)$: anstelle von Homotopien von Abbildungen von Y nach B oder E betrachten wir Homotopien von Abbildungen von A oder X nach Y . Das rechte Diagramm führt zu unserem neuen Begriff.

3.55. DEFINITION. Eine Abbildung $i: A \rightarrow X$ ist eine (*Hurewicz*-) *Kofaserung*, wenn i für jeden Raum Y die *Homotopieausdehnungseigenschaft* besitzt, das heißt, wenn es zu jedem Raum Y , jeder Abbildung $f: X \rightarrow Y$ und jeder Homotopie $h: A \times I \rightarrow Y$ mit

$$h(a, 0) = f(i(a)) \quad \text{für alle } a \in A \quad (1)$$

eine Homotopie $H: X \times I \rightarrow Y$ gibt, so dass

$$H(x, 0) = f(x) \quad \text{und} \quad H(i(a), t) = h(a, t) \quad \text{für alle } x \in X, a \in A \text{ und } t \in I. \quad (2)$$

Wir nennen ein Paar (X, A) eine *Kofaserung*, wenn die Inklusion $i: A \rightarrow X$ eine Kofaserung ist. Wir nennen einen punktierten Raum (X, x_0) *gut punktiert* und x_0 einen *guten* oder *nicht entarteten Basispunkt*, wenn $\{x_0\}$ in X abgeschlossen und $(X, \{x_0\})$ eine Kofaserung ist.

Die neue Definition von „gut punktiert“ unterscheidet sich von derjenigen aus Folgerung 2.50, siehe Bemerkung 3.60 (3).

3.56. BEISPIEL. Zunächst wollen wir etwas besser verstehen, was wir gerade definiert haben. Wir beginnen mit einigen trivialen Beispielen.

- (1) Die Identität id_X ist eine Kofaserung.
- (2) Die triviale Abbildung $\emptyset \rightarrow X$ ist eine Kofaserung in Top , das Analogon $\text{pt} \rightarrow X$ in Top_+ jedoch nicht immer.
- (3) Die Inklusion $X \rightarrow X \sqcup Y$ ist eine Kofaserung in Top . Falls Y gut punktiert ist, ist auch $X \rightarrow X \vee Y$ eine Kofaserung in Top_+ .

Weitere Beispiele gibt es in den Übungen 3.122 und 3.130.

3.57. DEFINITION. Es sei $f: Y \rightarrow X$ eine Abbildung. Wir definieren den *Abbildungszylinder*

$$Zf = (Y \times I \sqcup X) / \sim ,$$

wobei „ \sim “ die von $(y, 0) \sim f(y)$ für alle $y \in Y$ erzeugte Äquivalenzrelation sei.

3.58. BEMERKUNG. Es sei $i: A \rightarrow X$ eine Abbildung, dann entspricht ein Paar von Abbildungen f, h wie in Definition 3.55 (1) nach der charakteristischen Eigenschaft 1.72 (2) der Quotiententopologie genau einer stetigen Abbildung $F: Zi \rightarrow Y$. Insbesondere induzieren für $Y = X \times I$ die Abbildungen

$$X \cong X \times \{0\} \hookrightarrow X \times I \quad \text{und} \quad A \times I \xrightarrow{i \times \text{id}_I} X \times I$$

eine stetige Abbildung $\bar{i}: Zi \rightarrow X \times I$. Es folgt, dass i genau dann eine Kofaserung ist, wenn Zi ein Retrakt von $X \times I$ ist, das heißt, wenn eine Abbildung $\bar{r}: X \times I \rightarrow Zi$ mit $\bar{r} \circ \bar{i} = \text{id}_{Zi}$ existiert. Denn für jede Kofaserung i liefert die Homotopieausdehnungseigenschaft für $\text{id}_{Zi}: Zi \rightarrow Zi$ gerade eine solche Abbildung \bar{r} . Seien umgekehrt f und h wie in Definition 3.55 (1) gegeben, sei $F: Zi \rightarrow Y$ die davon induzierte Abbildung, und sei $\bar{r}: X \times I \rightarrow Zi$ wie oben, dann erfüllt $H = F \circ \bar{r}: X \times I \rightarrow Y$ gerade die Bedingung in Definition 3.55 (2).

Jetzt kann man zeigen, dass jede Kofaserung eine Einbettung ist (Übung 3.125), also induziert i einen Homöomorphismus $A \cong \text{im}(i)$. Wir können uns also auf Paare (X, A) beschränken. In diesem Fall ist $X \times \{0\} \cup A \times I$ also ein Retrakt von $X \times I$. Wenn X ein Hausdorff-Raum ist, ist $A \subset X$ abgeschlossen (Übung 3.126).

3.59. PROPOSITION. *Es sind äquivalent:*

- (1) (X, A) ist ein Umgebungsdeformationsretrakt, das heißt, es gibt eine Abbildung $u: X \rightarrow I$ und eine Homotopie $h: X \times I \rightarrow X$, so dass

$$A \subset u^{-1}(0) , \tag{a}$$

$$h|_{X \times \{0\} \cup A \times I} = \pi_X|_{X \times \{0\} \cup A \times I} , \tag{b}$$

$$h(x, t) \in A \text{ für alle } x \in X \text{ mit } u(x) < t ; \tag{c}$$

- (2) $X \times \{0\} \cup A \times I$ ist starker Deformationsretrakt von $X \times I$;
- (3) $X \times \{0\} \cup A \times I$ ist Retrakt von $X \times I$;
- (4) (X, A) ist eine Kofaserung.

Der Begriff Umgebungsdeformationsretrakt bedeutet, dass sich eine Umgebung $U = u^{-1}([0, 1])$ von A in X (aber nicht notwendigerweise in U) auf A zusammenziehen lässt. Aus (c) schließen wir, dass $u^{-1}(0)$ gerade der Abschluss von A ist. Wenn A abgeschlossen ist, folgt also $A = u^{-1}(0)$.

BEWEIS. Nach Bemerkung 3.58 sind (3) und (4) äquivalent, und (3) folgt offensichtlich aus (2). Es gelte (1), dann folgt (2) mit der Deformationsretraktion $r: X \times I \times I \rightarrow X \times I$,

$$r(x, t, s) = \begin{cases} (h(x, st), (1-s)t) & \text{falls } t \leq u(x), \text{ und} \\ (h(x, st), t - su(x)) & \text{falls } t \geq u(x). \end{cases}$$

Es gelte jetzt (3), und $r: X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ sei Retraktion. Es seien $\pi_X: X \times I \rightarrow X$ und $\pi_I: X \times I \rightarrow I$ die Projektionen. Dann definiere u und h durch

$$u(x) = \sup_{t \in I} (t - \pi_I r(x, t)) , \\ h(x, t) = \pi_X r(x, t) .$$

Die Funktion u ist stetig, da I kompakt ist. Die Eigenschaften (a)–(c) sind leicht zu prüfen, also folgt (1). \square

3.60. BEMERKUNG. Mit diesem Ergebnis erhalten wir weitere Beispiele von Kofaserungen.

- (1) Nach Bemerkung 3.23 ist das Paar $(D^n, S^{n-1}) \cong (I^n, \partial I^n)$ eine Kofaserung für $n \geq 0$.
- (2) Allgemeiner sei M topologischer Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M \neq \emptyset$, dann ist $(M, \partial M)$ eine Kofaserung. Hierzu ist allerdings noch zu zeigen, dass ∂M in M eine Umgebung der Gestalt $\partial M \times [0, 1)$ besitzt.
- (3) Der Begriff „gut punktiert“ in Folgerung 2.50 unterscheidet sich von dem aus Definition 3.55. Wir haben damals eine anschaulichere Definition gewählt, während die jetzige besser in den allgemeinen Kontext der Homotopietheorie passt. Man kann Folgerung 2.50 aber auch mit dem neuen Begriff zeigen (Übung 3.123).

3.61. FOLGERUNG (aus Proposition 3.59). *Es seien (X, A) und (Y, B) Kofaserungen mit $A \subset X$ und $B \subset Y$ abgeschlossen. Dann ist auch $(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$ Kofaserung.*

BEWEIS. Wir nehmen an, dass (X, A) mit $u: X \rightarrow I$ und $h: X \times I \rightarrow X$ sowie (Y, B) mit $v: Y \rightarrow I$ und $k: Y \times I \rightarrow Y$ zu Umgebungsdeformationsretrakten wie in Proposition 3.59 (1) werden. Dann ist auch $(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$ ein Umgebungsdeformationsretrakt mit $w: X \times Y \rightarrow I$ und $\ell: X \times Y \times I \rightarrow X \times Y$, wobei

$$w(x, y) = \min(u(x), v(y)) , \\ \ell(x, y, t) = \left(h(x, \min(t, v(y))), k(y, \min(t, u(x))) \right) .$$

Wir benötigen A und B abgeschlossen, um $\ell(x, y, t) \in A \times Y \cup X \times B$ aus $t > w(t)$ zu folgern. \square

Wir benutzen als nächstes die Homotopieausdehnungseigenschaft, um interessante Aussagen über Kofaserungen zu beweisen.

3.62. PROPOSITION. *Es sei (X, A) eine Kofaserung. Falls A zusammenziehbar ist, ist die Quotientenabbildung $X \rightarrow X/A$ eine Homotopieäquivalenz.*

BEWEIS. Es bezeichne $F: X \rightarrow X/A$ die Quotientenabbildung. Es sei $h: A \times I \rightarrow A$ eine Homotopie zwischen id_A und der konstanten Abbildung auf den Punkt $a_0 \in A \subset X$. Mit der Homotopieausdehnungseigenschaft für $\iota \circ h$ erhalten wir eine Homotopie $H: X \times I \rightarrow X$ mit $H|_{A \times I} = h$ und $H(\cdot, 0) = \text{id}_X$. Da $H(a, 1) = a_0$ für alle $a \in A$, induziert $H(\cdot, 1)$ eine Abbildung $G: X/A \rightarrow X$. Da $G(F(x)) = H(x, 1)$ für alle $x \in X$, ist H eine Homotopie zwischen id_X und $G \circ F$.

Da $H(a, t) = h(a, t) \in A$ für alle $a \in A$, induziert H eine Abbildung $\bar{H}: (X/A) \times I \rightarrow X/A$, und es gilt $\bar{H}(\cdot, 1) = F \circ G$. Also ist \bar{H} eine Homotopie zwischen $\text{id}_{X/A}$ und $F \circ G$. \square

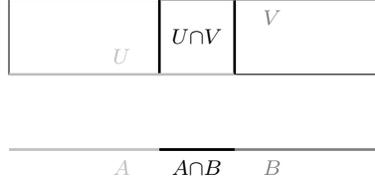


ABBILDUNG 3.7. Der Raum $Y = U \cup V$

In Folgerung 1.75 haben wir Pushouts kennengelernt. Wenn $A \subset X$ Teilmenge und $f: A \rightarrow B$ stetig ist, schreiben wir hier $X \cup_f B$ statt $B \cup_f X$. Dieser Begriff ist übrigens dual zum Faserprodukt oder Pullback aus Übung 3.112. Ein Spezialfall des Pullbacks ist die Faser, das duale Diagramm liefert die Kofaser einer Kofaserung $A \rightarrow X$, nämlich den Quotienten X/A .

3.63. BEISPIEL. Es sei $A \subset X$ Teilmenge und $f: A \rightarrow \text{pt}$ die konstante Abbildung, dann ist $X \cup_f \text{pt}$ homöomorph zum Quotienten X/A .

Das nächste Resultat ist eine wichtige Übung, siehe 3.127.

3.64. PROPOSITION. *Es sei (X, A) eine abgeschlossene Kofaserung und $f: A \rightarrow B$ stetig. Dann ist auch $(X \cup_f B, B)$ eine abgeschlossene Kofaserung.* \square

Weitere Aussagen über Kofaserungen folgen in den nächsten Abschnitten. Anstelle beliebiger Paare betrachtet man in der Homotopietheorie besonders gern Kofaserungen. Daher wollen wir ein wichtiges Resultat auf eine Kofaserungs-Situation übertragen.

3.65. FOLGERUNG (Ausschneidungssatz für Kofaserungen). *Es seien $A, B \subset X$ abgeschlossen mit $A \cup B = X$, $A \cap B \neq \emptyset$, so dass $(A, A \cap B)$ eine p -zusammenhängende und $(B, A \cap B)$ eine q -zusammenhängende Kofaserung ist, mit $p, q \geq 0$. Dann ist (X, B) ebenfalls eine Kofaserung, und $i: (A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$ ist eine $(p + q)$ -zusammenhängende Abbildung von Paaren.*

BEWEIS. Indem wir X als Pushout von A längs der Inklusion $A \cap B \rightarrow B$ auffassen, sehen wir mit Proposition 3.64, dass (X, B) eine Kofaserung ist.

Wir betrachten die Teilmenge

$$Y = (A \times \{0\}) \cup ((A \cap B) \times I) \cup (B \times \{1\}) \subset X \times I,$$

siehe Abbildung 3.7. Nach Proposition 3.59 (2) existieren Homotopien $H: A \times I^2 \rightarrow A \times I$ zwischen $\text{id}_{A \times I}$ und einer Retraktion auf $A \times \{0\} \cup (A \cap B) \times I$, und $K: B \times I^2 \rightarrow B \times I$ zwischen $\text{id}_{B \times I}$ und einer Retraktion auf $B \times \{1\} \cup (A \cap B) \times I$. Da $(A \cap B) \times I$ abgeschlossen ist, dürfen wir H und K verkleben und sehen, dass Y Deformationsretrakt von $X \times I$ ist. Insbesondere induziert die Projektion $X \times I \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz $Y \rightarrow X$.

Wir zerlegen jetzt Y in offene Teilmengen $U = Y \cap (X \times [0, 1))$ und $V = Y \cap (X \times (0, 1])$. Dann induziert die obige Projektion Homotopieäquivalenzen $U \rightarrow A$, $V \rightarrow B$ und $U \cap V \rightarrow A \cap B$. Jetzt folgt die Aussage aus dem Ausschneidungssatz 3.38. \square

Wir wollen den Ausschneidungssatz benutzen, um Aussagen über Quotienten von Paaren topologischer Räume zu machen.

3.66. DEFINITION. Es sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum. Dann definieren wir den (reduzierten) Kegel über X als

$$CX = (X \times I) / (X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times I).$$

Es sei (X, A) ein punktiertes Paar, dann definieren wir den *Homotopiequotienten* (auch *Homotopiekofaser*) $X//A$ durch

$$X//A = X \cup_A CA = (X \sqcup CA) / \sim ,$$

wobei die Äquivalenzrelation „ \sim “ erzeugt wird durch $X \ni a \sim [(a, 1)] \in CA$ für alle $a \in A$.

Wir können genauso gut auch den unreduzierten Kegel und den unreduzierten Homotopiequotienten betrachten.

3.67. BEMERKUNG. Wir nehmen an, dass (A, x_0) gut punktiert ist.

- (1) Nach Bemerkung 3.60 (1) ist $(D^1, S^0) \cong (I, \partial I)$ eine abgeschlossene Kofaserung. Wir wenden Folgerung 3.61 auf dieses Paar und (A, \emptyset) sowie $(A, \{x_0\})$ an und erhalten abgeschlossene Kofaserungen

$$(A \times I, A \times \partial I) \quad \text{und} \quad (A \times I, A \times \partial I \cup \{x_0\} \times I) .$$

Das erste Paar betrachten wir später als den *Zylinder* über A . Wir betrachten die Quotientenabbildung

$$q: A \times \partial I \cup \{x_0\} \times I \longrightarrow (A \times \partial I \cup \{x_0\} \times I) / (\{x_0\} \times I) \cong A \vee A .$$

Der Pushout des zweiten Paares oben mit q liefert den sogenannten *reduzierten Zylinder*

$$(A \times I) \cup_q ((A \times \partial I \cup \{x_0\} \times I) / (\{x_0\} \times I)) \cong (A \times I) / (\{x_0\} \times I) .$$

Nach Proposition 3.64 erhalten wir eine abgeschlossene Kofaserung

$$((A \times I) / (\{x_0\} \times I), A \vee A) .$$

- (2) Es sei $c: A \rightarrow \{x_0\} \subset A$ die konstante Abbildung. Nach der universellen Eigenschaft aus Folgerung 1.75 erhalten wir eine Abbildung $g = (c, \text{id}_A): A \vee A \rightarrow A$. Wir betrachten den reduzierten Zylinder und bilden den Pushout

$$((A \times I) / (\{x_0\} \times I), A \vee A) \cup_g A \cong CA .$$

Mithin bildet der reduzierte Kegel eine Kofaserung (CA, A) . Wenn $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge ist, liefert der Pushout längs der Inklusion $A: X$ den Raum $X//A$ und wir erhalten eine abgeschlossene Kofaserung $(X//A, X)$.

- (3) Sei jetzt (X, A) ebenfalls eine abgeschlossene Kofaserung. Dann dürfen wir den Pushout „umdrehen“ und erhalten eine Kofaserung $(X//A, CA)$. Da $(X \times I) / (X \times \{0\})$ zusammenziehbar ist, ist CA nach Proposition 3.62 zusammenziehbar, und $X//A$ ist homotopieäquivalent zum Quotienten $(X//A) / CA \cong X/A$. Wir betrachten $X//A$ als Ersatz für den Quotienten bis auf Homotopie, selbst wenn (X, A) keine abgeschlossene Kofaserung ist. Daher der Name „Homotopiequotient“.

3.68. PROPOSITION. *Es sei (X, A) eine p -zusammenhängende abgeschlossene Kofaserung und A sei q -zusammenhängend mit $p \geq 0, q \geq -1$. Dann ist die Quotientenabbildung $(X, A) \rightarrow (X/A, *)$ eine $p + q + 1$ -zusammenhängende Abbildung.*

Wenn A nicht zusammenhängend ist, sei $q = -1$.

BEWEIS. Anstelle von X/A betrachten wir den Raum $X//A = X \cup_A CA$. Da CA zusammenziehbar und A ein q -zusammenhängender Raum ist, ist (CA, A) ein $(q + 1)$ -zusammenhängendes Paar nach Definition 3.35. Nach dem Ausschneidungssatz 3.65 ist die Inklusion $(X, A) \rightarrow (X \cup_A CA, CA)$ eine $(p + q + 1)$ -zusammenhängende Abbildung. Da CA zusammenziehbar und die Quotientenabbildung $X \cup_A CA \rightarrow X/A$ eine Homotopieäquivalenz ist, gilt $\pi_k(X \cup_A CA, CA) \cong \pi_k(X \cup_A CA) \cong \pi_k(X/A)$ für alle k . \square

3.69. BEISPIEL. Wir betrachten das 1-zusammenhängende Paar (D^2, S^1) . Da S^1 zusammenhängend ist, erhalten wir eine 2-zusammenhängende Quotientenabbildung $(D^2, S^1) \rightarrow (S^2, *)$. Tatsächlich gilt $\pi_2(D^2, S^1) \cong \mathbb{Z} \cong \pi_2(S^2)$, aber $0 \cong \pi_3(D^2, S^1) \rightarrow \pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ ist nicht mehr surjektiv.

3.70. FOLGERUNG (aus der langen exakten Sequenz 3.19 des Paares (X, A)). *Es sei (X, A) eine p -zusammenhängende Kofaserung mit $p \geq 0$, und A sei q -zusammenhängend. Dann erhalten wir eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longleftarrow \pi_0(X) \longleftarrow \pi_0(A) \xleftarrow{\partial} \pi_1(X/A) \longleftarrow \cdots \longleftarrow \pi_{p+q}(X) \longleftarrow \pi_{p+q}(A).$$

BEWEIS. Wir betrachten die lange exakte Sequenz für Paare und erhalten

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{p+q}(X, A) & \longleftarrow & \pi_{p+q}(X) & \longleftarrow & \pi_{p+q}(A) & \xleftarrow{\partial} & \pi_{p+q+1}(X, A) \longleftarrow \cdots \\ \cong \downarrow & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \\ \pi_{p+q}(X/A) & \longleftarrow & \pi_{p+q}(X) & \longleftarrow & \pi_{p+q}(A) & & \pi_{p+q+1}(X/A). \quad \square \end{array}$$

Im Allgemeinen gibt es keine passende Abbildung $\partial: \pi_{p+q+1}(X/A) \rightarrow \pi_{p+q}(A)$, die die Sequenz fortsetzt. Für $(X, A) = (D^3, S^2)$ mit $p = 2$ und $q = 1$ wäre $\partial: \pi_4(S^3) \cong \mathbb{Z}/2 \rightarrow \pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ linksinvers zur Quotientenabbildung $\pi_4(D^3, S^2) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \pi_4(S^3) \cong \mathbb{Z}/2$.

3.g. Der Freudenthalsche Einhängungssatz

Wir definieren das reduzierte Produkt und die Einhängung punktierter Räume und zeigen, dass Homotopiegruppen unter iterierter Einhängung „stabil“ werden. Die Eigenschaften dieser sogenannten stabilen Homotopiegruppen beleuchten wir dann im nächsten Abschnitt.

Wir erinnern uns an das Bouquet oder Wedge-Produkt punktierter Räume aus Definition 2.48. Es ist das Koproduct in der Kategorie \mathcal{Top}_+ nach Bemerkung 2.49. Seien $(X_j, x_j)_{j \in J}$ gut punktierte Räume, dann hat

$$\left(\prod_{j \in J} X_j, \{x_j \mid j \in J\} \right)$$

die Homotopieausdehnungseigenschaft, und $\{x_j \mid j \in J\}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge. Das Bouquet $\bigvee_{j \in J} (X_j, x_j)$ ist der Quotient nach dieser abgeschlossenen Teilmenge, also nach Proposition 3.64 selbst eine abgeschlossene Kofaserung.

Die universellen Eigenschaften aus Satz 1.40 und 1.46 liefern stets Abbildungen vom Koproduct einer Familie punktierter Räume in ihr Produkt. Wir können also $X \vee Y$ nach $X \times Y$ abbilden, indem wir $x \in X$ auf (x, y_0) und $y \in Y$ auf $(x_0, y) \in X \times Y$ abbilden, und erhalten einen Unterraum des kartesischen Produktes.

3.71. DEFINITION. Es seien $(X, x_0), (Y, y_0)$ punktierte Räume, dann definieren wir das *reduzierte* (oder auch *Smash-*) *Produkt* durch

$$(X, x_0) \wedge (Y, y_0) = (X \times Y) / (X \vee Y).$$

Für $x \in X, y \in Y$ schreibe $x \wedge y \in X \wedge Y$ für die Äquivalenzklasse des Punktes (x, y) . Seien $(X, A), (Y, B)$ punktierte Paare, dann setzen wir

$$(X, A) \wedge (Y, B) = (X \wedge Y, A \wedge Y \cup X \wedge B).$$

Seien $f: X_1 \rightarrow X_2, g: Y_1 \rightarrow Y_2$ punktierte Abbildungen von Räumen oder Paaren, dann definieren wir ihr reduziertes Produkt als

$$f \wedge g: X_1 \wedge Y_1 \rightarrow X_2 \wedge Y_2 \quad \text{mit} \quad (f \wedge g)(x \wedge y) = f(x) \wedge g(y).$$

Die (*reduzierte*) *Einhängung* oder (*reduzierte*) *Suspension* von X oder (X, A) ist definiert als

$$SX = X \wedge S^1 \quad \text{beziehungsweise} \quad (SX, SA).$$

Die Einhängung einer punktierten Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist definiert als

$$Sf = f \wedge \text{id}_{S^1}: SX \rightarrow SY.$$

Später werden wir die Basispunkte des Öfteren nicht mitschreiben.

3.72. BEISPIEL. Es folgen einige wichtige elementare Beispiele.

(1) Der reduzierte Kegel von X aus Definition 3.66 lässt sich als $CX = (X, x_0) \wedge (I, 0)$ schreiben.

(2) Es gilt $S^k \wedge S^\ell \cong S^{k+\ell}$. Formal sieht man das am einfachsten mit Hilfe der Homöomorphismen

$$S^k \wedge S^\ell \cong (I^k / \partial I^k) \wedge (I^\ell / \partial I^\ell) \cong I^{k+\ell} / (\partial I^k \times I^\ell \cup I^k \times \partial I^\ell) = I^{k+\ell} / \partial I^{k+\ell} \cong S^{k+\ell}.$$

(3) Es gilt $S^k \wedge (D^\ell, S^{\ell-1}) \cong (D^{k+\ell}, S^{k+\ell-1})$. Hierzu betrachten wir

$$\begin{aligned} S^k \wedge (D^\ell, S^{\ell-1}) &\cong (I^k / \partial I^k) \wedge (I^\ell / \partial' I^\ell, \partial I^\ell / \partial' I^\ell) \\ &\cong (I^{k+\ell} / \underbrace{(\partial I^k \times I^\ell \cup I^k \times \partial' I^\ell)}_{=\partial' I^{k+\ell}}), \underbrace{(\partial I^k \times I^\ell \cup I^k \times \partial I^\ell)}_{\partial I^{k+\ell}} / \partial' I^{k+\ell} \cong (D^{k+\ell}, S^{k+\ell-1}). \end{aligned}$$

3.73. BEMERKUNG. Es folgen einige elementare Eigenschaften.

(1) Das reduzierte Produkt von Abbildungen ist mit der Verkettung verträglich:

$$(f_1 \wedge g_1) \circ (f_2 \wedge g_2) = (f_1 \circ f_2) \wedge (g_1 \circ g_2).$$

Insbesondere definiert die Einhängung einen Funktor $S: \mathcal{Top}_+ \rightarrow \mathcal{Top}_+$.

(2) Das reduzierte Produkt punktierter Räume oder Paare ist genau wie das kartesische Produkt (jeweils bis auf eindeutige natürliche Homöomorphismen) assoziativ und kommutativ. Insbesondere können wir die Einhängung iterieren und erhalten

$$S^k X \cong (\dots (X \wedge S^1) \wedge \dots) \wedge S^1 \cong X \wedge S^k.$$

Außerdem gilt

$$S^k(X \wedge Y) \cong X \wedge Y \wedge S^k \cong X \wedge (S^k Y) \cong (S^k X) \wedge Y.$$

(3) Es gilt (bis auf einen eindeutigen natürlichen Homöomorphismus) das Distributivgesetz

$$(X \vee Y) \wedge Z \cong (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z),$$

und analog für das reduzierte Produkt von links (Übung 3.131), analog zum Distributivgesetz von disjunkter Vereinigung und kartesischem Produkt. Insbesondere gilt auch

$$S^k(X \vee Y) \cong S^k X \vee S^k Y.$$

(4) Es gilt (bis auf einen eindeutigen natürlichen Homöomorphismus), dass

$$X \wedge S^0 \cong X \cong S^0 \wedge X.$$

Insbesondere gilt $S^k X \cong X \wedge S^k$ auch für $k \geq 0$.

(5) Ein reduziertes Produkt gut punktierter Räume ist wieder gut punktiert. Dazu benutzen wir Folgerung 3.61 und Proposition 3.64, und stellen $X \wedge Y$ als Pushout der Kofaserung $(X \times Y, X \vee Y)$ längs der konstanten Abbildung $X \vee Y \rightarrow \text{pt}$ dar.

Genauso ist ein reduziertes Produkt gut punktierter, abgeschlossener Kofaserungen wieder eine gut punktierte, abgeschlossene Kofaserung (Übung 3.132). Also erhalten wir auch einen Einhängungsfunktor für gut punktierte, abgeschlossene Kofaserungen mit

$$S^k(X, A) = (S^k X, S^k A).$$

- (6) Seien (X, A) und (Y, B) gut punktierte, abgeschlossene Kofaserungen, und sei $(Z, C) = (X, A) \wedge (Y, B)$, dann gilt $Z/C \cong (X/A) \wedge (Y/B)$. Eine analoge Eigenschaft haben wir in Beispiel 3.72 (2) bereits benutzt.

Man beachte, dass das reduzierte Produkt nicht die universelle Eigenschaft eines Produktes aus Satz 1.46 auf \mathcal{Top}_+ erfüllt — diese Rolle übernimmt das punktierte kartesische Produkt, wie wir bereits aus Übung 3.104 wissen. Stattdessen legen die obigen Eigenschaften nahe, es als eine Art Tensorprodukt zu betrachten. Diesen Standpunkt werden wir in Abschnitt 4.c noch näher beleuchten.

3.74. SATZ (Freudenthalscher Einhängungssatz). *Es sei X ein n -zusammenhängender, gut punktierter Raum, dann ist der Einhängungshomomorphismus*

$$S: \pi_k(X) \rightarrow \pi_{k+1}(SX)$$

ein Isomorphismus für $k \leq 2n$ und surjektiv für $k = 2n + 1$. Insbesondere ist SX ein $(n + 1)$ -zusammenhängender Raum.

Bevor wir diesen Satz beweisen, bemerken wir, dass wir genau dieses Verhalten im Falle $X = S^n$ bereits in Satz 3.42 (4) beobachten konnten.

BEWEIS. Wir erinnern uns an den reduzierten Kegel CX aus Definition 3.66. Wir hatten in Bemerkung 3.67 (2) die Basis des Kegels CX mit X identifiziert und gezeigt, dass (CX, X) eine Kofaserung ist. Für den Quotienten erhalten wir

$$CX/X \cong (X \times I)/(X \times \partial I \cup \{x_0\} \times I) \cong (X \times S^1)/(X \vee S^1) \cong SX.$$

Wir fahren ähnlich fort wie im Beweis des Satzes 3.42 von Brouwer und Hopf. Da CX zusammenziehbar ist, erhalten wir in der langen exakten Homotopiesequenz 3.19 des Paares (CX, X) einen Isomorphismus $\partial: \pi_{k+1}(CX, X) \xrightarrow{\cong} \pi_k(X)$. Die Umkehrabbildung wird induziert von $f \mapsto f \wedge \text{id}_{(I,1)}$. Wir schalten die Quotientenabbildung $q: CX \rightarrow SX$ nach und erhalten die gesuchte Abbildung

$$S: \pi_k(X) \xrightarrow{\partial^{-1}} \pi_{k+1}(CX, X) \xrightarrow{q_*} \pi_{k+1}(SX).$$

Da X ein n -zusammenhängender Raum und CX zusammenziehbar ist, ist (CX, X) ein $(n + 1)$ -zusammenhängendes Paar. Unsere Behauptung folgt also aus Proposition 3.68 über die Quotientenabbildung q . \square

3.h. Stabile Homotopiegruppen

Wir benutzen den Freudenthalschen Einhängungssatz, um stabile Homotopiegruppen zu definieren. Anschließend beweisen wir einige angenehme Eigenschaften dieser Funktoren. Unter anderem können wir abgeschlossene Kofaserungen durch ihre Quotienten ersetzen, ohne höheren Zusammenhang vorauszusetzen. Tatsächlich liefert stabile Homotopietheorie den Prototyp für eine Homologietheorie. Allerdings bezahlen wir auch einen Preis: die einfachen Formeln für Produkte und die lange exakte Sequenz für Faserbündel gehen verloren.

3.75. BEMERKUNG. Wir betrachten Abbildungen zwischen Einhängungen.

- (1) Es seien X, Y punktierte Räume. Auf der Menge $[SX, Y]$ der punktierten Homotopie-
klassen von Abbildungen $SX \rightarrow Y$ können wir wie in den Definitionen 2.13 und 3.1 eine
Gruppenstruktur definieren durch

$$(f + g)(x \wedge t) = \begin{cases} f(x \wedge (2t)) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ g(x \wedge (2t - 1)) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Die Abbildung ist wohldefiniert, denn für $t \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ bildet sie auf den Basispunkt y_0
ab, ebenso wie im Falle, dass $x = x_0$.

- (2) Indem wir diese Konstruktion iterieren, erhalten wir Gruppenstrukturen auch auf $[S^k X, Y]$
für alle $k \geq 1$. Im Falle $k \geq 2$ ist $[S^k X, Y]$ abelsch wie in Satz 3.5 (3).
(3) Als Spezialfall der obigen Konstruktion betrachten wir $[S^k X, S^k Y]$. Da Einhängung ein
Funktorkonstruktionsprinzip ist, erhalten wir eine Abbildung

$$S: [S^k X, S^k Y] \rightarrow [S^{k+1} X, S^{k+1} Y] \quad \text{mit} \quad f \mapsto Sf.$$

Nach Bemerkung 3.73 (2) ist das reduzierte Produkt assoziativ und kommutativ. Wir
können also dafür sorgen, dass die „neue“ Kopie von S^1 in $S^{k+1} X = S(S^k X)$ nicht dieje-
nige ist, mit der wir oben die Gruppenstruktur definiert haben. Daher ist $S: [S^k X, S^k Y] \rightarrow$
 $[S^{k+1} X, S^{k+1} Y]$ ein Gruppenhomomorphismus.

- (4) Wir wissen aus Übung 3.116, dass $[S^n, S^n]$ mit der Hintereinanderschaltung zu einem Ring
wird. Analog sehen wir, dass Hintereinanderausführung eine bilineare Abbildung

$$[S^n X, S^n Y] \times [S^n Y \times S^n Z] \xrightarrow{\circ} [S^n X, S^n Z]$$

liefert.

In Folgerung 1.76 haben wir die universelle Eigenschaft des Kolimes kennengelernt und Kolimi-
ten für Familien topologischer Räume definiert. Auch in der Kategorie der abelschen Gruppen gibt
es Kolimiten. Sei dazu $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Familie abelscher Gruppen mit Homomorphismen $f_{k\ell}: G_k \rightarrow$
 G_ℓ , so dass $f_{k\ell} \circ f_{jk} = f_{j\ell}$ für alle $j \leq k \leq \ell$. Dann definieren wir in Analogie zu (1.4) den Kolimes

$$G = \varinjlim G_k = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} G_k / \sim,$$

wobei $G_j \ni g_j \sim g_k \in G_k$ genau dann gelte, wenn es ein $\ell \geq k, j$ gibt, so dass $f_{j\ell}(g_j) = f_{k\ell}(g_k) \in G_\ell$.
Für jedes k erhalten wir eine natürliche Abbildung $f_k: G_k \rightarrow G$ mit $g_k \mapsto [g_k] \in G$, so dass $f_k =$
 $f_\ell \circ f_{k\ell}$ für alle $k \leq \ell$. Man kann sich davon überzeugen, dass G eine Gruppe ist, dass alle f_k
Gruppenhomomorphismen sind, und dass $(G, (f_k)_k)$ die universelle Eigenschaft eines Kolimes aus
Folgerung 1.76 erfüllt. Beispiele gibt es in Übung 3.134.

Hier haben wir zunächst Abbildungen $S: [S^k X, S^k Y] \rightarrow [S^{k+1} X, S^{k+1} Y]$. Hintereinanderschalt-
ten von $(\ell - k)$ dieser Abbildungen liefert $f_{k\ell}: [S^k X, S^k Y] \rightarrow [S^\ell X, S^\ell Y]$. Bei einem Kolimes kommt
es nie auf die ersten Glieder in der Folge an. Daher stört es im Folgenden nicht, dass im Allgemei-
nen $[X, Y]$ keine Gruppe und $[SX, SY]$ nicht abelsch ist. Wir dürfen am Anfang der Folge sogar
negative Indizes zulassen.

Sei $f: X \rightarrow Y$ stetig, dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_k(X) & \xrightarrow{S} & \pi_{k+1}(SX) & \xrightarrow{S} & \pi_{k+2}(S^2X) & \longrightarrow & \cdots \\ \pi_k f \downarrow & & \pi_{k+1} S f \downarrow & & \pi_{k+1} S^2 f \downarrow & & \\ \pi_k(Y) & \xrightarrow{S} & \pi_{k+1}(SY) & \xrightarrow{S} & \pi_{k+2}(S^2Y) & \longrightarrow & \cdots, \end{array}$$

denn für $u: S^k \rightarrow X$ gilt nach Bemerkung 3.73 (1), dass

$$(\pi_{k+1} S f)(S[u]) = [(f \wedge \text{id}_{S^1}) \circ (u \wedge \text{id}_{S^1})] = [(f \circ u) \wedge \text{id}_{S^1}] = S((\pi_k f)[u]) . \quad (3.6)$$

Die obere Reihe des Diagramms „konvergiert“ gegen den Kolimes der $\pi_{k+n}(S^n X)$ für $n \rightarrow \infty$, die untere gegen den Kolimes der $\pi_{k+n}(S^n Y)$, und die Abbildungen $\pi_{k+n} S^n f$ induzieren eine Abbildung zwischen diesen Kolimiten.

3.76. DEFINITION. Es seien X, Y punktierte Räume, dann definieren wir

$$[X, Y]^s = \varinjlim [S^n X, S^n Y] \in \mathcal{A}b .$$

Insbesondere definieren wir für alle $k \in \mathbb{Z}$ die k -te stabile Homotopiegruppe von X als

$$\pi_k^s(X) = [S^k, X]^s = \varinjlim \pi_{k+n}(S^n X) \in \mathcal{A}b .$$

Für Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ definieren wir

$$\pi_k^s f = \varinjlim \pi_{k+n} S^n f: \pi_k^s(X) \rightarrow \pi_k^s(Y) .$$

Wir könnten jetzt eine „naive“ stabile Homotopiekategorie mit den gleichen Objekten wie in \mathcal{Top}_+ und \mathcal{HTop}_+ definieren, und als Morphismenmengen die Gruppen $[X, Y]^s$ einsetzen. Diese Kategorie ist aber für Anwendungen nicht „stabil genug“: zum einen enthält sie zu wenig Objekte, so dass man später zu sogenannten „Spektrern“ übergeht. Zum anderen enthält sie zu wenig Morphismen, so dass man stattdessen Folgen solcher Abbildungen f_k zwischen Teilmengen der k -ten Räume der Spektrern betrachtet, dass jeder „Teil“ des k -ten Raumes für irgendein $\ell \geq k$ im Definitionsbereich von f_ℓ liegt. Im Falle der stabilen Homotopiegruppen sind diese Überlegungen allerdings nicht notwendig, so dass wir hier bereits das Wort „stabil“ benutzen dürfen.

3.77. PROPOSITION. Für alle $k \in \mathbb{Z}$ sind die stabilen Homotopiegruppen Funktoren

$$\pi_k^s: \mathcal{HTop}_+ \rightarrow \mathcal{A}b . \quad \square$$

Ein Kolimes ist besonders leicht dann zu berechnen, wenn die Folge der betrachteten Objekte irgendwann stationär wird, das heißt, wenn die Abbildungen $f_{k\ell}: G_k \rightarrow G_\ell$ für alle $k, \ell \geq n_0$ Isomorphismen sind. In diesem Fall ist der Kolimes G natürlich isomorph zu allen Gruppen G_k mit $k \geq n_0$. Genau dieses Phänomen beobachten wir im Fall der stabilen Homotopiegruppen.

3.78. FOLGERUNG (aus dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.74). Für jeden gut punktierten topologischen Raum X gilt

$$\pi_k^s(X) \cong \begin{cases} 0 & \text{falls } k < 0, \text{ und} \\ \pi_{k+\ell}(S^\ell X) & \text{falls } k \geq 0 \text{ und } \ell \geq k + 2. \end{cases}$$

Wenn X ein n -zusammenhängender Raum ist, gilt sogar

$$\pi_k^s(X) \cong \begin{cases} \pi_k(X) & \text{falls } k \leq n, \text{ und} \\ \pi_{k+\ell}(S^\ell X) & \text{falls } k > n \text{ und } \ell \geq \max(k - 2n, 0). \end{cases} \quad \square$$

3.79. DEFINITION. Ein gutes Paar (X, A, x_0) ist eine abgeschlossene Kofaserung, bei der (A, x_0) gut punktiert ist.

Zu jedem guten Paar betrachten wir die Inklusionsabbildung $i: A \rightarrow X$ und die Quotientenabbildung $q: X \rightarrow X/A$. Für Abbildungen f schreiben wir wieder kurz $f_* = \pi_k^s f$, wenn keine Missverständnisse zu erwarten sind.

3.80. SATZ (stabile Homotopiesequenz). *Für gute Paare (X, A) erhalten wir eine natürliche lange exakte Sequenz abelscher Gruppen*

$$\cdots \longleftarrow \pi_{k-1}^s(A) \xleftarrow{\partial} \pi_k^s(X/A) \xleftarrow{q_*} \pi_k^s(X) \xleftarrow{i_*} \pi_k^s(A) \longleftarrow \cdots$$

Diese Sequenz haben wir in Folgerung 3.70 bereits für die „unstabilen“ Homotopiegruppen gesehen, allerdings hat sie dort auf beiden Seiten nach endlich vielen Schritten aufgehört.

BEWEIS. Wir starten wieder mit den langen exakten Sequenzen der Paare $(S^n X, S^n A)$ aus Satz 3.19. Sie sind mit Einhängung verträglich, das heißt, das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longleftarrow & \pi_{k-1}(X) & \xleftarrow{\pi_{k-1}i} & \pi_{k-1}(A) & \xleftarrow{\partial} & \pi_k(X, A) & \xleftarrow{\pi_k q} & \pi_k(X) & \longleftarrow & \cdots \\ & & S \downarrow & & S \downarrow & & S \downarrow & & S \downarrow & & \\ \cdots & \longleftarrow & \pi_k(SX) & \xleftarrow{\pi_k S i} & \pi_{k-1}(SA) & \xleftarrow{\partial} & \pi_{k+1}(SX, SA) & \xleftarrow{\pi_{k+1} S q_*} & \pi_{k+1}(SX) & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

kommutiert. Dadurch erhalten wir die gesuchte Sequenz als Kolimes der obigen Sequenzen unter iterierter Einhängung. Jedes endliche Stück der obigen Sequenz wird durch ausreichend häufiges Einhängen stationär. Für die Terme $\pi_{k+\ell}(S^\ell A)$ und $\pi_{k+\ell}(S^\ell X)$ erhalten wir das mit Folgerung 3.78, und für die Terme $\pi_{k+\ell}(S^\ell X, S^\ell A)$ ergibt es sich aus dem Fünferlemma 3.20. Schließlich dürfen wir $\pi_{k+\ell}(S^\ell X, S^\ell A)$ für hinreichend hohe ℓ nach Proposition 3.68 und Bemerkung 3.73 (5) und (6) durch $\pi_{k+\ell}(S^\ell(X/A))$ ersetzen.

Die äußeren Quadrate der obigen Sequenz kommutieren wegen der Funktorialität der Einhängung, siehe (3.6). Für das mittlere Quadrat betrachten wir die Konstruktion von ∂ in Satz 3.19. Es sei $[u] \in \pi_k(X, A)$ repräsentiert durch

$$u: (I^k / \partial' I^k, \partial I^k / \partial' I^k) \rightarrow (X, A) .$$

Mit Beispiel 3.72 (3) sehen wir schließlich, dass

$$\begin{aligned} \partial S u &= \partial(u \wedge \text{id}_{S^1}) = (u \wedge \text{id}_{S^1})|_{(I^k \times \{0\}) / (\partial I^k \times \{0\})} \\ &= (u|_{(I^{k-1} \times \{0\}) / (\partial I^{k-1} \times \{0\})}) \wedge \text{id}_{S^1} = \partial u \wedge \text{id}_{S^1} = S \partial u . \end{aligned}$$

Also kommutieren S und ∂ , und wir erhalten den Verbindungshomorphismus auch im Kolimes.

Die stabile lange exakte Sequenz im Satz ist natürlich, da die einzelnen Sequenzen natürlich sind. \square

3.81. BEMERKUNG. Motiviert durch den obigen Beweis können wir $\pi_k^s(X, A) = \pi_k^s(X/A)$ definieren. Dann gilt eine lange exakte Sequenz für Paare wie in Satz 3.19. Den Ausschneidungssatz für stabile Homotopiegruppen bekommen wir geschenkt, denn wenn $(A, A \cap B)$ und $(B, A \cap B)$ gute Paare sind, gilt $A/(A \cap B) \cong X/B$, also erst recht $\pi_k^s(A, A \cap B) \cong \pi_k^s(X, B)$. Wir dürfen dabei aber nicht vergessen, dass sowohl Proposition 3.68 über Quotienten als auch der Freudenthalsche Einhängungssatz 3.74 wesentlich auf dem Ausschneidungssatz beruhen.

Es sei $(X_j)_{j \in J}$ eine Familie gut punktierter Räume, und $\iota_j: X_j \rightarrow X = \bigvee_{j \in J} X_j$ seien die Strukturbildungen. Dann erhalten wir Abbildungen $\iota_{j*}: \pi_k^s(X_j) \rightarrow \pi_k^s(X)$ für alle $j \in J$. Aufgrund der universellen Eigenschaft 1.41 des Koproduktes $\bigoplus_{j \in J} \pi_k^s(X_j)$ induzieren diese Abbildungen eine eindeutige Abbildung

$$\bigoplus_{j \in J} \iota_{j*}: \bigoplus_{j \in J} \pi_k^s(X_j) \rightarrow \pi_k^s(X) = \pi_k^s\left(\bigvee_{j \in J} X_j\right) .$$

3.82. PROPOSITION. *Die obige Abbildung $\bigoplus \iota_{j*}$ ist ein natürlicher Isomorphismus.*

BEWEIS. Falls die Indexmenge $J = \{1, \dots, N\}$ endlich ist, zeigen wir die Behauptung durch Induktion über N . Dazu betrachten wir das Paar $(\bigvee_{j=1}^N X_j, \bigvee_{j=1}^{N-1} X_j)$ zusammen mit der Inklusion und der Quotientenabbildung

$$\iota_N: X_N \hookrightarrow \bigvee_{j=1}^N X_j \quad \text{und} \quad q_N: \bigvee_{j=1}^N X_j \twoheadrightarrow \bigvee_{j=1}^N X_j / \bigvee_{j=1}^{N-1} X_j \cong X_N.$$

Da $q_N \circ \iota_N = \text{id}_{X_N}$, spaltet die lange exakte Sequenz

$$\dots \leftarrow \pi_k^s(X_N) \xrightleftharpoons[\iota_{N*}]{q_{N*}} \pi_k^s\left(\bigvee_{j=1}^N X_j\right) \leftarrow \pi_k^s\left(\bigvee_{j=1}^{N-1} X_j\right) \leftarrow \dots$$

aus Satz 3.80. Induktiv erhalten wir

$$\pi_k^s\left(\bigvee_{j=1}^N X_j\right) \cong \pi_k^s\left(\bigvee_{j=1}^{N-1} X_j\right) \oplus \pi_k^s(X_N) \cong \bigoplus_{i=1}^N \pi_k^s(X_i).$$

Im Falle einer unendlichen Indexmenge zeigen wir zuerst Surjektivität. Dazu wählen wir zunächst einen Repräsentanten $[f] \in \pi_{k+n}(S^n X)$, der wiederum dargestellt wird durch

$$f: S^{k+n} \longrightarrow S^n X = \bigvee_{j \in J} S^n X_j.$$

Da X gut punktiert ist, ist auch $S^n X$ nach Bemerkung 3.73 (5) gut punktiert. Wir bestimmen $u: S^n X \rightarrow I$ und $h: S^n X \times I \rightarrow S^n X$ wie in Proposition 3.59 (1). Dann erhalten wir eine offene Umgebung $U = u^{-1}([0, 1))$ vom Basispunkt $* \in S^n X$, so dass h die Menge U in $S^n X$ relativ zu $*$ auf $*$ zusammenzieht. Außerdem sei $U_j = S^n X_j \setminus \{*\} \subset S^n X$, dann ist U_j ebenfalls offen, und die Mengen U und $(U_j)_{j \in J}$ überdecken $S^n X$.

Da f stetig und S^{k+n} kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $J_0 \subset J$, so dass

$$S^{k+n} = f^{-1}(U) \cup \bigcup_{j \in J_0} f^{-1}(U_j).$$

Die Teilmenge $\bigcup_{j \in J_0} f^{-1}(U_j) \subset S^{k+n}$ ist offen, und ihr Rand wird auf den Basispunkt in X abgebildet. Durch Verkleben erhalten wir eine Homotopie

$$(s, t) \mapsto \begin{cases} h(f(s), t) & \text{falls } s \notin \bigcup_{j \in J_0} f^{-1}(U_j), \text{ und} \\ f(s) & \text{falls } s \in \overline{\bigcup_{j \in J_0} f^{-1}(U_j)}. \end{cases}$$

Für $t = 1$ trifft diese Abbildung nur noch diejenigen X_j mit $j \in J_0$. Wir erhalten eine Abbildung $g \sim f$ mit

$$g: S^{k+n} \longrightarrow \bigvee_{j \in J_0} S^n X_j \hookrightarrow \bigvee_{j \in J} S^n X_j.$$

Somit liegt $[f] = [g]$ im Bild von $\pi_k^s(\bigvee_{j \in J_0} X_j) \cong \bigoplus_{j \in J_0} \pi_k^s(X_j)$, also auch im Bild von $\bigoplus_J \pi_k^s(X_j)$.

Um Injektivität zu zeigen, sei $\sum_{i \in I} [f_i]$ ein Element des Kernes, insbesondere $[f_i] \in \pi_k^s(X_i)$, und $[f_i] = 0$ für fast alle i . Wir betrachten einen Repräsentanten $f: S^{k+n} \rightarrow S^n X$, der nur endlich viele der X_i trifft. Dann können wir eine Nullhomotopie h wie oben ebenfalls auf einen endlichen Teil des Koproduktes herunterdrücken, und die Behauptung folgt. \square

3.83. BEMERKUNG. Wir haben jetzt bei einigen bekannten Resultaten die lästigen Zusammenhangsvoraussetzung durch den Übergang zu stabilen Homotopiegruppen eliminiert. Wir haben aber auch einige schöne Eigenschaften verloren: da die Einhängung eines kartesischen Produktes kein Produkt mehr ist, geht die Produktformel aus Beispiel 3.28 verloren, genauso wie die lange exakte

Homotopiesequenz 3.25 für Serre-Faserungen. Anstelle dieser Resultate treten Spektralsequenzen, die für viele Berechnungen zu sperrig sind.

Die Kunst im Umgang mit Homotopiegruppen besteht daher oft darin, möglichst viele Rechnungen im sogenannten „stabilen Bereich“ durchzuführen, also für solche k , für die $\pi_k(X) \cong \pi_k^s(X)$ für den jeweiligen Raum X noch gilt.

3.i. Gerahmter Bordismus

Wir geben jetzt eine differentialtopologische Beschreibung der stabilen Homotopiegruppen. Der Begriff einer k -dimensionalen differenzierbaren Untermannigfaltigkeit M des \mathbb{R}^n sollte bekannt sein. Wir lassen im Folgenden übrigens auch die leere Menge als Untermannigfaltigkeit zu. In jedem Punkt $p \in M$ spaltet sich \mathbb{R}^n auf in den Tangentialraum $T_p M$ an M und den dazu senkrechten Normalenraum $\nu_p M$. Diese Unterräume des \mathbb{R}^n hängen stetig von $p \in M$ ab, insbesondere bildet die Vereinigung aller $\nu_p M$ eine Untermannigfaltigkeit von $M \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$, das *Normalenbündel* νM von M . Dabei identifizieren wir $p \in M$ mit dem Nullvektor an der Stelle p und erhalten einen Einbettung $M \hookrightarrow \nu M$, den *Nullschnitt*.

Unter einer *Trivialisierung* des Normalenbündels von M verstehen wir eine stetige Abbildung $\tau: \nu M \rightarrow M \times \mathbb{R}^{n-k}$, so dass $\tau_p: \nu_p M \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^{n-k}$ für alle $p \in M$ ein linearer Isomorphismus ist. Äquivalent dazu können wir jedem $p \in M$ auf stetige Weise einen Rahmen (v_1, \dots, v_{k-n}) , das heißt, eine Basis von $\nu_p M$, zuordnen, so dass $\tau(v_j) = (p, e_j) \in M \times \mathbb{R}^{n-k}$. Daher nennen wir τ auch *Rahmung* von M .

Sei schließlich τ eine Rahmung von $M \subset \mathbb{R}^n$, und sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall der Länge > 0 . Dann können wir das Normalenbündel $\nu(J \times M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $J \times \nu M \rightarrow J \times M$ identifizieren, da die zusätzliche Richtung im umgebenden Raum tangential zu J ist, also nicht zum Normalenbündel beiträgt. Daher induziert τ eine Rahmung $\tau \circ \pi_{\nu M}: \nu(J \times M) \cong J \times \nu M \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$.

3.84. DEFINITION. Es seien $0 \leq k < n$.

- (1) Eine *gerahmte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit* des \mathbb{R}^n besteht aus
 - (a) einer glatten, kompakten k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ (ohne Rand) für ein $n > k$, und
 - (b) einer Trivialisierung $\tau: \nu M \rightarrow M \times \mathbb{R}^{n-k}$ des Normalenbündels von M in \mathbb{R}^n , der *Rahmung*.
- (2) Ein *gerahmter Bordismus* zwischen zwei k -dimensionalen gerahmten Untermannigfaltigkeiten (M_i, τ_i) ($i = 0, 1$) des \mathbb{R}^n besteht aus
 - (a) einer glatten, kompakten $(k+1)$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit $W \subset I \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit Rand $\partial W \subset \partial I \times \mathbb{R}^n$ mit *Krägen*

$$W \cap ([0, \varepsilon] \times \mathbb{R}^n) = [0, \varepsilon] \times M_0 \quad \text{und} \quad W \cap ((1 - \varepsilon, 1] \times \mathbb{R}^n) = (1 - \varepsilon, 1] \times M_1$$

für ein geeignetes $\varepsilon > 0$, und

- (b) einer Trivialisierung $\bar{\tau}: \nu W \rightarrow W \times \mathbb{R}^{n-k}$ von νW , so dass auf den Krägen

$$\bar{\tau}|_{[0, \varepsilon] \times M_0} = \tau_0 \circ \pi_{\nu M_0}: \nu W|_{W \cap ([0, \varepsilon] \times \mathbb{R}^n)} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$

$$\text{und} \quad \bar{\tau}|_{(1 - \varepsilon, 1] \times M_1} = \tau_1 \circ \pi_{\nu M_1}: \nu W|_{W \cap ((1 - \varepsilon, 1] \times \mathbb{R}^n)} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}.$$

- (3) Zwei gerahmte k -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n heißen *gerahmt bordant*, wenn ein gerahmter Bordismus zwischen ihnen existiert. Es bezeichne $\Omega_k^{\text{fr}, n}$ die Menge aller gerahmten k -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n bis auf gerahmten Bordismus.

In (2) schreiben wir

$$\partial(W, \bar{\tau}) = \partial_0(W, \bar{\tau}) \sqcup \partial_1(W, \bar{\tau}) \quad \text{mit} \quad \partial_i(W, \bar{\tau}) = (M_i, \tau_i).$$

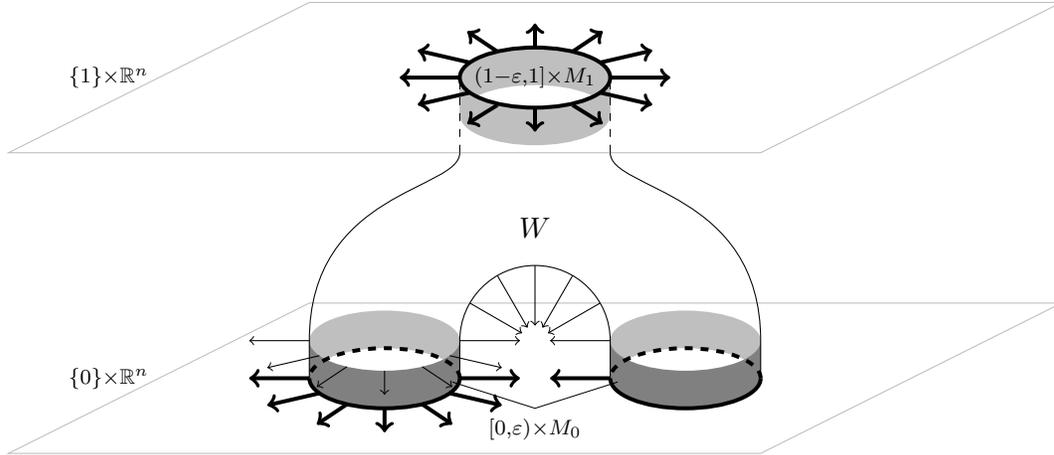


ABBILDUNG 3.8. Ein gerahmter Bordismus

Wenn $\partial_1(W, \bar{\tau}) = \emptyset$ gilt, nennen wir (M_0, τ_0) *gerahmt nullbordant* und $(W, \bar{\tau})$ einen *gerahmten Nullbordismus* von (M_0, τ_0) .

Die einzigen kompakten Untermannigfaltigkeiten, die wir uns gut vorstellen können, sind geschlossene Kurven im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 („Knoten“) sowie orientierbare Flächen im \mathbb{R}^3 . Für alle diese Untermannigfaltigkeiten finden wir Rahmungen (für Knoten sogar abzählbar viele nicht homotope). Es gibt aber auch Untermannigfaltigkeiten höherer Dimension und Kodimension, die keine Rahmungen zulassen.

Als Beispiel für einen Bordismus betrachten wir eine „Hose“ wie in Abbildung 3.8, deren Rand aus zwei Kreisen in $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ und einem Kreis in $\{1\} \times \mathbb{R}^2$ besteht. Wir erhalten eine kompatible Trivialisierung des Normalenbündels zum Beispiel, wenn wir jeweils für alle Kreise die nach außen beziehungsweise die nach innen weisenden Normalenvektoren gewählt haben.

3.85. BEMERKUNG. Wir überprüfen, dass „gerahmt bordant“ eine Äquivalenzrelation definiert.

- (1) Sei (M, τ) gerahmte Mannigfaltigkeit, dann ist $W = I \times M$ ein Bordismus, und τ induziert eine Trivialisierung $\bar{\tau}$ von νW , die τ an beiden Randkomponenten fortsetzt.
- (2) Sei W ein gerahmter Bordismus zwischen (M_0, τ) und (M_1, τ_1) . Spiegeln an der Ebene $\{\frac{1}{2}\} \times \mathbb{R}^n$ liefert einen Bordismus zwischen M_1 und M_0 , und die Trivialisierung $\bar{\tau}$ lässt sich mitspiegeln.
- (3) Sei schließlich $(W', \bar{\tau}')$ gerahmter Bordismus zwischen (M_0, τ_0) und (M_1, τ_1) , und $(W'', \bar{\tau}'')$ sei gerahmter Bordismus zwischen (M_1, τ_1) und (M_2, τ_2) . Wir stauchen beide Bordismen auf $[0, \frac{1}{2}] \times \mathbb{R}^n$ beziehungsweise $[\frac{1}{2}, 1] \times \mathbb{R}^n$, dann bildet die Vereinigung W aufgrund der Produktstruktur auf den Krägen wieder eine glatte Mannigfaltigkeit, und wir wählen $\varepsilon = \min(\frac{\varepsilon'}{2}, \frac{\varepsilon''}{2})$. Die Trivialisierungen $\bar{\tau}'$ und $\bar{\tau}''$ stimmen nach Stauchung auf $(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon)$ mit der von τ_1 induzierten Trivialisierung überein, und lassen sich daher auf ganz W fortsetzen.

Wir haben also gezeigt, dass gerahmter Bordismus eine wohldefinierte Äquivalenzrelation darstellt.

Sei (M, τ) eine gerahmte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , und sei $p \in M$. Wir definieren eine Abbildung $a: \nu M \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$a(p, v) = p + v .$$

An der Stelle $(p, 0) \in M \times \{0\} \subset \nu M$ mit $p \in M$ hat νM den Tangentialraum

$$T_{(p,0)}\nu M = T_p M \oplus \nu_p M \cong \mathbb{R}^n = T_p \mathbb{R}^n ,$$

und wir sehen, dass $da_{(p,0)} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Nach dem Umkehrsatz ist a also ein lokaler Diffeomorphismus nahe des Nullschnitts $M \subset \nu M$. Da M kompakt ist, finden wir ein $r > 0$, so dass $a: \nu^{(r)}M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Einbettung wird, wobei

$$\nu^{(r)}M = \{ v \in \nu_p M \mid |v| < r \} .$$

Wir definieren jetzt eine Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow S^{n-k} \cong D^{n-k}/S^{n-k-1}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tau_p(v)}{r} & \text{falls } x = a(p, v) \text{ f\"ur ein } p \in M \text{ und ein } v \in \nu_p M \text{ mit } |v| < r, \text{ und} \\ * & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Diese Abbildung ist stetig auf $\text{im } a$. Sei jetzt $U \subset S^{n-k}$ offene Umgebung von $*$. Dann ist $a^{-1}(U)$ offene Umgebung von $\mathbb{R}^n \setminus \text{im } a$. Also ist f insgesamt stetig. Das Bild $\text{im } a$ ist in einem Kompaktum K in \mathbb{R}^n enthalten, also wird $\mathbb{R}^n \setminus K$ konstant auf $*$ abgebildet. Also k\u00f6nnen wir f auf die Einpunktkompaktifizierung fortsetzen und erhalten $f: S^n \rightarrow S^{n-k}$.

3.86. SATZ (Pontryagin-Thom-Konstruktion, [Mi, Chapter 7]). *F\u00fcr $0 \leq k < n$ gilt*

$$\pi_n(S^{n-k}) \cong \Omega_k^{\text{fr},n} .$$

BEWEIS. Der vollst\u00e4ndige Beweis ben\u00f6tigt einige S\u00e4tzen aus der Differentialtopologie. Wir geben hier daher nur eine Beweisskizze und verweisen ansonsten auf [Mi].

Als erstes geben wir eine Umkehrabbildung zur obigen Konstruktion an. Dabei benutzen wir, dass es in jeder punktierten Homotopieklasse von Abbildungen $f: S^n \rightarrow S^{n-k}$ einen glatten Repr\u00e4sentanten gibt, f\u00fcr den der „S\u00fcdpol“ $0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{*\} \cong S^{n-k} \setminus \{*\}$ regul\u00e4rer Wert ist, und setzen

$$M = f^{-1}(0) \subset f^{-1}(S^{n-k} \setminus \{*\}) \subset \mathbb{R}^n .$$

Dann ist M eine glatte Untermannigfaltigkeit nach dem Satz \u00fcber implizite Funktionen. Als Trivialisierung des Normalenb\u00fcndels w\u00e4hlen wir einfach $\tau = df|_{\nu M}$.

Offensichtlich h\u00e4ngt (M, τ) von der Wahl des Repr\u00e4sentanten f von $[f] \in \pi_n(S^{n-k})$ ab. Es sei also g ein weiterer glatter punktierter Repr\u00e4sentant, f\u00fcr den 0 ein regul\u00e4rer Wert ist. Dann k\u00f6nnen wir mit dem gleichen Satz wie oben eine Homotopie zwischen f und g durch eine glatte punktierte Homotopie approximieren, f\u00fcr die 0 ein regul\u00e4rer Wert ist. Dabei k\u00f6nnen wir sogar annehmen, dass diese Homotopie nahe der Endpunkte station\u00e4r ist. Dann ist $W = h^{-1}(0) \subset I \times \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit wie in Definition 3.84 (2a) und $\bar{\tau} = dh|_{\nu W}$ eine Trivialisierung von νW , so dass $(W, \bar{\tau})$ einen gerahmten Bordismus zwischen (M_0, τ_0) und (M_1, τ_1) darstellt.

Wir erhalten also eine wohldefinierte Abbildung $\Phi: \pi_n(S^{n-k}) \rightarrow \Omega_k^{\text{fr},n}$. Die Surjektivit\u00e4t haben wir oben bereits gezeigt, indem wir f zu (M, τ) konstruiert haben. Injektivit\u00e4t erhalten wir, indem wir auf dem gleichen Wege zu einem gerahmten Bordismus zwischen $(f_0^{-1}, df_0|_{\nu(f_0^{-1}(0))})$ und $(f_1^{-1}, df_1|_{\nu(f_1^{-1}(0))})$ eine Homotopie $h: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow D^{n-k}/S^{n-k-1}$ zwischen f_0 und f_1 angeben. \square

3.87. BEMERKUNG. F\u00fcr $n \geq 2$ tr\u00e4gt $\pi_n(S^{n-k})$ eine abelsche Gruppenstruktur. Auch $\Omega_k^{\text{fr},n}$ ist eine abelsche Gruppe f\u00fcr $n \geq 2$. F\u00fcr die konstante Abbildung $f \equiv *$ ist $f^{-1}(0) = \emptyset$, also ist das Nullelement die leere Menge.

Seien (M_0, τ_0) und (M_1, τ_1) gegeben. Beide Mannigfaltigkeiten sind kompakt, also beschr\u00e4nkt in \mathbb{R}^n . Wir k\u00f6nnen daher beide Mannigfaltigkeiten innerhalb \mathbb{R}^n in verschiedene Richtungen parallel so verschieben, dass sie disjunkt werden. Dann nehmen wir die disjunkte Vereinigung als Summe. Man \u00fcberpr\u00fcft leicht, dass verschiedene Verschiebungsvektoren gerahmt bordante Summen $(M_0, \tau_0) + (M_1, \tau_1)$ liefern, und dass diese Summe genau der Summe in $\pi_n(S^{n-k})$ entspricht.

Au\u00dferdem erhalten wir das gerahmte Inverse $-(M, \tau)$ von (M, τ) , indem wir M und τ gemeinsam an einer Hyperbene H in \mathbb{R}^n spiegeln. Wenn wir diese Hyperbene disjunkt zu M w\u00e4hlen, stellen wir uns jetzt vor, dass (M, τ) an der „Achse“ $H \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ auf sein Inverses

„rotiert“. Die so erzeugte „Rotationsmannigfaltigkeit“ stauchen wir nach $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$ und erhalten einen Bordismus von $(M, \tau) + (-(M, \tau))$ zur leeren Menge.

3.88. BEISPIEL. Für $k = 0$ betrachten wir endliche Teilmengen $M = (p_1, \dots, p_N)$ des \mathbb{R}^n . Der Einfachheit halber sei $n \geq 2$. Für jeden Punkt p_i fixieren wir eine Basis von \mathbb{R}^n . Ein gerahmter Bordismus zwischen M_0 und M_1 ist eine Sammlung von Kurven zwischen den Punkten aus beiden Mengen. Aufgrund der Rahmung verbindet eine Kurve mit zwei Randpunkten in M_0 immer Punkte mit verschiedenen orientierten Basen, während eine Kurve von M_0 nach M_1 immer Punkte mit gleich orientierten Basen miteinander verbindet. Jetzt überzeugt man sich leicht, dass $\Omega_0^{\text{fr}, n} \cong \mathbb{Z} \cong \pi_n(S^n)$ gilt. Man beachte, dass es uns soeben gelungen ist, $\pi_n(S^n)$ ohne Benutzung des Ausschneidungssatzes und der Homotopiesequenz 3.25 für Faserungen zu bestimmen.

3.89. FOLGERUNG. *Es sei $f: S^n \rightarrow S^n$ punktierte Abbildung. Wenn ein Punkt $p \in \mathbb{R}^n \cong S^n \setminus \{*\}$ existiert, so dass f in einer Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $f^{-1}(p)$ glatt und p regulärer Wert ist, dann berechnet sich der Abbildungsgrad aus Definition 3.45 als*

$$\deg f = \sum_{q \in f^{-1}(p)} \text{sign det } df_q . \quad \square$$

Später können wir mit einer ähnlichen Formel einen Abbildungsgrad für Abbildungen zwischen kompakten orientierten Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension erklären.

In Abschnitt 3.j betrachten wir noch den Fall $k = 1$. Für größere k ist der Aufwand bei der Bestimmung von $\pi_n(S^{n-k})$ mit der Pontryagin-Thom-Konstruktion so hoch, dass man lieber auf andere Methoden zurückgreift.

Wir wollen jetzt zu $\pi_k^s(S^0)$ übergehen. Wir betrachten dazu die Inklusion $\iota: \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Es sei (M, τ) gerahmte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . Dann ist $M' = \iota(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ wieder Untermannigfaltigkeit mit Tangential- und Normalbündel

$$TM' = d\iota(TM) \cong TM \quad \text{und} \quad \nu M' = d\iota(\nu M) \times \{0\} \times \mathbb{R} \cong \nu M \times \mathbb{R} .$$

Wir erweitern also τ zu einer Trivialisierung

$$\tau' = \tau \times \text{id}_{\mathbb{R}}: \nu M' \cong \nu M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1-k} .$$

Mit gerahmten Bordismen verfahren wir analog und erhalten eine Abbildung

$$\iota_{\#}: \Omega_k^{\text{fr}, n} \longrightarrow \Omega_k^{\text{fr}, n+1} .$$

3.90. PROPOSITION. *Für alle $0 \leq k < n$ kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(S^{n-k}) & \xrightarrow{\cong} & \Omega_k^{\text{fr}, n} \\ S \downarrow & & \downarrow \iota_{\#} \\ \pi_{n+1}(S^{n+1-k}) & \xrightarrow{\cong} & \Omega_k^{\text{fr}, n+1} . \end{array}$$

BEWEIS. Der Einfachheit halber betrachten wir $S^{n+1} = S^n \wedge S^1$ und $S^{n+1-k} = S^{n-k} \wedge S^1$ und stabilisieren entsprechend in der letzten Koordinate. Sei $f: S^n \rightarrow S^{n-k}$ wie im Beweis von Satz 3.86 eine glatte punktierte Abbildung, so dass $0 \in \mathbb{R}^n = S^n \setminus \{0\}$ regulärer Wert ist, und es sei $(M, \tau) = (f^{-1}(0), df|_{\nu(f^{-1}(0))})$. Dann ist $Sf = f \wedge \text{id}_{S^1}$ in einer Umgebung von $(Sf)^{-1}(0)$ immer noch glatt und stimmt dort mit $f \times \text{id}_{\mathbb{R}}$ überein. Daher erhalten wir

$$(Sf)^{-1}(0) = f^{-1}(0) \times \{0\} = M' \quad \text{und} \quad d(Sf)|_{\nu M'} = (df \times d\text{id}_{\mathbb{R}})|_{\nu M \times \mathbb{R}} = \tau' . \quad \square$$

3.91. DEFINITION. Für $k \geq 0$ ist die k -te gerahmte Bordismusgruppe definiert durch

$$\Omega_k^{\text{fr}} = \varinjlim \Omega_k^{\text{fr}, n} .$$

3.92. FOLGERUNG (Aus Satz 3.42 (4) und 3.86). *Es gilt*

$$\pi_k^s \cong \Omega_k^{\text{fr}},$$

insbesondere gilt $\Omega_k^{\text{fr}} \cong \Omega_k^{\text{fr},n}$ für alle $n \geq 2k + 2$. □

Wir nennen (M, τ) schlicht *gerahmte k -dimensionale Mannigfaltigkeit*, wenn es uns egal ist, in welchen \mathbb{R}^n wir (M, τ) betrachten wollen — nur muss n eine gewisse Mindestgröße haben, typischerweise jedoch nicht mehr als $2k + 2$. Genauso sprechen wir nur noch von gerahmten Bordismen $(W, \bar{\tau})$ zwischen (M_0, τ_0) und (M_1, τ_1) — dabei müssen wir unter Umständen (M_0, τ_0) und (M_1, τ_1) erst in einen größeren \mathbb{R}^n einbetten. Als nächstes kommen wir zu einer geometrischen Interpretation der stabilen Homotopiegruppen $\pi_k^s(X)$, dabei betrachten wir direkt den Kolimes.

3.93. DEFINITION. Es sei X ein (nicht notwendig punktierter) topologischer Raum.

- (1) Ein *gerahmter singulärer k -Zykel* in X besteht aus
 - (a) einer gerahmten k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit (M, τ) und
 - (b) einer Abbildung $F: M \rightarrow X$.
- (2) Zwei gerahmte singuläre Zykel (M_0, τ_0, F_0) und (M_1, τ_1, F_1) heißen *in X gerahmt bordant* oder auch *gerahmt homolog*, wenn es
 - (a) einen gerahmten Bordismus $(W, \bar{\tau})$ zwischen (M_0, τ_0) und (M_1, τ_1) und
 - (b) eine Abbildung $\bar{F}: W \rightarrow X$ mit $\bar{F}|_{\partial_i M} = F_i$ für $i \in \{0, 1\}$ gibt.
- (3) Die *k -te gerahmte Bordismusgruppe $\Omega_k^{\text{fr}}(X)$* von X sei die Menge aller gerahmten singulären k -Zykel in X bis auf gerahmten Bordismus.

Wir nennen die obigen Zykel „singulär“, weil wir nicht erwarten, dass F eine Einbettung ist — im schlimmsten Fall kann F sogar konstant sein.

3.94. BEMERKUNG. Es sei X ein topologischer Raum.

- (1) Wie in Bemerkung 3.83 ist „gerahmt bordant“ in X eine Äquivalenzrelation.
- (2) Falls $X = \text{pt}$ der einpunktige Raum ist, kommt für F immer nur die konstante Abbildung in Frage, also gilt

$$\Omega_k^{\text{fr}}(\text{pt}) = \Omega_k^{\text{fr}}.$$

- (3) Durch disjunkte Vereinigung der gerahmten Mannigfaltigkeiten (M, τ) wird $\Omega_k^{\text{fr}}(X)$ wie in Bemerkung 3.87 zu einer abelschen Gruppe. Dabei müssen die Bilder der einzelnen gerahmten Untermannigfaltigkeiten in X aber nicht disjunkt sein.
- (4) Es sei $\varphi: X \rightarrow Y$ stetig. Dann induziert φ einen funktoriellen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi_*: \Omega_k^{\text{fr}}(X) \rightarrow \Omega_k^{\text{fr}}(Y)$$

durch $\varphi_*(M, \tau, F) = (M, \tau, \varphi \circ F)$. Sei η eine Homotopie zwischen φ und $\psi: X \rightarrow Y$, dann können wir $\eta \circ (F \times \text{id}_I): M \times I \rightarrow Y$ als gerahmten Bordismus zwischen $\varphi_*(M, \tau, F)$ und $\psi_*(M, \tau, F)$ auffassen. Also ist gerahmter Bordismus ein Funktor

$$\Omega_k^{\text{fr},n}: \mathcal{HTop} \longrightarrow \mathcal{Ab}.$$

Es sei X ein topologischer Raum, dann erinnern wir uns an die Konstruktion

$$X_+ = X \sqcup \text{pt},$$

aus Abschnitt 3.a, wobei der zusätzliche Punkt $* \in \text{pt} = \{*\}$ der Basispunkt sei.

3.95. SATZ (Pontryagin-Thom-Konstruktion). *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus*

$$\pi_k^s(\cdot_+) \cong \Omega_k^{\text{fr}}: \mathcal{HTop} \longrightarrow \mathcal{Ab}.$$

BEWEIS. Es sei $f: S^n \rightarrow S^{n-k} \wedge X_+$ Repräsentant eines Elementes von $\pi_k^s(X_+)$. Als erstes überlegen wir uns, dass

$$S^{n-k} \wedge X_+ = (S^{n-k} \times X \sqcup S^{n-k}) / (\{*\} \times X \sqcup S^{n-k}) \cong (S^{n-k} \times X) / (\{*\} \times X).$$

Wir bezeichnen den Basispunkt von $S^{n-k} \wedge X_+$ wieder mit $\{*\}$ und betrachten

$$V = (S^{n-k} \wedge X_+) \setminus \{*\} \cong \mathbb{R}^{n-k} \times X \quad \text{und} \quad U = f^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^n \cong S^n \setminus \{*\}.$$

Dann sind $V \subset S^{n-k} \wedge X_+$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die zusammengesetzte Abbildung

$$g: U \xrightarrow{f|_U} \mathbb{R}^{n-k} \times X \xrightarrow{\pi_{\mathbb{R}^{n-k}}} \mathbb{R}^{n-k}$$

ist *eigentlich*, das heißt, Urbilder kompakter Mengen sind kompakt. Denn sei $K \subset \mathbb{R}^{n-k}$ kompakt, dann sind $S^{n-k} \setminus K$ und $(S^{n-k} \setminus K) \wedge X_+$ offen und $g^{-1}(\mathbb{R}^{n-k} \setminus K) \cup (S^n \setminus U) = f^{-1}(S^{n-k} \setminus K)$ ist offene Umgebung des unendlichen Punktes $\{*\}$, also ist ihr Komplement $g^{-1}(K)$ in S^n kompakt.

Insbesondere ist $g^{-1}(0) \subset U$ kompakt, und wir können f auf einer kompakten Umgebung von $g^{-1}(0)$ in U homotop so deformieren, dass die erste Komponente g von f in einer kleineren Umgebung von $g^{-1}(0)$ glatt ist und $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ als regulären Wert besitzt. Wie im Beweis von Satz 3.86 erhalten wir eine gerahmte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , nämlich

$$(M, \tau) = (g^{-1}(0), dg|_{\nu(g^{-1}(0))}).$$

Außerdem erhalten wir eine zusammengesetzte Abbildung

$$F: M \hookrightarrow U \xrightarrow{f|_U} \mathbb{R}^{n-k} \times X \xrightarrow{\pi_X} X,$$

und (M, τ, F) ist der gesuchte singuläre gerahmte k -Zykel.

Seien zwei Repräsentanten $f_i: S^{n_i} \rightarrow S^{n_i-k} \wedge X_+$, $i \in \{0, 1\}$ desselben Elementes von $\pi_k^s(X)$ gegeben, dann finden wir zunächst ein $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ und eine Homotopie h zwischen $S^{n-n_0}f_0$ und $S^{n-n_1}f_1$. Wie in Proposition 3.90 ersetzt Stabilisierung die gerahmte Mannigfaltigkeit (M, τ) durch (M', τ') , ändert jedoch nichts an der Abbildung $F: M' \cong M \rightarrow X$. Wir nehmen also an, dass $n = n_0 = n_1$. Außerdem nehmen wir wie im ersten Schritt an, dass für $V = \mathbb{R}^{n-k} \times X$ wie oben und $U = h^{-1}(V)$ die zusammengesetzte Abbildung

$$\ell: U \xrightarrow{h|_U} \mathbb{R}^{n-k} \times X \xrightarrow{\pi_{\mathbb{R}^{n-k}}} \mathbb{R}^{n-k}$$

in einer Umgebung der kompakten Menge $\ell^{-1}(0) \subset U \times X$ glatt ist und 0 als regulären Wert besitzt. Wie im Beweis von Satz 3.86 ist $(W, \bar{\tau}) = (\ell^{-1}(0), d\ell|_{\ell^{-1}(0)})$ ein gerahmter Bordismus zwischen (M_0, τ_0) und (M_1, τ_1) , und wir erhalten eine zusammengesetzte Abbildung

$$H: W \hookrightarrow U \xrightarrow{h|_U} \mathbb{R}^{n-k} \times X \xrightarrow{\pi_X} X$$

mit $H|_{\partial_i W} = F_i$ für $i = 0, 1$. Mithin sind (M_0, τ_0, F_0) und (M_1, τ_1, F_1) gerahmt bordant in X . Also ist $\Phi_X: \pi_k^s(X_+) \rightarrow \Omega_k^{\text{fr}}(X)$ wohldefiniert.

Zur Natürlichkeit sei $\varphi: X \rightarrow Y$ gegeben. Zu zeigen ist die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \pi_k^s(X_+) & \longrightarrow & \Omega_k^{\text{fr}}(X) \\ \varphi_* = \downarrow \pi_k^s(\varphi_+) & & \varphi_* = \downarrow \Omega_k^{\text{fr}}(\varphi) \\ \pi_k^s(Y_+) & \longrightarrow & \Omega_k^{\text{fr}}(Y) \end{array}$$

Wir setzen $V = \mathbb{R}^{n-k} \times X \subset S^{n-k} \wedge X_+$ wie oben und $W = \mathbb{R}^{n-k} \times Y \subset S^{n-k} \wedge Y_+$, dann folgt

$$V = (\text{id}_{\mathbb{R}^{n-k}} \times \varphi)^{-1}(W).$$

Zu $f: S^n \rightarrow S^{n-k} \wedge X_+$ bestimmen wir $U \subset \mathbb{R}^n$, $g: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, (M, τ) und F wie oben. Da $U = f^{-1}(V) = (\varphi \circ f)^{-1}(W)$, liefert $\varphi \circ f: S^n \rightarrow S^{n-k} \wedge Y_+$ die gleiche Abbildung

$$\pi_{\mathbb{R}^{n-k}} \circ (\text{id}_{\mathbb{R}^{n-k}} \times \varphi) \circ f|_U = \pi_{\mathbb{R}^{n-k}} \circ g|_U = g,$$

und daher die gleiche gerahmte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit (M, τ) . Jetzt folgt Natürlichkeit, denn $\varphi \circ f$ liefert den k -Zykel

$$(M, \tau, \pi_Y \circ (\text{id}_{\mathbb{R}^{n-k}} \times \varphi) \circ f|_M) = (M, \tau, \varphi \circ \pi_X \circ f|_M) = \varphi_*(M, \tau, F).$$

Zum Beweis der Surjektivität sei ein singulärer gerahmter k -Zykel (M, τ, F) in X gegeben, dabei sei (M, τ) gerahmte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , und $a: \nu^{(r)}M \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei eine Einbettung. In Analogie zu (3.7) definieren wir $f: S^n \rightarrow S^{n-k} \wedge X$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tau_p(v)}{r} \wedge F(p) & \text{falls } x = a(p, v) \text{ für ein } p \in M \text{ und ein } v \in \nu_p M \text{ mit } |v| < r, \text{ und} \\ * & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man überprüft wieder leicht, dass f stetig ist, und den singulären gerahmten k -Zykel (M, τ, F) induziert. Zur Injektivität verfahren wir analog mit einem singulären gerahmten Bordismus zwischen zwei k -Zykeln. \square

3.96. BEMERKUNG. Die höheren Homotopiegruppen $\pi_k(X)$ finden „runde Löcher“ von X , die dadurch sichtbar werden, dass man Sphären nach X abbildet, die man anschließend nicht mehr zusammenziehen kann. Man findet jedoch keine Löcher, die dadurch zustande kommen, dass man andere kompakte Mannigfaltigkeiten nach X abbildet, die sich dann in X nicht durch einen Nullbordismus ausfüllen lassen. Beispielsweise sollte der Torus T^2 ein solches „torusförmiges Loch“ haben, aber es gilt $\pi_2(T^2) = 0$.

Mit der stabilen Homotopie und der Pontryagin-Thom-Konstruktion können wir nun immerhin Löcher in der Form gerahmter Untermannigfaltigkeiten aufspüren. Aber zum einen tragen die Rahmungen merkwürdige Zusatzinformation, siehe unten. Zum anderen gibt es in höheren Dimensionen Untermannigfaltigkeiten, die keine Rahmungen zulassen (ein Beispiel wäre $\mathbb{C}P^2 \subset \mathbb{R}^8$). Nach Bemerkung 3.94 (2) ist

$$\Omega_k^{\text{fr}}(\text{pt}) = \pi_k^s(S^0)$$

gerade die k -te stabile Homotopiegruppe der Sphären. Für viele $k > 0$ gilt $\pi_k^s(S^0) \neq 0$, obwohl ein Punkt eigentlich keine weitere Information tragen sollte. Aber immerhin sind alle $\pi_k^s(S^0)$ endliche Gruppen für $k > 0$.

Poincarés erste Idee, „Homologie“ zu definieren war daher, „orientierten“ Bordismus Ω_k^{SO} ohne Rahmungen zu betrachten. Aber auch diese Definition hat Probleme, so dass man einen etwas abstrakteren Zugang entwickelt hat. Würden wir Poincarés Ansatz folgen, so erhielten wir für $\Omega_k^{SO}(\text{pt})$ nämlich abzählbar unendliche Gruppen für alle $k \in 4\mathbb{N}$, also noch mehr „Lärm um Nichts.“

3.97. BEMERKUNG. Der Vollständigkeit halber skizzieren wir auch „gerahmten Kobordismus“ mit dem dazugehörigen Pontryagin-Thom Isomorphismus

$$\Omega_{\text{fr}}^k(X) \cong [X_+, S^k]^s = \varinjlim [S^{n-k} \wedge X_+, S^n].$$

Diesmal erhalten wir kontravariante Funktoren, denn eine Abbildung $\varphi: X \rightarrow Y$ induziert durch Zurückziehen eine Abbildung

$$\varphi^*: \Omega_{\text{fr}}^k(Y) \cong [Y_+, S^k]^s \xrightarrow{\circ\varphi} [X_+, S^k]^s \cong \Omega_{\text{fr}}^k(X).$$

Am besten lässt sich die linke Seite beschreiben, wenn X selbst eine kompakte Mannigfaltigkeit ist, denn in diesem Fall wird $\Omega_{\text{fr}}^k(X)$ von $(\dim X - k)$ -dimensionalen kompakten Untermannigfaltigkeiten $N \subset \mathbb{R}^{n-k} \times X$ mit Trivialisierungen τ des Normalenbündels $\nu_{N,X}$ von N in $\mathbb{R}^{n-k} \times X$ erzeugt. Das Paar (N, τ) heißt dann *singulärer gerahmter k -Kozykel*. Die Äquivalenzrelation wird

diesmal über gerahmte Kobordismen, also $(\dim X + 1 - k)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten in $I \times \mathbb{R}^{n-k} \times X$ mit trivialisiertem Normalenbündel definiert.

Aufgrund der Pontryagin-Thom-Isomorphismen erhält man eine bilineare Abbildung

$$\Omega_{\text{fr}}^k(X) \times \Omega_{\text{fr}}^\ell(X) \cong [X_+, S^k]^s \times [S^\ell, X_+] \xrightarrow{\circ} \pi_\ell^s(S^k) = \pi_{\ell-k}^s(S^0).$$

Im Fall $k = \ell$ ist der Wertebereich $\pi_0^s(S^0) \cong \mathbb{Z}$, man spricht von einer *Kronecker-Paarung*. Geometrisch lässt sie sich so beschreiben, dass man (M, τ) und das Bild von (N, τ') unter π_X in „allgemeine Lage“ bringt und Schnittpunkte zählt, wobei die Rahmungen das Vorzeichen festlegen.

Wir haben jetzt die zur stabilen Homotopietheorie assoziierte Homologie- und Kohomologietheorie kennengelernt. Viele Aspekte fehlen noch, zum Beispiel gibt es ein *Cup-Produkt*

$$\smile: \Omega_{\text{fr}}^k(X) \times \Omega_{\text{fr}}^\ell(X) \longrightarrow \Omega_{\text{fr}}^{k+\ell}(X),$$

bei dem man singuläre gerahmte Kozykeln miteinander „schneidet“, dabei addieren sich die Kodimensionen. So wird $\Omega_{\text{fr}}^\bullet(X)$ zu einem \mathbb{Z} -graduierten Ring, dem gerahmten Kobordismusring. Es gibt auch ein *Cap-Produkt*

$$\frown: \Omega_{\text{fr}}^k(X) \times \Omega_{\text{fr}}^\ell(X) \longrightarrow \Omega_{\text{fr}}^{\ell-k}(X),$$

das $\Omega_{\text{fr}}^\bullet(X)$ zu einem \mathbb{Z} -graduierten $\Omega_{\text{fr}}^\bullet(X)$ -Modul macht. Auch hier schneidet man einen Zykel mit einem Kozykel und erhält so einen Zykel kleinerer Dimension.

3.j. Die erste stabile Homotopiegruppe der Sphären

Wir wollen jetzt $\pi_1^s(S^0)$ bestimmen. Da wir dazu gerahmte Kreise betrachten müssen, und sich zwei Rahmungen von $S^1 \subset \mathbb{R}^n$ um eine Abbildung $S^1 \mapsto SO(n-1)$ unterscheiden, beweisen wir zur Vorbereitung das folgende Resultat.

3.98. SATZ. *Es sei $n \geq 3$. Dann gilt $\pi_1(SO(n), E_n) \cong \mathbb{Z}/2$, und das nicht triviale Element wird dargestellt durch die Schleife*

$$\gamma: I \ni t \mapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t & & 0 \\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \in SO(n).$$

Selbstverständlich können wir auch jede andere Ebene im \mathbb{R}^n „einmal herumdrehen“, um den Erzeuger von $\pi_1(SO(n))$ zu erhalten. Die Bedingung $n \geq 3$ ist nötig, denn es gilt $SO(1) \cong \text{pt}$ und $SO(2) \cong S^1$.

BEWEIS. Wir betrachten zunächst den Fall $n = 3$. Es sei \mathbb{H} die Algebra der Quaternionen, dann bildet die Menge $S^3 \subset \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ der Einheitsquaternionen eine Gruppe bezüglich der Quaternionen-Multiplikation. Diese Gruppe wirkt auf dem Raum $\mathbb{I} \cong \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$ der imaginären Quaternionen durch

$$S^3 \times \mathbb{I} \ni (q, p) \mapsto qp\bar{q} = qpq^{-1}.$$

Diese Operation erhält das Euklidische Skalarprodukt und die Orientierung, liefert also einen Homomorphismus $S^3 \rightarrow SO(3)$. Dabei wirken $\pm 1 \in S^3$ als $\text{id}_{\mathbb{I}}$. Da es zu jedem Quaternion $q \in S^3 \setminus \{\pm 1\} \subset \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$ ein $p \in \mathbb{I}$ gibt, mit dem q nicht kommutiert, wirken alle anderen Elemente der S^3 nicht-trivial. Schließlich kann man — zum Beispiel anhand der gleich folgenden geometrischen Darstellung — überprüfen, dass die obige Abbildung surjektiv ist. Es folgt

$$SO(3) \cong S^3/\{\pm 1\} \cong \mathbb{R}P^3.$$

Wir geben eine geometrische Beschreibung der obigen Gruppenwirkung ohne Quaternionen. Dazu seien e_0, \dots, e_3 die Standardbasis des \mathbb{R}^4 , und \mathbb{R}^3 sei das Erzeugnis von e_1, e_2, e_3 . Wir wissen bereits, dass $\pm 1 = \pm e_0$ als $\text{id}_{\mathbb{R}^3}$ wirkt. Jedes andere $q \in S^3 \setminus \{\pm e_0\}$ schreiben wir als in eindeutiger Weise als

$$q = e_0 \cos \varphi + u \sin \varphi \quad \text{mit } u \in S^2 \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{mit } \varphi \in (0, \pi).$$

Dann wirkt q als Drehung mit Winkel 2φ um die Achse $u\mathbb{R}$. Genauer ergänzen wir u zu einer orientierten Orthonormalbasis (u, v, w) des \mathbb{R}^3 , dann folgt

$$q(u) = u, \quad q(v) = v \cos 2\varphi - w \sin 2\varphi, \quad q(w) = v \sin 2\varphi + w \cos 2\varphi.$$

Wir erhalten die gleiche Abbildung, indem wir u durch $-u$ und φ durch $\pi - \varphi$ ersetzen. Der Winkel 2φ lässt sich auch dadurch erklären, dass wir in der obigen Darstellung für $\varphi = \pi$ den Punkt $q = -e_0 \in S^3$ erhalten, der als Identität wirkt.

Wir wissen jetzt also, dass $S^3 \rightarrow SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$ die universelle Überlagerung ist. Aus Abschnitt 2.f wissen wir, dass dem nichttrivialen Element $1 \in \mathbb{Z}/2 \cong \pi_1(\mathbb{R}P^3)$ das Bild eines Weges $\tilde{\gamma}$ von e_0 nach $-e_0$ entspricht. Wir wählen $\tilde{\gamma}(t) = e_0 \cos \pi t + e_3 \sin \pi t$ und erhalten die im Satz genannte Schleife γ .

Damit ist der Fall $n = 3$ erledigt. Wir beweisen die Behauptung für größere n durch Induktion. Dazu betrachten wir die Abbildung $p: SO(n+1) \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $p(g) = g e_{n+1}$. Diese Abbildung ist ein Faserbündel mit Faser

$$p^{-1}(e_{n+1}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(n+1) \mid A \in SO(n) \right\} \cong SO(n),$$

siehe Übung 3.120. Aus der langen exakten Sequenz 3.25 schließen wir mit $n \geq 3$, dass

$$\underbrace{\pi_1(S^n)}_{=0} \longleftarrow \pi_1(SO(n+1)) \xleftarrow{\cong} \pi_1(SO(n)) \longleftarrow \underbrace{\pi_2(S^n)}_{=0}.$$

Dabei geht die erzeugende Schleife γ in $SO(n)$ in die entsprechende Schleife in $SO(n+1)$ über. \square

3.99. SATZ (Pontryagin). *Es gilt $\pi_1^s(S^0) \cong \mathbb{Z}/2$.*

BEWEIS. Nach Satz 3.42 (4) und Satz 3.86 gilt $\pi_1^s(S^0) \cong \pi_n(S^{n-1}) \cong \Omega_1^{\text{fr},n}$ für alle $n \geq 4$. Wir betrachten zunächst kompakte gerahmte 1-Mannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^n . Jede kompakte 1-Mannigfaltigkeit ist eine disjunkte Vereinigung von Kreisen. Wir parametrisieren jede Zusammenhangskomponente M_i so durch eine Kurve γ , dass $\dot{\gamma}$ zusammen mit der Rahmung von νM_i eine positive Basis des umgebenden \mathbb{R}^n liefert. Da $n \geq 4$ ist, können wir diese Kreise gegebenenfalls „entknoten“, das heißt zu disjunkten Einheitskreisen in der Ebene $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkten auf der x -Achse deformieren, die im positiven Drehsinn durchlaufen werden — aus jeder solchen Deformation macht man leicht einen Bordismus, auf den sich auch die Rahmungen übertragen lassen.

Für einen einzelnen Kreis $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^n$ konstruieren wir eine Standardrahmung τ^0 , indem wir als v_1^0 den Ortsvektor in \mathbb{R}^2 wählen, und mit den Standardbasisvektoren $v_2^0 = e_3, \dots, v_{n-1}^0 = e_n$ zu einer Basis des Normalenbündels. Jede andere Rahmung unterscheidet sich um ein Element aus $\pi_1(SO(n-1)) \cong \mathbb{Z}/2$. Wenn wir mehrere gerahmte Kreise haben, addieren wir die zugehörigen Elemente von $\mathbb{Z}/2$. Wir behaupten, dass dieses Summe eine gerahmte Bordismusinvariante ist.

Sei $W \subset I \times \mathbb{R}^n$ ein Bordismus. Zunächst erreichen wir durch eine kleine Deformation, dass die Koordinate $t \in I$ eine sogenannte *Morse-Funktion* auf W wird, das heißt, die Abbildung $W \ni (t, x) \mapsto t \in I$ hat nur endlich viele kritische Punkte $(t_1, p_1), \dots, (t_k, p_k)$, und nahe dieser Punkte $p_j = (x_{j,1}, \dots, x_{j,n})$ sieht W aus wie der Graph einer Funktion

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto t_k \pm (x_1 - x_{j,1})^2 \pm \dots \pm (x_n - x_{j,n})^2.$$

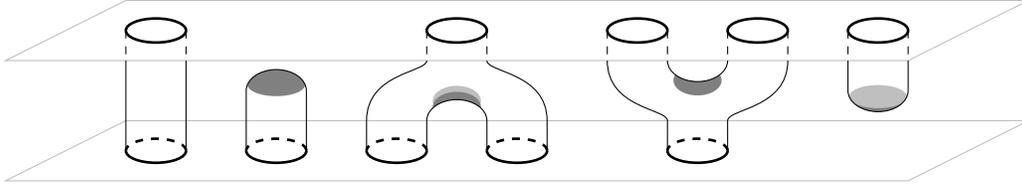


ABBILDUNG 3.9. Elementare Bordismen

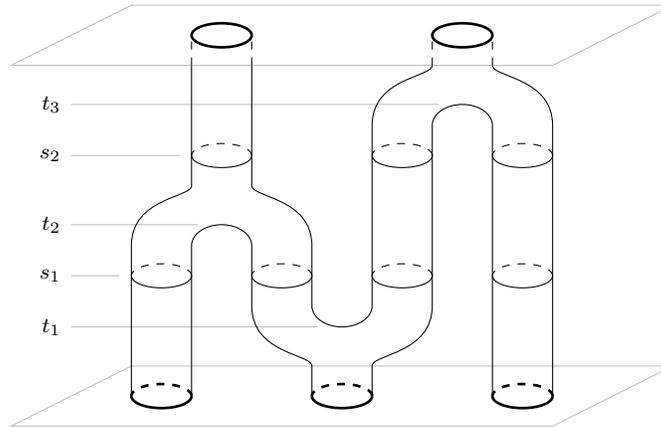


ABBILDUNG 3.10. Zusammengesetzter Bordismus

Wir dürfen dabei annehmen, dass $t_1 < \dots < t_k$ paarweise verschieden sind. Die Rahmungen deformieren wir wieder mit. Dann können wir den Bordismus durch Aufschneiden längs $\{s_i\} \times \mathbb{R}^n$ mit $t_1 < s_1 < t_2 < \dots < s_{k-1} < t_k$ in „elementare Bordismen“ wie in Abbildung 3.9 zerlegen. Diese können wir so anordnen, dass ganz W in $I \times \mathbb{R}^2 \subset I \times \mathbb{R}^n$ zu liegen kommt; dabei ordnen wir die Kreise in $\partial_0 W$ und $\partial_1 W$ gegebenenfalls um, siehe Abbildung 3.10.

Auf W konstruieren wir eine Standardrahmung τ^0 , indem wir auf den elementaren Bordismen in $I \times \mathbb{R}^2$ jeweils den nach außen weisenden Normalenvektor als v_1^0 wählen und dann mit den Standardbasisvektoren $v_2^0 = e_3, \dots, v_{n-1}^0 = e_n$ zu einer Basis des Normalenbündels ergänzen. Die Rahmungen τ und τ^0 unterscheiden sich um eine Abbildung $g: W \rightarrow SO(n-1)$. Für jedes $s \in I \setminus \{t_1, \dots, t_k\}$ liefert die Einschränkung auf $W \cap (\{s\} \times \mathbb{R}^n) \cong S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1$ nach Folgerung 3.8 ein Tupel von Elementen von $\pi_1(SO(n-1)) \cong \mathbb{Z}/2$. Es sei $a_s \in \mathbb{Z}/2$ die Summe dieser Elemente. Die obige Behauptung ist bewiesen, wenn wir zeigen, dass a_s nicht von s abhängt. Für alle $s \in (t_i, t_{i+1})$ mit $1 \leq i < k$ ist das klar, da die Abbildungen $g|_{W \cap (\{s\} \times \mathbb{R}^n)}$ homotop sind. Außerdem ist klar, dass sich der Beitrag eines zylindrischen elementaren Bordismus in einer Umgebung von t_i nicht ändert.

Da $SO(n-1)$ zusammenhängend ist, können wir die gegebene Rahmung τ im Innern der nicht zylindrischen elementaren Bordismen so deformieren, dass sie auf den in Abbildung 3.9 grau markierten, zusammenziehbaren Regionen jedes elementaren Bordismus mit τ^0 übereinstimmt. Dabei ändern sich die Elemente $a_s \in \mathbb{Z}/2$ nicht. Wenn der elementare Bordismus eine „Kappe“ ist (zweiter oder letzter elementarer Bordismus in der Abbildung), dann ist der Beitrag zu a_s auf beiden Seiten von t_i trivial. Wenn der elementare Bordismus eine „Hose“ ist (dritter oder vierter elementarer Bordismus in der Abbildung), dann ist der Beitrag zu a_s auf der Seite von t_i mit einer Randkomponente die Summe der Beiträge auf der Seite mit zwei Randkomponenten. Insgesamt ändert sich also a_s beim Überqueren eines kritischen Wertes t_i nicht.

Also ist unsere Behauptung bewiesen, und wir haben eine Abbildung

$$a: \pi_1^s(S^0) \cong \Omega_1^{\text{fr}} \longrightarrow \pi_1(SO(n-1)) \cong \mathbb{Z}/2$$

konstruiert. Nach unser Vorüberlegung ist diese Abbildung surjektiv, da wir im Urbild jedes Elements einen gerahmten Kreis finden. Nach Konstruktion wird die leere gerahmte Mannigfaltigkeit auf 0 abgebildet. Wenn a bijektiv ist, ist a ein Isomorphismus, denn bis auf Isomorphie gibt es nur eine Gruppe mit zwei Elementen.

Zur Injektivität sei eine gerahmte Bordismusklass in \mathbb{R}^n gegeben, ohne Einschränkung repräsentiert durch eine disjunkte Vereinigung (M, τ) von gerahmten Einheitskreisen wie oben. Wir behaupten, dass (M, τ) zu einem einzigen gerahmten Kreis kobordant ist, und erhalten Injektivität, da es auf einem Kreis nur zwei Klassen von Rahmungen gibt. Falls M aus einem Kreis besteht, ist nichts zu tun. Falls $M = \emptyset$, betrachten wir den letzten elementaren Bordismus in Abbildung 3.9. Andernfalls benutzen wir die Hose in der Mitte der Abbildung, um die Anzahl der Kreise Schritt für Schritt bis auf einen zu reduzieren. Dabei überlegen wir uns, dass wir die gegebenen Rahmungen der „Hosenbeine“ bis zum „Gürtel“ fortsetzen können. \square

In der gleichen Arbeit, in der Pontryagin diesen Satz bewiesen hat, hat er auch $\pi_2^s(S^0) \cong \mathbb{Z}/2$ bestimmt. Die Berechnung der höheren stabilen Homotopiegruppen der S^0 mit Hilfe der Pontryagin-Thom-Konstruktion erweist sich als sehr aufwändig, so dass man sich stattdessen anderer Hilfsmittel bedient. Ohne Beweis geben wir das folgende wichtige Resultat an.

3.100. SATZ (Serre). *Mit Ausnahme von $\pi_n(S^n)$ und $\pi_{4k-1}(S^{2k})$ sind alle Homotopiegruppen von Sphären endlich. Insbesondere ist $\pi_k^s(S^0)$ endlich für alle $k > 0$.*

3.101. BEMERKUNG. Die Umkehrung der obigen Abbildung a ist der sogenannte stabile J -Homomorphismus

$$J_k: \pi_k(SO) = \varinjlim \pi_k(SO(n)) \rightarrow \pi_k^s(S^0),$$

den wir jetzt betrachten wollen. Der Kolimes bezieht sich auf die gleiche Folge von Einbettungen $\iota_n: SO(n) \hookrightarrow SO(n+1)$ wie im Beweis von Satz 3.98. Also ist SO die Gruppe der „orientierungserhaltenden orthogonalen Matrizen“ mit Indizes in \mathbb{N} , die bis auf endlich viele Einträge mit der „Einheitsmatrix“ $(\delta_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ übereinstimmen.

Die exakte Homotopiesequenz des Faserbündels $SO(n+1) \rightarrow S^n$ mit Faser $SO(n)$ aus dem Beweis des Satzes 3.98 liefert

$$\underbrace{\pi_k(S^n)}_{=0} \longleftarrow \pi_k(SO(n+1)) \xleftarrow{\cong} \pi_k(SO(n)) \xleftarrow{\partial} \underbrace{\pi_{k+1}(S^n)}_{=0}$$

für $n > k+1$, und π_k ist hier verträglich mit dem Kolimes, so dass

$$\pi_k(SO) = \varinjlim \pi_k(SO(n)) \cong \pi_k(SO(k+2)).$$

Die Gruppe $SO(n)$ wirkt durch Drehungen auf $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Es sei $a \in \pi_k(SO(n))$, dann erhalten wir eine Abbildung

$$S^k \times S^{n-1} \xrightarrow{a \times \text{id}_{S^{n-1}}} SO(n) \times S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}.$$

Wir konstruieren daraus eine Abbildung von $S^{k+n} \subset \mathbb{R}^{k+1} \oplus \mathbb{R}^n$ nach $S^n \subset \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \|q\|^2 - \|p\|^2 \\ 2\|p\|^2 a\left(\frac{p}{\|p\|^2}\right) \cdot q \end{pmatrix}$$

falls $p \neq 0$.

Es bezeichne $J_k^n([a]) \in \pi_{k+n}(S^n)$ die zugehörige Homotopieklasse. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_k(SO(n)) & \xrightarrow{J_k^n} & \pi_{k+n}(S^n) \\ \downarrow & & \downarrow S \\ \pi_k(SO(n+1)) & \xrightarrow{J_k^{n+1}} & \pi_{k+n+1}(S^{n+1}). \end{array}$$

Also erhalten wir den stabilen J -Homomorphismus als Kolimes

$$J_k = \varinjlim J_k^n : \varinjlim \pi_k(SO(n)) \longrightarrow \varinjlim \pi_{k+n}(S^n) = \pi_k^s(S^0),$$

und wegen Satz 3.42 (4) und der obigen Überlegung und gilt sogar $J_k = J_k^{k+2}$.

Für $k > 0$ liefert Bott-Periodizität Isomorphismen $\pi_{k+8n}(SO) \cong \pi_k(SO)$. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über J_k für kleine k .

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\pi_k(SO)$	0	$\mathbb{Z}/2$	0	\mathbb{Z}	0	0	0	\mathbb{Z}	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	0	\mathbb{Z}
$\text{im } J_k$	0	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}/24$	0	0	0	$\mathbb{Z}/240$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}/504$
$\pi_k^s(S^0)$	\mathbb{Z}	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/24$	0	0	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/240$	$(\mathbb{Z}/2)^2$	$(\mathbb{Z}/2)^3$	$\mathbb{Z}/6$	$\mathbb{Z}/504$

Die Gruppe im J_{4n-1} hängt zusammen mit den Bernoulli-Zahlen: der Nenner von $B_{2n}/4n$ ist gerade $\#$ im J_{4n-1} .

3.k. Übungen zu Kapitel 3

Übungen zu Abschnitt 3.a.

3.102. ÜBUNG. Seien X, Y topologische Räume und $X = A \cup B$, wobei A, B abgeschlossen sind. Zeigen Sie: $f: X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn $f|_A$ und $f|_B$ stetig sind.

3.103. ÜBUNG. Konstruieren Sie Homöomorphismen

- (1) $f: I^k/\partial I^k \rightarrow S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$,
- (2) $g: (I^k/\partial I^k, \partial I^k/\partial I^k) \rightarrow (D^k, S^{k-1})$.

3.104. ÜBUNG. Es seien (X_i, x_i) für $i \in J$ punktierte Räume. Zeigen Sie:

- (1) der punktierte Raum

$$(X, x_0) = \left(\prod_{i \in J} X_i, (x_i)_{i \in J} \right)$$

mit den Projektionen $p_i: (X, x_0) \rightarrow (X_i, x_i)$ erfüllt die universelle Eigenschaft eines Produktes (aus Satz 1.46 (3)) in der Kategorie Top_+ ;

- (2) es gilt $\pi_k(X, x_0) \cong \prod_{i \in J} \pi_k(X_i, x_i)$, wobei die Abbildung $p_{i*} = \pi_k p_i$ der Projektion auf den Faktor $\pi_k(X_i, x_i)$ entspricht.
- (3) Sei $j \in J$, und sei $\iota_j: X_j \rightarrow X$ die Inklusion, die $y \in X_j$ auf $(y_i)_{i \in J}$ mit $y_j = y$ und $y_i = x_i$ für $i \neq j$ abbildet. Beschreiben Sie die Abbildung $\iota_{j*}: \pi_k(X_j, x_j) \rightarrow \pi_k(X, x_0)$.

3.105. ÜBUNG. Beweisen Sie Bemerkung 3.10. Überlegen Sie sich außerdem, dass $\Omega^k(X)$ natürlich zum Raum

$$\{ f: S^k \rightarrow X \mid f(*) = x_0 \}$$

homöomorph ist, wobei „*“ den Basispunkt der S^k bezeichne.

Übungen zu Abschnitt 3.b.

3.106. ÜBUNG. Beweisen Sie Bemerkung 3.16.

3.107. ÜBUNG. Zeigen Sie für exakte Sequenzen von Gruppen:

- (1) Die Sequenz $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ ist genau dann bei A und B exakt, wenn f einen Isomorphismus $A \cong \ker g$ induziert.
- (2) Die Sequenz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ ist genau dann bei B und C exakt, wenn g einen Isomorphismus $\operatorname{coker} f \cong C$ induziert.

Was folgt für A und f in den exakten Sequenzen $0 \rightarrow A \rightarrow 0$ beziehungsweise $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$?

3.108. ÜBUNG. Beweisen Sie die Exaktheit der Sequenz aus Satz 3.19 an den fehlenden Stellen.

3.109. ÜBUNG. Beweisen Sie Lemma 3.20. Achten Sie darauf, nur B , C und C' als Gruppen und nur die Abbildungen dazwischen als Gruppenhomomorphismen vorauszusetzen; betrachten Sie alles andere in der Kategorie \mathcal{Set}_+ .

3.110. ÜBUNG. Es seien $Z \subset Y \subset X$ Räume mit Basispunkt in Z . Wir betrachten

$$\partial: \pi_k(X, Y) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(Y) \rightarrow \pi_{k-1}(Y, Z)$$

als Verbindungshomomorphismus in der Sequenz

$$\cdots \leftarrow \pi_{k-1}(Y, Z) \xleftarrow{\partial} \pi_k(X, Y) \leftarrow \pi_k(X, Z) \leftarrow \pi_k(Y, Z) \xleftarrow{\partial} \pi_{k+1}(X, Y) \leftarrow \cdots,$$

wobei die unmarkierten Pfeile von Inklusion induziert werden.

- (1) Zeichnen Sie die obige Sequenz zusammen mit den exakten Sequenzen der Paare (X, Y) , (X, Z) und (Y, Z) so in ein kommutatives Diagramm, dass keine Homotopiegruppe zweimal erscheint.
- (2) Beweisen Sie Exaktheit der Sequenz, indem Sie nach Möglichkeit vom Diagramm aus (1) Gebrauch machen.

Übungen zu Abschnitt 3.c.

3.111. ÜBUNG. Konstruieren Sie den Homöomorphismus aus Bemerkung 3.23.

3.112. ÜBUNG. Im Folgenden bedeute Faserung entweder Serre- oder Hurewicz-Faserung. Zeigen Sie:

- (1) Sei $p: E \rightarrow B$ eine Faserung, und sei $f: X \rightarrow B$ stetig. Seien die Abbildungen $f^*p: f^*E \rightarrow X$ und $\bar{f}: f^*E \rightarrow E$ durch

$$f^*E = \{ (e, x) \in E \times X \mid p(e) = f(x) \in B \}, \quad (f^*p)(e, x) = x, \quad \bar{f}(e, x) = e$$

gegeben, dann ist f^*p wieder eine Faserung.

- (2) Die konstante Abbildung $F \rightarrow \text{pt}$ ist eine Faserung für alle F . Die Projektion $B \times F \rightarrow B$ ist eine Faserung für alle F und alle B .
- (3) Seien $p: E \rightarrow B$ und $q: Y \rightarrow E$ Faserungen. Dann ist auch $p \circ q: Y \rightarrow B$ eine Faserung.

3.113. ÜBUNG. Eine *Retraktion* von einer Abbildung $p: E \rightarrow B$ zu einer Abbildung $q: D \rightarrow A$ ist ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccccc} D & \xrightarrow{I} & E & \xrightarrow{R} & D \\ q \downarrow & & p \downarrow & & q \downarrow \\ A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{r} & A, \end{array}$$

so dass $r \circ i = \text{id}_A$ und $R \circ I = \text{id}_F$. Man sagt auch, $q: D \rightarrow A$ ist ein *Retrakt* von $p: E \rightarrow B$.

Zeigen Sie: wenn p die Homotopieliftungseigenschaft für einen Raum X besitzt, dann gilt das auch für q . Insbesondere sind Retrakte von Serre- beziehungsweise Hurewicz-Faserungen wieder von diesem Typ.

Übungen zu Abschnitt 3.d.

3.114. ÜBUNG. Es seien X, Y topologische Räume. Definiere den *Verbund* von X und Y als Quotienten

$$X * Y = (X \times Y \times I) / \sim,$$

wobei „ \sim “ erzeugt wird durch

$$(x, y, 0) \sim (x, y', 0) \quad \text{und} \quad (x, y, 1) \sim (x', y, 1) \quad \text{für alle } x, x' \in X \text{ und alle } y, y' \in Y.$$

Geben Sie Homöomorphismen $S^k * \text{pt} \cong D^{k+1}$ und $S^k * S^\ell \cong S^{k+\ell+1}$ für alle k, ℓ an.

3.115. ÜBUNG. Es seien $(X, x_0), (Y, y_0)$ punktierte Räume, und es sei $X * Y$ wie oben definiert. Wir identifizieren X, Y mit Unterräumen von $X * Y$ durch $x \mapsto [(x, y_0, 0)]$, $y \mapsto [(x_0, y, 1)]$ für alle $x \in X, y \in Y$, wählen als Basispunkt $[(x_0, y_0, \frac{1}{2})]$ und setzen $U = X * Y \setminus Y$ und $V = X * Y \setminus X$.

- (1) Zeigen Sie, dass $U, V, U \cap V$ jeweils zu X, Y und $X \times Y$ homotopieäquivalent sind.
- (2) Bestimmen Sie die von den Inklusionen induzierten Abbildungen

$$\pi_k(U \cap V) \rightarrow \pi_k(U), \quad \pi_k(V) \rightarrow \pi_k(X * Y)$$

und die Gruppen $\pi_k(U, U \cap V)$.

- (3) Die Räume X und Y seien p - beziehungsweise q -zusammenhängend. Wie hoch zusammenhängend ist dann $X * Y$?

Hinweis: Betrachten Sie die natürliche Abbildung zwischen den langen exakten Sequenz der Paare $(U, U \cap V) \rightarrow (X * Y, V)$ und benutzen Sie den Ausschneidungssatz.

Übungen zu Abschnitt 3.e.

3.116. ÜBUNG. Zeigen Sie: die Hintereinanderausführung von punktierten Abbildungen von S^n nach S^n macht die Gruppe $\pi_n(S^n)$ zu einem Ring isomorph zu \mathbb{Z} .

3.117. ÜBUNG. Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle $n \geq 1$.

- (1) Betrachte $D^n \subset \mathbb{R}^n$. Es sei $f: D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $S^{n-1} \subset f^{-1}(S^{n-1})$ und $\text{deg } f|_{\partial D^n} \neq 0$ gegeben, dann gilt $D^n \subset \text{im}(f)$.
- (2) Es seien $f_1, \dots, f_n: I^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so dass $f_i(x) < 0$ falls $x_i = 0$ und $f_i(x) > 0$ falls $x_i = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$ und alle $x \in I^n$. Dann existiert ein $x_0 \in I^n$ mit $f_1(x_0) = \dots = f_n(x_0) = 0$.

3.118. ÜBUNG. Beweisen Sie Bemerkung 3.53.

3.119. ÜBUNG. Zeigen Sie: Die Abbildung $U(n) \rightarrow S^{2n-1}$ mit $g \mapsto ge_n \in S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ ist ein Faserbündel mit Faser $U(n-1)$.

Folgern Sie, dass $\pi_k(U(n)) \cong \pi_k(U(n-1))$ für $k < 2n-2$.

3.120. ÜBUNG. Zeigen Sie: Die Abbildung $O(n) \rightarrow S^{n-1}$ mit $g \mapsto ge_n \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Faserbündel mit Faser $O(n-1)$.

Folgern Sie, dass $\pi_k(O(n)) \cong \pi_k(O(n-1))$ und $\pi_k(SO(n)) \cong \pi_k(SO(n-1))$ für $k < n-2$.

Übungen zu Abschnitt 3.f.

3.121. ÜBUNG. Für topologische Räume $X, B, A \subset X$, und $f: A \rightarrow B$ stetig betrachten wir den *Pushout*

$$X \cup_f B = (X \sqcup B) / \sim,$$

wobei „ \sim “ erzeugt wird von $X \ni a \sim f(a) \in B$ für alle $a \in A$. Er erfüllt die universelle Eigenschaft aus Folgerung 1.75.

Es bezeichne \mathcal{Top}^A die Kategorie der „Räume unter A “ mit Objekten (C, g) mit $g: A \rightarrow C$ und Morphismen

$$\text{Hom}_{\mathcal{Top}^A}((B, f), (C, g)) = \{ h: B \rightarrow C \mid h \text{ stetig mit } h \circ f = g \}.$$

Es sei (X, A) fest. Zeigen Sie, dass $(B, f) \mapsto (X \cup_f B, B)$ einen Funktor von der Kategorie \mathcal{Top}^A in die Kategorie \mathcal{Pair} definiert.

3.122. ÜBUNG. Handelt es sich bei den Paaren

$$(X, A) = (\{a, b\}, \{a\}), \tag{1}$$

$$(Y, B) = (\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}, \{0\}) \tag{2}$$

um Kofaserungen, wobei X die Klumpentopologie und $Y \subset \mathbb{R}$ die Unterraumtopologie trage?

3.123. ÜBUNG. Beweisen Sie Folgerung 2.50 mit dem neuen Begriff „gut punktiert“.

3.124. ÜBUNG. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- (1) Wenn (B, A) und (X, B) Kofaserungen sind, dann ist auch (X, A) Kofaserung.
- (2) Es sei (X, A) Kofaserung und Y beliebig, dann ist auch $(X \times Y, A \times Y)$ Kofaserung.
- (3) Ein Paar (X, A) sei *Retrakt* von (Y, B) , das heißt, es gebe Abbildungen $i: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ und $r: (Y, B) \rightarrow (X, A)$ mit $r \circ i = \text{id}_X$. Wenn (Y, B) eine Kofaserung ist, dann ist auch (X, A) eine Kofaserung.

3.125. ÜBUNG. Zeigen Sie: jede Kofaserung $i: A \rightarrow X$ ist eine Einbettung, siehe Definition 1.44. Zeigen Sie dazu, dass

$$\iota_1: A \cong A \times \{1\} \hookrightarrow Zi \quad \text{und} \quad \bar{\iota}_1: X \cong X \times \{1\} \hookrightarrow X \times I.$$

Einbettungen sind, und betrachten Sie das folgende Diagramm zu Bemerkung 3.58.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota_1} & Zi \\ i \downarrow & & \bar{i} \downarrow \bar{r} \\ X & \xrightarrow{\bar{\iota}_1} & X \times I \end{array}$$

3.126. ÜBUNG. Zeigen Sie: wenn X ein Hausdorff-Raum und (X, A) eine Kofaserung ist, dann ist $A \subset X$ abgeschlossen. Betrachten Sie dazu die stetigen Abbildungen

$$f: X \cong X \times \{1\} \hookrightarrow X \times I \quad \text{und} \quad g: X \cong X \times \{1\} \xrightarrow{r} Zi \hookrightarrow X \times I,$$

und zeigen Sie zunächst

$$A = \{ x \in X \mid f(x) = (x, 1) = r(x, 1) = g(x) \in X \times I \}.$$

3.127. ÜBUNG. Es sei (X, A) eine abgeschlossene Kofaserung und $f: A \rightarrow B$ stetig.

- (1) Konstruieren Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaften eine natürliche, stetige, bijektive Abbildung

$$(X \times I) \cup_{f \times \text{id}_I} (B \times I) \longrightarrow (X \cup_f B) \times I.$$

- (2) Zeigen Sie die Stetigkeit der Umkehrabbildung. *Hinweis:* Sie können dazu das Exponentialgesetz 1.60 benutzen.
 (3) Zeigen Sie, dass $(X \cup_f B, B)$ wieder eine abgeschlossene Kofaserung ist.

3.128. ÜBUNG. Es sei $i: A \rightarrow X$ eine Kofaserung und eine Homotopieäquivalenz. Zeigen Sie:

- (1) Im Sinne von Definition 2.10 ist A ein starker Deformationsretrakt von X .
 (2) Es sei $p: E \rightarrow B$ eine Hurewicz-Faserung, und es seien $f: A \rightarrow E$ und $g: X \rightarrow B$ Abbildungen mit $p \circ f = g \circ i$:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

Dann gibt es eine Abbildung $h: X \rightarrow E$ mit $f = h \circ i$ und $g = p \circ h$.

3.129. ÜBUNG. Formulieren und beweisen Sie die Eckmann-Hilton-dualen Aussagen zur vorigen Aufgabe.

3.130. ÜBUNG. Betrachten Sie $A = \{a\} \subset X = \{a, b\}$ mit der Topologie $\mathcal{O}_X = \{\emptyset, A, X\}$, und zeigen Sie:

- (1) Das Paar (X, A) ist eine Kofaserung, $(X^2, A \times X \cup X \times A)$ jedoch nicht.
 (2) Geben Sie Abbildungen $u: X \rightarrow I$ und $h: X \times I \rightarrow X$ wie in Proposition 3.59 (1) an.

Übungen zu Abschnitt 3.g.

3.131. ÜBUNG. Es seien $(X_j)_{j \in J}$ und Y punktierte Räume. Konstruieren Sie eine natürliche bijektive, stetige Abbildung

$$\bigvee_{j \in J} (X_j \wedge Y) \longrightarrow \left(\bigvee_{j \in J} X_j \right) \wedge Y.$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung ein Homöomorphismus ist, wenn J endlich ist.

3.132. ÜBUNG. Es seien (X, A) , (Y, B) , $(A, \{x_0\})$ und $(B, \{y_0\})$ abgeschlossene Kofaserungen. Zeigen Sie, dass $(X, A) \wedge (Y, B)$ wieder eine gut punktierte, abgeschlossene Kofaserung ist.

3.133. ÜBUNG. Es sei (X, A) ein gutes Paar und $f: A \rightarrow B$ stetig. Konstruieren Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaften eine natürliche, stetige, bijektive Abbildung

$$SX \cup_{Sf} SB \longrightarrow S(X \cup_f B),$$

und beweisen Sie die Stetigkeit der Umkehrabbildung.

Übungen zu Abschnitt 3.h.

3.134. ÜBUNG. Bestimmen Sie für die folgenden Sequenzen von Gruppen jeweils den Kolimes G und geben Sie auch die Abbildungen $g_k: G_k \rightarrow G$ an.

- (1) $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \dots$
 (2) $\mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 4} \dots$
 (3) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \dots$

3.135. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Die stabile Homotopiegruppe $\pi_3^s(S^2) \cong \pi_1^s(S^0)$ wird von der Hopf-Faserung $p: S^3 \rightarrow S^2$ erzeugt.
 (2) Es bezeichne $\iota: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ die Inklusion mit $(z_0 : z_1) \mapsto (z_0 : z_1 : 0)$. Dann ist $\iota_*[p] = 0 \in \pi_3(\mathbb{C}P^2)$.

(3) Es gilt dann auch $\iota_*[p] = 0 \in \pi_3^s(\mathbb{C}P^2)$.

3.136. ÜBUNG. (1) Zeigen Sie mit der stabilen Homotopiesequenz 3.80 für $(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1})$, dass $\pi_k^s(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_k^s(\mathbb{C}P^{n-1})$ für alle $k < 2n - 1$.

(2) Bestimmen Sie $\pi_2^s(\mathbb{C}P^n)$ für alle $n \geq 2$.

(3) Bestimmen Sie $\pi_3^s(\mathbb{C}P^n)$ für alle $n \geq 2$.

Übungen zu Abschnitt 3.i.

3.137. ÜBUNG. Es sei $p: S^3 \rightarrow S^2$ die Hopf-Faserung aus Beispiel 3.33. Bestimmen Sie die gerahmte Untermannigfaltigkeit (M, τ) , die das Bild von $[p]$ unter der Pontryagin-Thom-Konstruktion repräsentiert.

Elementare Homotopietheorie

In diesem Abschnitt fassen wir einige Konstruktionen und Sätze zusammen, die uns später helfen, Homologie- und Kohomologietheorien homotopietheoretisch zu betrachten. Hierzu gehören zum einen abstrakte Konstruktionen aus der Kategorientheorie, sowie Kategorien mit Zusatzstrukturen, denen wir später in verschiedenen Zusammenhängen wieder begegnen.

Zum anderen betrachten wir die Unterkategorien $\mathcal{CW} \subset \mathit{kw}\mathcal{H} \subset \mathit{Top}$. Während CW-Komplexe vor allem homotopietheoretisch schöne Eigenschaften haben, zeichnen sich die kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räume dadurch aus, dass mit Ihnen viele elementare topologische Konstruktionen möglich sind, und dabei nur sehr selten pathologisches Verhalten auftritt.

Schließlich führen wir Modellkategorien ein, um einen abstrakten Rahmen für Homotopietheorie zu haben, der sich beispielsweise auch in der algebraischen Geometrie einsetzen lässt. Im letzten Abschnitt lernen wir zwei Typen topologischer Sequenzen kennen, aus denen wir viele exakte Sequenzen ableiten können.

4.a. Adjungierte Funktoren, Limiten und Kolimiten

Wir lernen einige Grundbegriffe aus der abstrakten Kategorientheorie kennen. Hierzu zählen adjungierte Funktoren, Limiten und Kolimiten, siehe Folgerung 1.76. Im nächsten Abschnitt helfen uns diese Überlegungen, einige Eigenschaften der Kategorie der kompakt erzeugten schwachen Hausdorff-Räume leichter zu verstehen. Außerdem brauchen wir Limiten und Kolimiten auch im Zusammenhang mit Modellkategorien.

4.1. DEFINITION. Es seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien und $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $\mathcal{G}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ Funktoren. Dann heißt \mathcal{F} *linkadjungiert* zu \mathcal{G} , \mathcal{G} *rechtsadjungiert* zu \mathcal{F} oder einfach \mathcal{F} und \mathcal{G} zueinander *adjungiert*, wenn es für alle Objekte X von \mathcal{C} und Y von \mathcal{D} einen natürlichen Isomorphismus

$$\Phi_{X,Y}: \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}Y)$$

gibt. Man spricht auch von einer *Adjunktion* und schreibt kurz $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}: \mathcal{G}$ oder $\mathcal{F} \dashv \mathcal{G}$.

Man beachte, dass es auf die Reihenfolge der Funktoren ankommt. Wenn \mathcal{F} und \mathcal{G} zueinander adjungiert sind, bedeutet das nicht, dass auch \mathcal{G} und \mathcal{F} zueinander adjungiert sind.

4.2. BEMERKUNG. Natürlichkeit bedeutet hier, dass für alle $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X)$ und alle $g \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y')$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}X, Y) & \xrightarrow{\Phi_{X,Y}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}Y) \\ g \circ \circ \mathcal{F}f \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}g \circ \circ f \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}X', Y') & \xrightarrow{\Phi_{X',Y'}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', \mathcal{G}Y') . \end{array}$$

Die Funktoren \mathcal{F} und \mathcal{G} sind im Allgemeinen nicht invers zueinander. Aber es gibt immerhin zwei wichtige natürliche Transformationen, die *Einheit* $\varepsilon: \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ und die *Koeinheit* $\eta: \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$, gegeben durch

$$\varepsilon_Y = \Phi_{\mathcal{G}Y, Y}^{-1}(\text{id}_{\mathcal{G}Y}) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}\mathcal{G}Y, Y) \quad \text{und} \quad \eta_X = \Phi_{X, \mathcal{F}X}(\text{id}_{\mathcal{F}X}) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}\mathcal{F}X) .$$

Die Existenz der natürlichen Bijektionen $\Phi_{X,Y}$ oben ist äquivalent dazu, dass für alle Objekte X von \mathcal{C} und Y von \mathcal{D} gilt:

$$\text{id}_{\mathcal{F}X} = \varepsilon_{\mathcal{F}X} \circ \mathcal{F}\eta_X \quad \text{und} \quad \text{id}_{\mathcal{G}Y} = \mathcal{G}\varepsilon_Y \circ \eta_{\mathcal{G}Y} .$$

In Bemerkung 4.28 sehen wir anhand eines Beispiels, wie man $\Phi_{X,Y}$ aus ε_Y und η_X rekonstruiert.

4.3. BEISPIEL. Um zu zeigen, wie häufig adjungierte Funktoren sind, geben wir zwei möglichst unterschiedliche Beispiele.

(1) In der Kategorie Set gilt das *Exponentialgesetz*.

$$\text{Hom}_{\mathit{Set}}(X \times Y, Z) \cong \text{Hom}_{\mathit{Set}}(X, \text{Hom}_{\mathit{Set}}(Y, Z))$$

für alle Mengen X, Y, Z , somit $\cdot \times X \dashv \text{Hom}_{\mathit{Set}}(Y, \cdot)$. In Top gilt es nach Satz 1.60 (3), falls Y lokalkompakt ist. Als Spezialfall erhalten wir die Adjunktion $S \dashv \Omega$ auf Top_+ .

(2) Es sei B eine Menge und V ein \mathbb{k} -Vektorraum. Bezeichne $\langle B \rangle_{\mathbb{k}}$ den von B frei erzeugten Vektorraum und $|V|$ die Menge der Vektoren von V , dann gilt

$$\text{Hom}_{\mathit{Set}}(B, |V|) \cong \text{Hom}_{\mathit{Vec}_{\mathbb{k}}}(\langle B \rangle, V) .$$

Hierbei wird eine Abbildung f abgebildet auf die lineare Abbildung

$$\sum_{b \in B} a_b b \longmapsto \sum_{b \in B} a_b f(b) .$$

Hier ist das „freie Erzeugnis“ linkadjungiert zu einem „vergesslichen Funktor“. Ähnliche Adjunktionen gibt es zwischen Set und Grp sowie zwischen Set und Ab .

Als nächstes werden wir den Begriff des Kolimes (direkten Limes) aus Folgerung 1.76 stark verallgemeinern und den dazu dualen Begriff des (inversen) Limes kennenlernen.

4.4. DEFINITION. Ein *Diagramm* ist eine kleine Kategorie, das heißt, eine Kategorie, deren Objekte eine Menge bilden. Eine Kategorie mit endlich vielen Objekten, deren Morphismen von endlich vielen erzeugt werden, heißt entsprechend *endliches Diagramm*.

Sei \mathcal{I} ein Diagramm und \mathcal{C} eine Kategorie, dann ist ein Diagramm vom Typ \mathcal{I} in \mathcal{C} ein Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$.

Sei C ein Objekt von \mathcal{C} , dann ist das diagonale Diagramm Δ_C vom Typ \mathcal{I} in \mathcal{C} der konstante Funktor, der alle Objekte von \mathcal{I} auf C und alle Morphismen in \mathcal{I} auf id_C abbildet.

4.5. BEISPIEL. Es sei \mathcal{I} eine Kategorie mit einem Objekt X und einem Morphismus $f: X \rightarrow X$. Falls $f^n \neq f^m$ für alle $n > m \geq 0$, gibt es unendlich viele Morphismen; dennoch sprechen wir von einem endlichen Diagramm.

4.6. BEMERKUNG. Die Diagramme vom Typ \mathcal{I} in \mathcal{C} bilden selbst eine Kategorie $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$, dabei ist ein Morphismus in $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ gerade eine natürliche Transformation $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$.

Wir können die Zuordnung $C \mapsto \Delta_C$ als Funktor $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ auffassen, denn ein Morphismus $f: C \rightarrow D$ liefert eine natürliche Transformation $\Delta_f: \Delta_C \rightarrow \Delta_D$. Wir nennen ihn den *Diagonalfunktor*.

4.7. DEFINITION. Es sei \mathcal{I} ein Diagramm und $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor. Dann hat \mathcal{F} einen *Limes*, wenn es ein Objekt $\lim \mathcal{F}$ von \mathcal{C} und eine in \mathcal{C} natürliche Bijektion

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}(\Delta_C, \mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \lim \mathcal{F})$$

für alle Objekte C von \mathcal{C} gibt. Eine Kategorie \mathcal{C} hat *alle \mathcal{I} -Limiten*, wenn der Diagonalfunktor linksadjungiert zu einem Funktor $\lim: \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{C}$ ist. Sie hat *alle Limiten*, wenn sie \mathcal{I} -Limiten für alle Diagramme besitzt, und *alle endlichen Limiten*, wenn sie \mathcal{I} -Limiten nur für alle endlichen Diagramme besitzt.

Der Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ hat einen *Kolimes*, wenn es ein Objekt $\text{colim } \mathcal{F}$ von \mathcal{C} und eine natürliche Bijektion

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}(\mathcal{F}, \Delta_C) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{colim } \mathcal{F}, C)$$

für alle Objekte C von \mathcal{C} gibt. Die Kategorie \mathcal{C} hat *alle \mathcal{I} -Kolimiten*, wenn der Diagonalfunktor rechtsadjungiert zu einem Funktor $\text{colim}: \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{C}$ ist. Analog definieren wir, wann \mathcal{C} *alle kleinen* oder *endlichen Kolimiten* hat.

Eine Kategorie heißt *vollständig*, wenn sie alle kleinen Limiten hat, *kovollständig*, wenn sie alle kleinen Kolimiten hat, und *bivollständig*, wenn beides gilt.

Tatsächlich haben die meisten Kategorien, für die wir uns interessieren, alle Limiten und Kolimiten. In diesem Fall können wir \lim und colim als rechts- beziehungsweise linksadjungierten Funktor zum Diagonalfunktor definieren. Wir wollen uns aber die Möglichkeit offenhalten, auch dann über einzelne \mathcal{I} -Limiten oder \mathcal{I} -Kolimiten zu sprechen, wenn nicht alle existieren; daher jeweils die etwas explizitere Definition am Anfang.

4.8. BEMERKUNG. Limiten und Kolimiten erfüllen universelle Eigenschaften, falls sie existieren. Dadurch sind sie wie immer bis auf eindeutige Isomorphismen eindeutig bestimmt, und wir dürfen salopp von „dem“ Limes und „dem“ Kolimes reden. Tatsächlich sind viele der kategoriellen Konstruktionen, die wir anhand von universellen Eigenschaften definiert haben, Beispiele von Limiten oder Kolimiten; mehr dazu gleich.

Wir wollen anhand eines konkreten Beispiels verstehen, was die obige Definition bedeutet. Dazu betrachten wir die endliche Kategorie \mathcal{I} mit drei Objekten und zwei nichttrivialen Morphismen der Form

$$A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B. \quad (\text{a})$$

Ein Diagramm \mathcal{F} vom Typ \mathcal{I} in \mathcal{C} ist nichts anderes als ein Diagramm der obigen Form aus Objekten und Morphismen in \mathcal{C} . Eine natürliche Transformation von \mathcal{F} zum Diagonalfunktor Δ_D für ein Objekt D von \mathcal{C} ist somit ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} D & & \\ & \searrow^b & \\ & & B \\ & \searrow^a & \downarrow g \\ & & A \xrightarrow{f} C \end{array} \quad (\text{b})$$

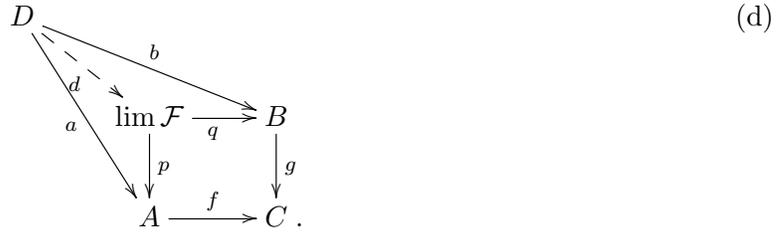
Den offensichtlichen Morphismus $f \circ a = g \circ b: D \rightarrow C$ haben wir der Übersicht halber weggelassen.

Der Identität $\text{id}_{\lim \mathcal{F}}$ entspricht insbesondere ein Morphismus $\Delta_{\lim \mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}$, also erhalten wir ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} \lim \mathcal{F} & \xrightarrow{q} & B \\ \downarrow p & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array} \quad (\text{c})$$

Da sich \lim zu Δ für ein festes \mathcal{F} wie ein rechtsadjungiert Funktor verhält, gibt es zu jedem Diagramm \mathcal{F} vom Typ \mathcal{I} wie in (a) und für alle D und a, b wie in (b) genau eine Abbildung $d: D \rightarrow$

$\lim \mathcal{F}$ wie im Diagramm



Das Diagramm kommutiert, falls wir zeigen können, dass $a = p \circ d$ und $b = q \circ d$. Aber das folgt aus der Natürlichkeit der Bijektionen $\Phi_{\cdot, \mathcal{F}}$ in der Definition. Dazu betrachte

$$\begin{array}{ccc} (p, q) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\Delta_{\lim \mathcal{F}}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\Phi_{\lim \mathcal{F}, \mathcal{F}}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\lim \mathcal{F}, \lim \mathcal{F}) \ni \text{id}_{\lim \mathcal{F}} \\ \cdot \circ \Delta_d \downarrow & & \cdot \circ d \downarrow \\ (a, b) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\Delta_D, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\Phi_{D, \mathcal{F}}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D, \lim \mathcal{F}) \ni d. \end{array}$$

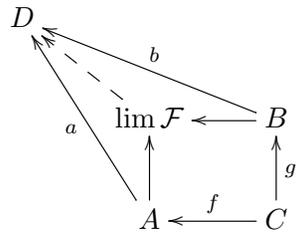
Die obere Zeile entspricht dem Diagramm (c), die untere (d), und rechts gilt offensichtlich $\text{id}_{\lim \mathcal{F}} \circ d = d$. Aufgrund der Natürlichkeit erhalten wir auf der linken Seite die gesuchte Gleichheit. Die Abbildung d ist auch eindeutig: gäbe es links eine andere Abbildung e mit $p \circ e = a$ und $q \circ e = b$, dann wäre rechts $\text{id}_{\lim \mathcal{F}} \circ e = d$, was natürlich nicht sein kann.

Also erfüllt $\lim \mathcal{F}$ genau die universelle Eigenschaft des Pullback. Das heißt, der Pullback ist ein Spezialfall eines endlichen Limes. Umgekehrt kann man zeigen, dass der Pullback ein Funktor $\mathcal{C}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{C}$ ist, der zu Δ rechtsadjungiert ist, und somit ein Limes im Sinne der obigen Definition.

Indem wir alle Pfeile umdrehen, erhalten wir völlig analog, dass der Kolimes zum Diagramm

$$A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$$

die universelle Eigenschaft eines Pushouts erfüllt.



Alle anderen Limiten und Kolimiten erfüllen analoge universelle Eigenschaften, die genauso bewiesen werden.

4.9. BEISPIEL. Wir geben einige bekannte Beispiele für diese Konstruktionen.

- (1) Sei \mathcal{I} eine Menge I von Objekten, und die einzigen Morphismen seien die Identitäten dieser Objekte. Ein Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ist also eine durch I indizierte Familie, und ihr Limes in \mathcal{C} ist ihr Produkt, falls er existiert. Falls $I = \emptyset$, erhalten wir das terminale Objekt von \mathcal{C} .
- (2) Analog ist der Kolimes von \mathcal{F} das Koproduct der obigen Familie, falls er existiert. Falls $I = \emptyset$, erhalten wir das initiale Objekt von \mathcal{C} .
- (3) Bisher haben wir den Begriff des (inversen) Limes für den Spezialfall zum folgenden Diagramm verwendet:

$$X_0 \longleftarrow X_1 \longleftarrow \cdots$$

- (4) Analog haben wir den Begriff des Kolimes oder direkten Limes für folgenden Spezialfall verwendet:

$$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots .$$

Wir werden auch in Zukunft die Konstruktionen aus (3) und (4) mit Limes und Kolimes bezeichnen, solange keine Verwechslungsgefahr besteht.

4.10. PROPOSITION. *Jeder (endliche) Limes ist ein Pullback von (endlichen) Produkten. Jeder (endliche) Kolimes ist ein Pushout von (endlichen) Koproducten.*

Insbesondere hat eine Kategorie \mathcal{C} genau dann alle (endlichen) Limiten, wenn alle (endlichen) Produkte und alle Pullbacks existieren. Sie hat genau dann alle (endlichen) Kolimiten, wenn alle (endlichen) Koproducte und alle Pushouts existieren.

BEWEIS. Für die erste Aussage schreiben wir $f: D_f \rightarrow Z_f$ für alle f aus einer Menge von Morphismen, die alle Morphismen von \mathcal{I} erzeugt. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \lim \mathcal{F} & \longrightarrow & \prod_I \mathcal{F}(I) \\ \downarrow & & \downarrow (g,h) \\ \prod_f \mathcal{F}(Z_f) & \xrightarrow{\Delta} & \prod_f \mathcal{F}(Z_f) \times \prod_f \mathcal{F}(Z_f) . \end{array}$$

Hierbei geht das Produkt in der oberen Zeile über alle Objekte I von \mathcal{I} , und die Produkte in der unteren Reihe jeweils über eine Menge von Erzeugern der Morphismen von \mathcal{I} . Ist \mathcal{I} endlich, so sind es auch alle obigen Produkte. Für jeden Morphismus f ist die f -Komponente von g die Verkettung $f \circ \pi_{D_f}$, und die f -Komponente von h ist einfach π_{Z_f} . Der obige Pullback ist genau der Limes, denn jede Abbildung $C \rightarrow \lim \mathcal{F}$ entspricht genau einer Familie von Abbildungen $C \rightarrow \mathcal{F}(I)$ für alle I , die mit den Erzeugern von \mathcal{I} verträglich sind.

Völlig analog lässt sich jeder Kolimes als Pushout von Koproducten darstellen. \square

4.11. BEISPIEL. Die folgenden Kategorien sind somit bivollständig:

$$\text{Set} , \quad \text{Set}_+ , \quad \text{Grp} , \quad \text{Ab} , \quad \text{Vec}_{\mathbb{k}} , \quad \text{Top} , \quad \text{Top}_+ .$$

Das Koproduct und den Pushout von Gruppen haben wir in Abschnitt 2.d kennengelernt.

4.12. DEFINITION. Ein Funktor $\mathcal{G}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt *stetig*, wenn für alle Diagramme $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$, die einen Limes in \mathcal{C} besitzen, auch $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ einen Limes besitzt, nämlich $\lim(\mathcal{G} \circ \mathcal{F}) = \mathcal{G}(\lim \mathcal{F})$.

Ein Funktor $\mathcal{G}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt *kostetig*, wenn für alle Diagramme $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$, die einen Kolimes in \mathcal{C} besitzen, auch $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ einen Kolimes besitzt, nämlich $\lim(\mathcal{G} \circ \mathcal{F}) = \mathcal{G}(\lim \mathcal{F})$.

Die Begriffe „(ko-) vollständig“ und „(ko-)stetig“ sind in einer recht oberflächlichen Analogie zur Topologie metrischer Räume gewählt. Aufgrund von Proposition 4.10 reicht es, für Stetigkeit nur Produkte und Pullbacks, und für Kostetigkeit nur Koproducte und Pushouts zu betrachten.

4.13. BEISPIEL. Die Fundamentalgruppe ist verträglich mit dem Produkt punktierter Räume. Nach dem Satz 2.42 von Seifert-van Kampen ist sie unter gewissen Voraussetzungen verträglich mit Koproducten und Pushout, jedoch keinesfalls immer, siehe Beispiel 2.44.

4.14. LEMMA. *Es seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien, und $\mathcal{H}: \mathcal{D} \rightleftarrows \mathcal{C} : \mathcal{G}$ zueinander adjungierte Funktoren. Dann ist \mathcal{G} stetig und \mathcal{H} kostetig.*

Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen gibt es umgekehrt zu einem stetigen Funktor einen linksadjungierten Funktor, und zu einem kostetigen Funktor einen rechtsadjungierten Funktor. Also ist das obige Lemma oft die Methode der Wahl, um Stetigkeit oder Kostetigkeit zu zeigen.

BEWEIS. Der Beweis ist rein formal. Zunächst überlegt man sich, dass

$$\Delta_{\mathcal{G}C} = \mathcal{G} \circ \Delta_C \quad \text{und} \quad \Delta_{\mathcal{H}D} = \mathcal{H} \circ \Delta_D .$$

Außerdem induzieren \mathcal{H} und \mathcal{G} aufgrund der Natürlichkeit der Adjunktion auch adjungierte Funktoren $\mathcal{H}: \mathcal{D}^{\mathcal{I}} \rightleftarrows \mathcal{C}^{\mathcal{I}} : \mathcal{G}$. Für $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ schreibt man

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(D, \mathcal{G}(\lim \mathcal{F})) &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H}D, \lim \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}(\Delta_{\mathcal{H}D}, \mathcal{F}) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}(\mathcal{H} \circ \Delta_D, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\mathcal{D}^{\mathcal{I}}}(\Delta_D, \mathcal{G} \circ \mathcal{F}) . \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{G}(\lim \mathcal{F})$ der Limes von $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$.

Analog gilt für $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$, dass

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{H}(\text{colim } \mathcal{F}), C) &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{colim } \mathcal{F}, \mathcal{G}C) = \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}(\mathcal{F}, \Delta_{\mathcal{G}C}) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}(\mathcal{F}, \mathcal{G} \circ \Delta_C) = \text{Hom}_{\mathcal{D}^{\mathcal{I}}}(\mathcal{H} \circ \mathcal{F}, \Delta_C) . \quad \square \end{aligned}$$

4.15. BEISPIEL. Wir betrachten das adjungierte Paar $\langle \cdot \rangle: \text{Set} \rightleftarrows \text{Vec}_{\mathbb{K}} : |\cdot|$ aus Beispiel 4.3 (2).

(1) Das freie Erzeugnis verträgt sich mit Kolimiten, beispielsweise gilt

$$\left\langle \coprod_{i \in I} M_i \right\rangle \cong \bigoplus_{i \in I} \langle M_i \rangle .$$

Mit allgemeinen Limiten ist $\langle \cdot \rangle$ jedoch nicht verträglich, zum Beispiel gilt

$$\langle M_1 \times M_2 \rangle \cong \langle M_1 \rangle \otimes \langle M_2 \rangle ,$$

und das Tensorprodukt ist nicht das kategorielle Produkt. Auf der anderen Seite lässt sich für ein unendliches Produkt von Vektorräumen nicht so einfach eine Basis angeben.

(2) Der vergessliche Funktor $|\cdot|$ vertauscht mit Limiten. Das erklärt, warum das kategorielle Produkt von beliebig vielen Vektorräumen durch das kartesische Produkt realisiert wird.

Analoge Überlegungen gelten selbstverständlich auch für die Kategorien Grp , Ab und Mod_R . Man beachte beispielsweise, dass das Produkt freier Gruppen im Allgemeinen nicht wieder frei ist.

4.b. Eine angenehme Kategorie topologischer Räume

In der Kategorie Top aller topologischer Räume gibt es einige „Pathologien“. Beispielsweise ist nicht jede Kofaserung abgeschlossen, das Exponentialgesetz 1.60 (4) gilt nur unter Zusatzvoraussetzungen, und Produkte von CW-Komplexen sind nicht automatisch selbst CW-Komplexe. Wir betrachten hier die Kategorie $kw\mathcal{H}$ der kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räume, die diese Probleme nicht hat; mehr zu dieser Kategorie findet sich in [St]. Um das Exponentialgesetz zu beweisen und besser zu verstehen, führen wir in Abschnitt 4.c den Begriff einer abgeschlossenen monoidalen Kategorie ein.

Wir betrachten eine sogenannte *volle Unterkategorie* $kw\mathcal{H}$ der Kategorie Top , das heißt, unsere Kategorie enthält eine gewisse Auswahl der Objekte von Top , aber für je zwei Objekten X, Y von $kw\mathcal{H}$ gilt

$$\text{Hom}_{kw\mathcal{H}}(X, Y) = \text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y) ,$$

es sind also nach wie vor genau die stetigen Abbildungen als Morphismen erlaubt. Die Definition von $kw\mathcal{H}$ erfolgt, indem wir mit stetigen Abbildungen $f: K \rightarrow X$ von Kompakta nach X gewisse Eigenschaften „testen“. Dabei erinnern wir uns, dass bei uns alle kompakten Räume gemäß Definition 1.50 als Hausdorff vorausgesetzt sind.

4.16. DEFINITION. Es sei X ein topologischer Raum.

(1) Wir nennen X *kompakt erzeugt*, wenn eine Teilmenge $U \subset X$ offen ist, falls $f^{-1}(U) \subset K$ für alle kompakten Räume K und alle stetigen $f: K \rightarrow X$ offen ist.

- (2) Wir nennen X *schwach Hausdorff*, wenn $\text{im } f \subset X$ abgeschlossen ist für alle Kompakta K und alle stetigen Abbildungen $f: K \rightarrow X$.
- (3) Es bezeichne $kw\mathcal{H} \subset \mathcal{Top}$ die volle Unterkategorie der kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räume.

Beide Eigenschaften lassen sich mit Hilfe kompakter Räume testen. Nach Bemerkung 1.51 (2) und (5) ist jeder Hausdorff-Raum schwach Hausdorff, und da pt kompakt ist, erfüllt jeder schwache Hausdorff-Raum das erste Trennungsaxiom (T1). Ohne Beweis geben wir einige Klassen von Beispielen an.

4.17. PROPOSITION. *Die Kategorie $kw\mathcal{H}$ enthält*

- (1) *alle Hausdorff-Räume, die das Abzählbarkeitsaxiom (A1) erfüllen,*
- (2) *alle metrischen oder metrisierbaren Räume,*
- (3) *alle topologischen Mannigfaltigkeiten, und*
- (4) *alle CW-Komplexe.*

Es sei X ein beliebiger topologischer Raum, dann bezeichne kX die gleiche Menge mit der *kompakt erzeugten Topologie*

$$\{ U \subset X \mid f^{-1}(U) \subset K \text{ offen für alle Kompakta } K \text{ und alle stetigen } f: K \rightarrow X \}.$$

Wir nennen offene Mengen in kX auch *k-offen*. Jede offene Menge ist also auch *k-offen*.

4.18. PROPOSITION. *Die Zuordnung k ist ein Funktor von der Kategorie \mathcal{Top} in die Kategorie $k\mathcal{Top}$ der kompakt erzeugten Räume. Er ist rechtsadjungiert zur Inklusion $k\mathcal{Top} \hookrightarrow \mathcal{Top}$.*

Wir verschieben den Beweis in die Übungen 4.78 und 4.79.

4.19. FOLGERUNG. *Sei $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow k\mathcal{Top}$ ein Diagramm. Dann gilt*

$$\lim^{k\mathcal{Top}} \mathcal{F} = k \lim^{\mathcal{Top}} \mathcal{F} \tag{1}$$

$$\text{colim}^{k\mathcal{Top}} \mathcal{F} = \text{colim}^{\mathcal{Top}} \mathcal{F}. \tag{2}$$

Inbesondere ist die Kategorie $k\mathcal{Top}$ bivollständig, und der Funktor k ist stetig.

BEWEIS. Die erste Aussage folgt aus den Lemma 4.14 und 4.18. Für die zweite Aussage reicht es zu zeigen, dass $\text{colim}^{\mathcal{Top}} \mathcal{F}$ kompakt erzeugt ist. Nach Proposition 4.10 reicht es, Koproducte und Pushouts, also Quotienten von Koproducten, zu betrachten.

Die Topologie auf $X = \coprod_{i \in I} X_i$ ist die feinste Topologie, für die alle Inklusionen $X_j \rightarrow X$ stetig sind. Aber dann sind auch die Abbildungen $X_j = kX_j \rightarrow kX$ stetig, und da die kompakte erzeugte Topologie feiner ist, folgt, dass X bereits kompakt erzeugt ist. Analog geht der Beweis für Quotienten. \square

Die Hausdorff-Eigenschaft lässt sich wie folgt umformulieren: Ein Raum X ist genau dann Hausdorff, wenn $\Delta X \subset X \times X$ abgeschlossen ist. Diese Idee übertragen wir auf kompakt erzeugte Räume.

4.20. PROPOSITION. *Es sei X kompakt erzeugt. Dann ist X schwach Hausdorff genau dann, wenn $\Delta X \subset k(X \times X)$ abgeschlossen ist.*

BEWEIS. Sei zunächst X kompakt erzeugt und $\Delta X \subset k(X \times X)$ abgeschlossen. Sei K kompakt und $f: K \rightarrow X$ beliebig. Zu zeigen ist für alle kompakten L und alle $g: L \rightarrow X$, dass $g^{-1}(\text{im } f) \subset L$ abgeschlossen ist. Nach Voraussetzung ist die Menge

$$\{ (p, q) \in K \times L \mid f(p) = g(q) \} = (f \times g)^{-1}(\Delta X) \subset K \times L$$

abgeschlossen, also auch kompakt. Ihr Bild unter der Projektion auf L ist dann ebenfalls abgeschlossen. Aber dieses Bild ist gerade $g^{-1}(\text{im } f)$. Also ist X schwach Hausdorff.

Sei jetzt X kompakt erzeugt und schwach Hausdorff. Zu zeigen ist für jedes Kompaktum K und jede Abbildung $f: K \rightarrow X \times X$, dass das Urbild von ΔX abgeschlossen ist. Es sei $f(p) = (g(p), h(p))$ für alle $p \in K$, dann ist f durch die stetigen Abbildungen g, h eindeutig bestimmt. Sei $p \in K \setminus f^{-1}(\Delta X)$, so dass $x = g(p) \neq y = h(p)$. Als einpunktige Menge ist $\{y\} \subset X$ kompakt, also abgeschlossen. Also haben wir disjunkte abgeschlossene Teilmengen $\{p\}$ und $g^{-1}(y) \subset K$.

Da K normal ist, finden wir offene, disjunkte Umgebungen U von p und $V \subset K$ von $g^{-1}(y)$. Dann ist $K \setminus V$ kompakt, somit ist $g(K \setminus V)$ abgeschlossen in X und $W = K \setminus h^{-1}(g(K \setminus V))$ offen in K . Es gilt $p \in W$, da $y = h(p) \in g(V)$. Außerdem gilt $U \cap W \cap f^{-1}(\Delta X) = \emptyset$, denn sei $q \in U \cap W$, dann folgt $g(q) \in g(U) \subset g(K \setminus V)$ und $h(q) \notin g(K \setminus V)$, somit $q \notin f^{-1}(\Delta X)$. Also finden wir für $p \notin f^{-1}(\Delta X)$ eine Umgebung $U \cap W$ in $K \setminus f^{-1}(\Delta X)$, somit ist ΔX eine k -abgeschlossene Menge in $X \times X$. \square

Wir können eine Äquivalenzrelation „ \sim “ auf einem Raum X als eine Teilmenge $R_\sim \subset X \times X$ mit $\Delta_X \subset R_\sim$ schreiben, dann gilt zum Beispiel $R_= = \Delta X$.

4.21. PROPOSITION. *Es sei X ein kompakt erzeugter Raum und „ \sim “ eine Äquivalenzrelation auf X . Dann ist X/\sim genau dann ein kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Raum, wenn $R_\sim \subset k(X \times X)$ abgeschlossen ist.*

Wir verschieben diesen Beweis auf später. Die Schwierigkeit besteht darin, zu zeigen, dass das Bild $\Delta_{X/\sim}$ von R_\sim in $k((X/\sim) \times (X/\sim))$ wieder abgeschlossen ist.

Wir betrachten jetzt alle Äquivalenzrelationen, die durch k -abgeschlossene Teilmengen dargestellt werden. Da der Durchschnitt über eine Menge solcher Teilmengen wieder eine Äquivalenzrelation darstellt, gibt es eine minimale k -abgeschlossene Äquivalenzrelation „ \approx “. Wir betrachten den Raum $hX = X/\approx$ mit der Quotiententopologie.

4.22. PROPOSITION. *Die Zuordnung $X \mapsto hX$ ist ein Funktor $k\text{Top} \rightarrow kw\mathcal{H}$. Er ist linksadjungiert zur Inklusion $kw\mathcal{H} \hookrightarrow k\text{Top}$.*

BEWEIS. Nach Proposition 4.21 ist X/\approx ein kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Raum.

Sei jetzt Y ein kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Raum und $f: X \rightarrow Y$ stetig, dann ist auch $f \times f: k(X \times X) \rightarrow k(Y \times Y)$ stetig, somit ist das Urbild von Δ_Y in $k(X \times X)$ abgeschlossen und damit gröber als R_{\approx_X} . Das heißt, f induziert eine Abbildung $hX \rightarrow Y$, die nach der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie auch stetig ist. Hieraus folgt sowohl, dass h ein Funktor ist, als auch, dass er linksadjungiert zur Inklusion $kw\mathcal{H} \hookrightarrow k\text{Top}$ ist. \square

4.23. FOLGERUNG. *Sei $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow kw\mathcal{H}$ ein Diagramm. Dann gilt*

$$\lim^{kw\mathcal{H}} \mathcal{F} = \lim^{k\text{Top}} \mathcal{F} \quad (1)$$

$$\text{colim}^{kw\mathcal{H}} \mathcal{F} = h \text{colim}^{k\text{Top}} \mathcal{F} . \quad (2)$$

Insbesondere ist die Kategorie $kw\mathcal{H}$ bivollständig, und der Funktor h ist kostetig.

BEWEIS. Die zweite Aussage folgt aus Lemma 4.14. Für die erste Aussage reicht zu zeigen, dass jeder Limes von kompakt erzeugten schwach Hausdorff-Räumen in $k\text{Top}$ bereits schwach Hausdorff ist. Wegen Proposition 4.10 reicht es, Produkte in $k\text{Top}$ und Pullbacks, also Unterräume von Produkten in $k\text{Top}$ zu betrachten.

Es sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Räume, und es sei $X = k \prod_{i \in I} X_i$ ihr Produkt in $k\text{Top}$. Für alle $j \in I$ ist die Projektionsabbildung

$$\pi_j: k(X \times X) \cong k \prod_{i \in I} k(X_i \times X_i) \longrightarrow k(X_j \times X_j)$$

stetig, somit ist $\pi_j^{-1}\Delta X_j$ abgeschlossen in $X \times X$. Aber dann ist auch $\Delta X = \bigcup_{j \in I} \pi_j^{-1}\Delta X_j$ abgeschlossen in $k(X \times X)$, und somit ist X schwach Hausdorff.

Sei jetzt X kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Raum und $A \subset X$ ein Unterraum. Dann ist kA ebenfalls kompakt erzeugt, und die Inklusion $\iota: kA \rightarrow A \hookrightarrow X$ ist stetig. Sei Y ebenfalls kompakt erzeugt, dann ist nach Proposition 4.18 eine Abbildung $F: Y \rightarrow kA$ genau dann stetig, wenn $F: Y \rightarrow A$ stetig ist, nach Satz 1.54 (2) also genau dann, wenn $\iota \circ F: Y \rightarrow X$ stetig ist. Sei jetzt K kompakt und $f: K \rightarrow kA$ stetig. Dann ist $\iota \circ f: K \rightarrow X$ stetig, also ist $\text{im}(\iota \circ f)$ abgeschlossen. Aber dann ist auch $\text{im}(f) = \iota^{-1}\text{im}(\iota \circ f)$ abgeschlossen. Also ist kA schwach Hausdorff, und somit ist jeder Limes von kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räumen in $k\mathcal{Top}$ selbst wieder schwach-Hausdorff. \square

4.24. BEMERKUNG. Zusammenfassend erhalten wir für Diagramme $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow kw\mathcal{H}$ also

$$\lim^{kw\mathcal{H}} \mathcal{F} = k \lim^{\mathcal{Top}} \mathcal{F} \quad \text{und} \quad \text{colim}^{kw\mathcal{H}} \mathcal{F} = h \text{colim}^{\mathcal{Top}} \mathcal{F} .$$

Im Beweis von Folgerung 4.23 haben wir außerdem gesehen, dass wir den Funktor k auf Unterräume anwenden müssen, um in der Kategorie $kw\mathcal{H}$ die charakteristische Eigenschaft aus Satz 1.54 zu erhalten. Analog haben wir in Folgerung 4.19 den Funktor h auf Quotienten angewandt, um die charakteristische Eigenschaft aus Satz 1.72 zu gewährleisten. Wir werden in Zukunft meistens in $kw\mathcal{H}$ arbeiten. Dann verstehen mit Unterräume, Quotienten, Produkte, Koprodukte, sowie allgemeine Limiten und Kolimiten ebenfalls in $kw\mathcal{H}$. Insbesondere schreiben wir „ k “ und „ h “ in der Regel nicht mit, es sei denn, um Verwechslungen zu vermeiden.

4.25. BEMERKUNG. Es folgen zwei wichtige Konsequenzen aus Proposition 4.21. Dazu seien X, Y zwei kompakt erzeugte schwach-Hausdorff-Räume.

- (1) Das reduzierte Produkt $X \wedge Y$ in $k\mathcal{Top}$ ist wieder schwach Hausdorff. Denn die einpunktigen Teilmengen $\{x_0\} \subset X$ und $\{y_0\} \subset Y$ sind kompakt und daher abgeschlossen. Die Diagonalen $\Delta X \subset k(X \times X)$ und $\Delta Y \subset k(Y \times Y)$ sind ebenfalls abgeschlossen, also auch $\Delta(X \times Y) = \Delta X \times \Delta Y \subset k(X \times X) \times k(Y \times Y)$, und die Topologie auf $k(X \times X \times Y \times Y) \cong k(k(X \times Y) \times k(X \times Y))$ ist noch feiner. Also ist auch die Menge

$$\begin{aligned} R_\sim &= \Delta(X \times Y) \cup ((X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y) \times (X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y)) \\ &\subset k(k(X \times Y) \times k(X \times Y)) \end{aligned}$$

abgeschlossen, und $X \wedge Y = k(X \times Y)/\sim$ ist schwach Hausdorff.

- (2) Es sei $A \subset X$ abgeschlossen und $f: kA \rightarrow Y$ stetig. Dann ist auch der Pushout $X \cup_f Y$ in $k\mathcal{Top}$ wieder schwach-Hausdorff. Die Teilmengen $A \times Y$ und $A \times A$ sind in $X \times Y$ beziehungsweise $X \times X$, also erst recht in $k(X \times Y)$ beziehungsweise $k(X \times X)$ abgeschlossen. Da f stetig ist, sind auch die Teilmengen

$$\begin{aligned} (f \times \text{id}_Y)^{-1}(\Delta Y) &\subset k(kA \times Y) \subset k(X \times Y) \\ (f \times f)^{-1}(\Delta Y) &\subset k(kA \times kA) \subset k(X \times X) \end{aligned}$$

abgeschlossen, also auch

$$\begin{aligned} R_\sim &= (\Delta X \cup (f \times f)^{-1}(\Delta Y)) \sqcup (f \times \text{id}_Y)^{-1}(\Delta Y) \sqcup (\text{id}_Y \times f)^{-1}(\Delta Y) \sqcup \Delta Y \\ &\subset k(X \times X) \sqcup k(X \times Y) \sqcup k(Y \times X) \sqcup k(Y \times Y) = k((X \sqcup Y) \times (X \sqcup Y)) . \end{aligned}$$

Also ist $X \cup_f Y = (X \sqcup Y)/\sim$ schwach Hausdorff.

In beiden Fällen ist das Ergebnis also invariant unter dem Funktor h . Wenn $A \subset X$ nicht abgeschlossen ist, stimmt Aussage (2) nicht mehr, beispielsweise sei $f: \mathbb{Q} \rightarrow \text{pt}$ die konstante Abbildung, dann ist $h(\mathbb{R} \cup_f \text{pt}) \cong \text{pt}$.

4.c. Das Exponentialgesetz

Wir kommen jetzt zum Raum der stetigen Abbildungen, siehe auch Abschnitt 1.f. Die folgenden Konstruktionen werden uns helfen, weitere schöne Eigenschaften der Kategorie $k\mathcal{W}\mathcal{H}$ zu beweisen. Um den topologischen Aufwand gering zu halten, führen wir den Begriff der abgeschlossenen monoidalen Kategorie ein. Um den abstrakten Aufwand in Grenzen zu halten, begnügen wir uns mit einer relativ einfachen Version, die für den Anfang ausreicht.

4.26. DEFINITION. Eine *monoidale Kategorie* $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ ist eine Kategorie \mathcal{C} mit

- einem Funktor $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, dem *Tensorprodukt*,
- einem *Einheitsobjekt* E , und
- natürlichen Isomorphismen

$$\alpha_{X,Y,Z}: (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z),$$

$$\lambda_X: E \otimes X \xrightarrow{\cong} X \quad \text{und} \quad \rho_X: X \otimes E \xrightarrow{\cong} X,$$

so dass für alle Objekte X, Y, Z, W die folgenden Axiome gelten:

$$\alpha_{X,Y,Z \otimes W} \circ \alpha_{X \otimes Y, Z, W} = (\text{id}_X \otimes \alpha_{Y, Z, W}) \circ \alpha_{X, Y \otimes Z, W} \circ (\alpha_{X, Y, Z} \otimes \text{id}_W), \quad (1)$$

$$\rho_X \otimes \text{id}_Y = (\text{id}_X \otimes \lambda_Y) \circ \alpha_{X, E, Y}. \quad (2)$$

Sie heißt (*rechts-*) *abgeschlossen*, falls zu jedem Objekt Y ein zu $\cdot \otimes Y$ rechtsadjungierter Funktor $\text{hom}(Y, \cdot)$ existiert. Sie heißt *kartesisch abgeschlossen*, wenn darüberhinaus das Tensorprodukt ein Produkt im Sinne von Bemerkung 1.47 ist und das Einheitsobjekt ein terminales Objekt.

Zu den Eigenschaften (1)–(2) gehören die kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccc} & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) & \\ \alpha_{X \otimes Y, Z, W} \nearrow & & \searrow \alpha_{X, Y, Z \otimes W} \\ ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W)) \\ \alpha_{X, Y, Z} \otimes \text{id}_W \downarrow & & \uparrow \text{id}_X \otimes \alpha_{Y, Z, W} \\ (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W & \xrightarrow{\alpha_{X, Y \otimes Z, W}} & X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W), \end{array}$$

$$\text{und} \quad \begin{array}{ccc} & (X \otimes E) \otimes Y & \xrightarrow{\alpha_{X, E, Y}} & X \otimes (E \otimes Y) \\ & \rho_X \otimes \text{id}_Y \searrow & & \swarrow \text{id}_X \otimes \lambda_Y \\ & & X \otimes Y & \end{array}$$

Sie besagen, dass die Objekte von \mathcal{C} eine „große“ Halbgruppe oder auch Monoid bilden („groß“ bedeutet, dass der Träger eine echte Klasse sein kann), wobei die üblichen Rechenregeln aber stets nur bis auf eindeutige natürliche Isomorphismen gelten. Man nennt eine Kategorie *streng monoidal*, wenn $(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z)$ und $E \otimes X = X = X \otimes E$ für alle Objekte X, Y und Z gelten, und $\alpha_{X,Y,Z}$, λ_X und ρ_X jeweils die Identitäten dieser Objekte sind. Die meisten monoidalen Kategorien sind nicht streng monoidal, aber mit einer Art Auswahlaxiom lässt sich zu jeder monoidalen Kategorie eine äquivalente streng monoidale Kategorie konstruieren.

Der Funktor hom heißt *interner hom-Funktor*. Er ist im ersten Argument kontravariant und im zweiten Argument kovariant, siehe Übung 4.86. „Intern“ bedeutet hier, dass $\text{hom}(Y, Z)$ im Gegensatz zur Menge $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ ein Objekt der Kategorie \mathcal{C} ist. Wir können umgekehrt auch *abgeschlossene Kategorien* $(\mathcal{C}, \text{hom}, E)$ als Kategorien mit Einheitsobjekt E , internem hom -Funktor hom und gewissen natürlichen Transformationen definieren.

4.27. BEISPIEL. Wir geben eine Liste uns bekannter Kategorien mit verschiedenen monoidalen Strukturen an. Jede der folgenden Kategorien ist jeweils monoidal

- mit Koprodukt und initialem Objekt,
- mit Produkt und terminalem Objekt, beziehungsweise
- mit Tensorprodukt und Einheitsobjekt (falls definiert),

wir erhalten also pro Zeile bis zu drei verschiedene monoidale Kategorien, und nur bei einem Typ von Kategorien ist das abstrakte Tensorprodukt aus Definition 4.26 tatsächlich ein Tensorprodukt.

Kategorie	Koprodukt	Initiales Objekt	Produkt	Terminales Objekt	Tensorprodukt	Einheitsobjekt
Grp	$*$	$\{e\}$	\times	$\{e\}$	—	—
$\mathit{Mod}_R, \mathit{Ab}, \mathit{Vec}_{\mathbb{k}}$	\oplus	0	\oplus	0	\otimes	$R, \mathbb{Z}, \mathbb{k}$
$\mathit{Set}, (\mathit{Top}),$ $k\mathit{Top}, kw\mathcal{H}$	\sqcup	\emptyset	\times	pt	\times	pt
$\mathit{Set}_+, (\mathit{Top}_+),$ $k\mathit{Top}_+, kw\mathcal{H}_+$	\vee	pt	\times	pt	\wedge	S^0

All diese Beispiele sind sogar *symmetrische monoidale Kategorien*, das heißt, es gibt natürliche Isomorphismen $\tau_{X,Y}: X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$, die gewisse Zusatzaxiome erfüllen, auf die wir hier noch nicht eingehen wollen. In Satz 7.28 sind sie anhand eines Beispiels aufgeführt.

- (1) Die Kategorie $(\mathit{Set}, \times, \text{pt})$ ist kartesisch abgeschlossen. Das haben wir im Beweis von Satz 1.60 bereits ausgenutzt. Für die Kategorie $(\mathit{Set}_+, \wedge, S^0)$ der punktierten Mengen verwenden wir die gleiche Notation wie für Top_+ . Sie ist abgeschlossen monoidal, aber das kartesische Produkt „ \times “ ist nicht das Tensorprodukt „ \wedge “.
- (2) Die Kategorie Mod_R für einen kommutativen Ring R mit 1 ist abgeschlossen monoidal, denn die linearen Abbildungen zwischen zwei R -Moduln bilden selbst wieder einen R -Modul. Spezialfälle sind $\mathit{Ab} = \mathit{Mod}_{\mathbb{Z}}$ und $\mathit{Vec}_{\mathbb{k}} = \mathit{Mod}_{\mathbb{k}}$. Das Tensorprodukt von Moduln ist Namensgeber für unser Tensorprodukt in Definition 4.26.
- (3) In der Unterkategorie $fd\mathit{Vec}_{\mathbb{k}} \subset \mathit{Vec}_{\mathbb{k}}$ der endlich-dimensionalen Vektorräume gibt es einen Dualitätsfunktor $X \mapsto X^* = \text{hom}(X, \mathbb{k})$, so dass $\text{hom}(X, Y) \cong X^* \otimes Y$. In den anderen obigen Beispielen gibt es so etwas jedoch nicht. In Abschnitt 8.a führen wir eine Art topologischer Dualität ein.
- (4) Die Kategorien $(\mathit{Top}, \times, \text{pt})$ und $(\mathit{Top}_+, \wedge, S^0)$ sind monoidal. Für Top_+ haben wir das in Bemerkung 3.73 angedeutet. Beide Kategorien sind nicht abgeschlossen, da einzelne Punkte im Exponentialgesetz 1.60 nicht ohne Voraussetzungen gelten.
- (5) Die Kategorien $k\mathit{Top}$ und $k\mathit{Top}_+$ sowie $kw\mathcal{H}$ und $kw\mathcal{H}_+$ sind nach Satz 4.31 und Folgerung 4.34 abgeschlossen und monoidal. Zur Bedeutung der Symbole „ \times “ und „ \wedge “ siehe Bemerkungen 4.35 und 4.25 (1).

4.28. BEMERKUNG. Es seien X, Y und Z Objekte einer abgeschlossenen monoidalen Kategorie \mathcal{C} . Wir bezeichnen die Einheit der Adjunktion $\cdot \otimes Y \dashv \text{hom}(Y, \cdot)$ mit $\text{ev}_{Y,Z} = \varepsilon_Z: \text{hom}(Y, Z) \otimes$

$Y \rightarrow Z$ und die Koeinheit mit $\otimes_{X,Y} = \eta_X: X \rightarrow \text{hom}(Y, X \otimes Y)$. Aus der Natürlichkeit der Adjunktion in Bemerkung 4.2 erhalten wir zwei universelle Eigenschaften, siehe Übung 4.87.

- (1) *Universelle Eigenschaft des internen hom-Funktors.* Es existiert eine natürliche Transformation $\text{ev}_{Y,Z}: \text{hom}(Y, Z) \otimes Y \rightarrow Z$, so dass zu jedem Morphismus $f: X \otimes Y \rightarrow Z$ ein eindeutiger Morphismus $g: X \rightarrow \text{hom}(Y, Z)$ mit $f = \text{ev}_{Y,Z} \circ (g \otimes \text{id}_Y)$ existiert.
- (2) *Universelle Eigenschaft des Tensorproduktes.* Es existiert eine natürliche Transformation $\otimes_{X,Y}: X \rightarrow \text{hom}(Y, X \otimes Y)$, so dass zu jedem Morphismus $g: X \rightarrow \text{hom}(Y, Z)$ ein eindeutiger Morphismus $f: X \otimes Y \rightarrow Z$ mit $g = \text{hom}(Y, f) \circ \otimes_{X,Y}$ existiert.

Die Abbildung g in (2) repräsentiert dabei so etwas wie eine „bilineare Abbildung“ $X \times Y \rightarrow Z$.

$$\begin{array}{ccc}
 X \otimes Y & \xrightarrow{g \otimes \text{id}_Y} & \text{hom}(Y, Z) \otimes Y \\
 \searrow f & & \swarrow \text{ev}_{Y,Z} \\
 & & Z
 \end{array}
 \quad \text{und} \quad
 \begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\otimes_{X,Y}} & \text{hom}(Y, X \otimes Y) \\
 \searrow g & & \swarrow \text{hom}(Y, f) \\
 & & \text{hom}(Y, Z)
 \end{array}$$

Insbesondere sehen wir, dass sich die Bijektion $\Phi_{X,Z}$ aus Definition 4.1 und ihr Inverses mit Hilfe der Koeinheit beziehungsweise der Einheit beschreiben lassen; das gilt analog für alle Adjunktionen.

4.29. BEMERKUNG. In einer Kategorie sind Objekte üblicherweise abstrakt, keine Mengen, deren Elemente man (mit der Sprache der Kategorien) erkennen könnte. Man kann also auch Morphismen nicht als Zuordnungsvorschriften interpretieren. In abgeschlossenen monoidalen Kategorien geht all das jedoch.

Sei \mathcal{C} zunächst nur monoidal. Jedem Objekt X können wir die Menge $|X| = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, X)$ zuordnen. Wenn E das initiale Objekt (und \otimes das Koprodukt) ist, hat diese Menge stets nur ein Element. In $(\text{Set}, \times, \text{pt})$ (und genauso in $\text{Top}, k\text{Top}$ und $kw\mathcal{H}$) hingegen entsprechen die Bildpunkte von Morphismen $\text{pt} \rightarrow X$ genau den Elementen von X . In $(\text{Mod}_R, \otimes, R)$ identifizieren wir einen Morphismus $E = R \rightarrow X$ mit dem Bild von $1 \in R$. In $(\text{Set}_+, \wedge, S^0)$ (und genauso in $\text{Top}_+, k\text{Top}_+$ und $kw\mathcal{H}_+$) betrachten wir das Bild desjenigen Punktes in S^0 , der nicht Basispunkt ist. In diesen Fällen ist $|X|$ stets die dem Objekt X zugrundeliegende Menge.

Ab jetzt sei \mathcal{C} abgeschlossen. Für $X = E$ erhalten wir mit der Adjunktion $\cdot \otimes Y \dashv \text{hom}(Y, \cdot)$ eine bijektive Abbildung

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \xrightarrow{\circ \lambda_Y} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E \otimes Y, Z) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, \text{hom}(Y, Z)) = |\text{hom}(Y, Z)|,$$

da λ_Y ein Isomorphismus ist. Also entspricht $\text{hom}(Y, Z)$ der Menge $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$. Um Morphismen auf Elementen auszuwerten, benutzen wir die Komposition \circ von Morphismen in \mathcal{C} :

$$|\text{hom}(Y, Z)| \times |Y| \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, Y) \xrightarrow{\circ} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, Z) = |Z|.$$

Wir erhalten also eine Abbildung $|\text{hom}(Y, Z)| \rightarrow \text{Hom}_{\text{Set}}(|Y|, |Z|)$, und man kann überprüfen, dass das einen „vergesslichen“ Funktor $|\cdot|: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ liefert.

Sei schließlich \mathcal{C} zusätzlich punktiert, das heißt, es gibt ein Nullobjekt 0 , also eines, das gleichzeitig initial und terminal ist. Dann erhalten wir einen vergesslichen Funktor $|\cdot|: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}_+$, dabei repräsentiert der Nullmorphismus $E \rightarrow 0 \rightarrow X$ den Basispunkt von $|X|$.

4.30. SATZ (Abstraktes Exponentialgesetz). *In jeder abgeschlossenen monoidalen Kategorie existiert ein natürlicher Isomorphismus*

$$\text{hom}(X \otimes Y, Z) \cong \text{hom}(X, \text{hom}(Y, Z)).$$

BEWEIS. Es sei W ein weiteres Objekt, dann erhalten wir eine Verkettung natürlicher Bijektionen

$$\begin{aligned} \text{Hom}_C(W, \underbrace{\text{hom}(X \otimes Y, Z)}_A) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_C(W \otimes X \otimes Y, Z) \xrightarrow{\cong} \\ &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_C(W \otimes X, \text{hom}(Y, Z)) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_C(W, \underbrace{\text{hom}(X, \text{hom}(Y, Z))}_B) . \end{aligned}$$

Es bezeichne f das Urbild von id_B und g das Bild von id_A für $W = B$ beziehungsweise $W = A$. Wegen der Natürlichkeit der Adjunktionen aus Bemerkung 4.2 kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} f \in \text{Hom}_C(B, A) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_C(B, B) \ni \text{id}_B \\ \cdot \circ g \downarrow & & \downarrow \cdot \circ g \\ \text{id}_A \in \text{Hom}_C(A, A) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_C(A, B) \ni g . \end{array}$$

Also folgt $f \circ g = \text{id}_A$. Analog sieht man $g \circ f = \text{id}_B$, mithin sind die beiden Objekte A und B im Satz isomorph. \square

4.31. SATZ. Die Kategorie $k\text{Top}$ ist kartesisch abgeschlossen.

Insbesondere gilt in $k\text{Top}$ das Exponentialgesetz wie in Satz 1.60, aber ohne zusätzliche Voraussetzungen an die beteiligten Räume. Wir werden das später auch für $kw\mathcal{H}$ zeigen. Zum Beweis von Proposition 4.21 benötigen wir aber zunächst einmal das Exponentialgesetz in $k\text{Top}$.

BEWEIS. Aufgrund der universellen Eigenschaft ist das Produkt auf $k\text{Top}$ aus Bemerkung 4.24 assoziativ mit Einheitsobjekt pt , somit ist $(k\text{Top}, k(\cdot \times \cdot), \text{pt})$ eine monoidale Kategorie.

Als internes hom -Objekt zu Y, Z definieren wir

$$\text{hom}(Y, Z) = kC(Y, Z) ,$$

wobei $C(Y, Z)$ wie immer die kompakt-offene Topologie aus Definition 1.59 trage.

Zu jeder Abbildung $f: X \times Y \rightarrow Z$ von Mengen existiert genau eine Abbildung $g: X \rightarrow \text{Hom}(Y, Z)$, so dass $f(x, y) = g(x)(y)$ für alle $x \in X$ und alle $y \in Y$. Diese Bijektion $\text{Hom}(X \times Y, Z) \cong \text{Hom}(X, \text{Hom}(Y, Z))$ ist natürlich im Sinne von Bemerkung 4.2. Zu zeigen ist, dass $f: k(X \times Y) \rightarrow Z$ genau dann stetig ist, wenn $g(x): Y \rightarrow Z$ für alle x stetig ist und $g: X \rightarrow kC(Y, Z)$ ebenfalls stetig ist.

Sei $f: k(X \times Y) \rightarrow Z$ stetig, dann ist für alle x die Abbildung $\iota_x: Y \rightarrow \{x\} \times Y$ stetig, und somit auch $g(x) = f \circ \iota_x$. Um zu zeigen, dass g stetig ist, betrachten wir eine Testabbildung $h: K \rightarrow X$ mit K kompakt. Es sei $L \subset Y$ kompakt mit Einbettungsabbildung $\iota: L \rightarrow Y$ und $U \subset Z$ offen, dann ist zu zeigen, dass $h^{-1}g^{-1}S_{L,U}$ in K offen ist. Dazu sei

$$\begin{aligned} p \in h^{-1}g^{-1}S_{L,U} &= \{ q \in K \mid f(h(q), \iota(\ell)) \in U \text{ für alle } \ell \in L \} \\ \text{und} \quad V &= (f \circ (h \times \iota))^{-1}(U) \subset K \times L . \end{aligned}$$

Da f stetig ist, ist $f \circ (h \times \iota): K \times L \rightarrow Z$ ebenfalls stetig, also ist V offen. Da $h(p) \times L \subset V$ und L kompakt ist, gibt es eine offene Teilmenge $W \subset K$ mit $W \times L \subset V$. Es folgt $p \in W \subset h^{-1}g^{-1}S_{L,U}$, also ist $h^{-1}g^{-1}S_{L,U}$ offen, und $g \circ h$ und g sind stetig.

Sei jetzt $g: X \rightarrow kC(Y, Z)$ stetig, dann reicht es zu zeigen, dass für alle Kompakta K und alle $h: K \rightarrow X \times Y$ die Abbildung $f \circ h: K \rightarrow Z$ stetig ist. Sei dazu $U \subset Z$ offen und

$$V = (f \circ h)^{-1}(U) = \{ p \in K \mid g(h_1(p))(h_2(p)) \in U \} .$$

Sei $p \in V$. Da $g(h_1(p)): Y \rightarrow Z$ und $h_2: K \rightarrow Y$ stetig sind, existiert eine Umgebung $L \subset K$ von p mit $L \subset (g(h_1(p)) \circ h_2)^{-1}(U)$. Da K kompakt ist, dürfen wir annehmen, dass L ebenfalls

kompakt ist. Dann ist auch $h_2(L)$ kompakt, und $g(h_1(p))$ liegt in der Subbasis-Menge $S_{h_2(L),U}$ der kompakt offenen Topologie, siehe Definition 1.57. Aber dann bildet h_1 eine Umgebung W von x nach $S_{h_2(L),U}$ ab, also besitzt x eine Umgebung $W \cap L \subset V$, somit ist V offen, und f ist stetig. \square

An dieser Stelle können wir endlich den Beweis von Proposition 4.21 nachholen. Dazu bedarf es einiger Vorarbeit. Wir nennen eine Abbildung $q: X \rightarrow Y$ eine *Quotientenabbildung*, wenn q stetig und surjektiv ist und Y die Quotiententopologie aus Definition 1.71 trägt. Äquivalent dazu erfüllt f die charakteristische Eigenschaft aus Satz 1.72.

4.32. PROPOSITION. *Es sei $q: X \rightarrow Y$ eine Quotientenabbildung in $k\mathcal{Top}$ und Z kompakt erzeugt. Dann ist auch $q \times \text{id}_Z: k(X \times Z) \rightarrow k(Y \times Z)$ eine Quotientenabbildung.*

BEWEIS. Die Abbildung $q \times \text{id}_Z$ ist stetig. Sei jetzt W kompakt erzeugt und $g: k(Y \times Z) \rightarrow W$ eine beliebige Abbildung. Zu zeigen ist, dass g stetig ist, falls $g \circ (q \times \text{id}_Z)$ stetig ist. Zu g und $g \circ (q \times \text{id}_Z)$ erhalten wir adjungierte Abbildungen $h: Y \rightarrow kC(Z, W)$ und $h \circ q: X \rightarrow kC(Z, W)$ von Mengen wie im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} g \in \text{Hom}(k(Y \times Z), W) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}(Y, kC(Z, W)) \ni h \\ \cdot \circ (q \otimes \text{id}_Z) \downarrow & & \downarrow \cdot \circ q \\ g \circ (q \otimes \text{id}_Z) \in \text{Hom}(k(X \times Z), W) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}(X, kC(Z, W)) \ni h \circ q \end{array}$$

Wenn $g \circ (q \times \text{id}_Z)$ stetig ist, ist auch $h \circ q$ stetig, da $k\mathcal{Top}$ abgeschlossen ist. Da q eine Quotientenabbildung ist, ist h stetig. Aber dann ist auch g stetig. \square

BEWEIS von Proposition 4.21. Es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf dem kompakt erzeugten Raum X und $q: X \rightarrow Y = X/\sim$ die Quotientenabbildung. Wie im Beweis der Folgerung 4.19 schließen wir, dass Y ebenfalls kompakt erzeugt ist.

Nach Proposition 4.32 erhalten wir eine Quotientenabbildung

$$q \times q: k(X \times X) \xrightarrow{q \times \text{id}_X} k(X/\sim \times X) \xrightarrow{\text{id}_{X/\sim} \times q} k(X/\sim \times X/\sim).$$

Nach Proposition 4.20 ist X/\sim genau dann schwach Hausdorff, wenn $\Delta(X/\sim) \subset k(X/\sim \times X/\sim)$ abgeschlossen ist. Aber das gilt genau dann, wenn $R_\sim = (q \times q)^{-1}(\Delta(X/\sim)) \subset k(X \times X)$ abgeschlossen ist. \square

Somit sind jetzt alle Aussagen in Abschnitt 4.b vollständig bewiesen. Es bleibt zu zeigen, dass auch $kw\mathcal{H}$ und $kw\mathcal{H}_+$ abgeschlossen sind.

4.33. PROPOSITION. *Es seien Y, Z kompakt erzeugt und Z sei schwach Hausdorff. Dann ist auch $kC(Y, Z)$ schwach Hausdorff.*

BEWEIS. Zu zeigen ist die Abgeschlossenheit von $\text{im } F \subset kC(Y, Z)$ für alle Kompakta K und alle $F: K \rightarrow kC(Y, Z)$. Für alle Kompakta L und alle Testabbildungen $G: L \rightarrow kC(Y, Z)$ muss also $G^{-1}(\text{im } F) \subset L$ abgeschlossen sein. Betrachte jetzt die zugehörigen Abbildungen $f: k(K \times Y) \rightarrow Z$ und $g: k(L \times Y) \rightarrow Z$ sowie $\iota_y: k(K \times L) \rightarrow k(K \times Y \times L \times Y)$ mit $\iota_y(k, \ell) = (k, y, \ell, y)$, dann gilt

$$\begin{aligned} G^{-1}(\text{im } F) &= \{ \ell \in L \mid \text{es gibt } k \in K \text{ mit } f(k, y) = g(\ell, y) \in Z \text{ für alle } y \in Y \} \\ &= \pi_L \bigcap_{y \in Y} \iota_y^{-1}(f \times g)^{-1}(\Delta Z). \end{aligned}$$

Da Z schwach Hausdorff ist, ist $\Delta Z \subset k(Z \times Z)$ abgeschlossen, also auch $\iota_y^{-1}(f \times g)^{-1}(\Delta Z) \subset k(K \times L) = K \times L$. Somit ist $G^{-1}(\text{im } F)$ das Bild einer abgeschlossenen, mithin kompakten Teilmenge von $K \times L$, und somit selbst kompakt, also auch abgeschlossen in L , was zu zeigen war. \square

Wir vervollständigen jetzt die letzten zwei Zeilen der Tabelle in Beispiel 4.27.

4.34. FOLGERUNG. Die Kategorien $(kw\mathcal{H}, k(\cdot \times \cdot), \text{pt})$ und $(kw\mathcal{H}_+, k(\cdot \wedge \cdot), S^0)$ der unpunktieren und der punktierten kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räume sind abgeschlossen und monoidal. \square

4.35. BEMERKUNG. Wie schon in Bemerkung 4.24 gesagt, werden wir im Folgenden oft — meist stillschweigend — in $kw\mathcal{H}$ arbeiten. Beispielsweise schreiben wir $X \times Y$ und $X \wedge Y$ anstelle von $k(X \times Y)$ und $k(X \wedge Y)$. Unter einer Einbettung verstehen wir eine injektive Abbildung, die ein Homöomorphismus auf das mit der kompakt erzeugten Unterraum-Topologie versehene Bild ist.

Für gut punktierte Räume X, Y in $kw\mathcal{H}_+$ schreiben wir

$$Y^X = k\{f \in kC(X, Y) \mid f(x_0) = y_0\} \subset kC(X, Y).$$

Im nicht punktierten Fall sei $Y^{X+} = kC(X, Y)$ auch dann, wenn Y keinen Basispunkt besitzt. Wenn $Y = (Y, y_0)$ punktiert ist, haben Y^X und Y^{X+} die konstante Abbildung auf y_0 als Basispunkt. Nach Definition bezeichnet $[X, Y]$ die Menge der punktierten Homotopieklassen von Abbildungen, also die Wegzusammenhangskomponenten von Y^X . Daher erhalten wir die punktierte Menge

$$[X, Y] = \pi_0(Y^X).$$

Anstelle von punktierten Räumen, Paaren und punktierten Paaren würden wir vielleicht lieber nur gut punktierte Räume und Kofaserungen betrachten. Dabei meinen wir mit Kofaserungen nach wie vor Hurewicz-Kofaserungen, wobei wir Definition 3.55 im Sinne von Bemerkung 4.35 in $kw\mathcal{H}$ verstehen. Die Kategorie der gut punktierten Räume ist allerdings nicht abgeschlossen, da Y^X im Allgemeinen nicht wieder gut punktiert ist. In der Tat gibt es auch andere Gründe, nicht nur gut punktierte Räume zu betrachten. Im Abschnitt 4.e über Modellkategorien kommen wir auf diese Frage noch einmal zurück.

Für den Begriff des Umgebungsdeformationsretraktes verweisen wir auf Proposition 3.59.

4.36. PROPOSITION. Sei $A \rightarrow X$ Kofaserung in $kw\mathcal{H}$, dann ist $A \subset X$ abgeschlossen und $A \rightarrow X$ ist eine Einbettung. Für ein Paar (X, A) in $kw\mathcal{H}$ sind folgende Aussagen äquivalent.

- (1) (X, A) ist ein Umgebungsdeformationsretrakt;
- (2) $X \times \{0\} \cup A \times I$ ist starker Deformationsretrakt von $X \times I$;
- (3) $X \times \{0\} \cup A \times I$ ist Retrakt von $X \times I$;
- (4) (X, A) ist eine Kofaserung.

BEWEIS. Man zeigt wie in Bemerkung 3.58, dass $i: A \rightarrow X$ genau dann eine Kofaserung ist, wenn $Zi \subset X \times I$ ein Retrakt ist. Wie in Übung 3.125 folgt, dass i eine Einbettung ist, und mit einem ähnlichen Trick wie in Übung 3.126 sehen wir in Übung 4.80, dass $\text{im}(i) \subset X$ abgeschlossen ist. Die Äquivalenz der Punkte (1)–(4) folgt wie im Beweis von Proposition 3.59. \square

4.d. CW-Komplexe und der Satz von Whitehead

Wir erinnern uns an die Konstruktion von CW-Komplexen in Abschnitt 1.i vor Definition 1.80. Wir modifizieren diese Konstruktion wie folgt. Wie immer sei $S^{n-1} = \partial D^n$ und $B^n = \mathring{D}^n$.

4.37. DEFINITION. Ein Paar (X, A) in Top heißt *CW-Paar*, wenn es Mengen J^n , Räume X^{n-1} und Verklebeabbildungen $\varphi_j^n: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $j \in J^n$ gibt, so dass

$$X^{-1} = A, \tag{1}$$

$$X^n = \left(\coprod_{j \in J^n} D^n \right) \cup_{\varphi_j^n} X^{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

wobei $\varphi^n: \coprod_{j \in J^n} S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ von den φ_j^n induziert wird, und

$$X = \operatorname{colim} X^n \quad \text{in } \mathcal{Top}. \quad (3)$$

Ein *punktierter CW-Komplex* (X, x_0) ist ein CW-Paar der Form $(X, \{x_0\})$.

Die Räume X^n heißen *n-Gerüste* oder *n-Skelette*, die induzierten Abbildungen

$$\Phi_j^n: D^n \rightarrow X^n \hookrightarrow X \quad \text{mit} \quad \Phi_j^n|_{S^{n-1}} = \varphi_j^n$$

heißen *charakteristische Abbildungen*. Man nennt $e_j^n = \Phi_j^n(B^n)$ eine *offene* und $\bar{e}_j^n = \Phi_j^n(D^n)$ eine *abgeschlossene n-Zelle* von X .

Kolimiten sind Quotienten disjunkter Vereinigungen. Somit ist eine Menge $U \subset X$ wie in Definition 1.80 genau dann offen, wenn $U \cap A$ und $(\Phi_j^n)^{-1}(U) \subset D^n$ für alle $n \geq 0$ und alle $j \in J^n$ offen sind. Für einen beliebigen Raum Y ist eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ wegen der universellen Eigenschaften des Pushouts und des Kolimes genau dann stetig, wenn $f|_A$ und alle $f \circ \Phi_j^n: D^n \rightarrow Y$ stetig sind.

4.38. PROPOSITION. *Es sei (X, A) ein CW-Paar und K kompakt. Dann trifft für jede stetige Abbildung $f: K \rightarrow X$ das Bild im f nur endlich viele Zellen.*

Insbesondere ist jede Zelle e_j^n an nur endlich viele Zellen in X^{n-1} angeklebt, da S^{n-1} kompakt ist. Außerdem ist jede kompakte Teilmenge von X in einem der Gerüste X^n enthalten.

BEWEIS. Für alle n sei

$$J^n = \{j \in J^n \mid e_j^n \cap \operatorname{im} f \neq \emptyset\},$$

und für alle $j \in J^n$ wählen wir $x_j^n \in e_j^n \cap \operatorname{im} f$. Per Induktion über n ist die Menge

$$P = \{x_j^n \mid j \in J^n\} \subset \operatorname{im} f \cap X^n$$

in X^n abgeschlossen und diskret. Dazu konstruieren wir induktiv disjunkte Umgebungen $U_{j,n}^m$ der x_j^n in X^n für alle $m \leq n$. Für $m < n$ reicht es dazu,

$$(\Phi_i^n)^{-1}(U_{j,n}^m) = \left\{ p \in D^n \mid |p| > \frac{2}{3} \text{ und } \frac{p}{|p|} \in (\varphi_i^n)^{-1}(U_{j,n-1}^m) \right\}$$

anzugeben, sowie $(\Phi_i^n)^{-1}(U_{j,n}^n) = B_{\frac{1}{3}}(0)$ falls $i = j$ und \emptyset sonst.

Dann ist die obige Menge P als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge wieder kompakt, und da sie diskret ist, endlich. Also trifft im f nur Zellen bis zu einer endlichen Dimension n_0 , und in jeder Dimension nur endlich viele. \square

4.39. FOLGERUNG. *Sei (X, A) ein CW-Paar mit A aus $kw\mathcal{H}$, dann ist (X, A) ein Paar in $kw\mathcal{H}$.*

Insbesondere stimmt der Kolimes in Definition 4.37 (3) nach Folgerung 4.23 mit dem Kolimes in $kw\mathcal{H}$ überein.

BEWEIS. Es sei $A = X^{-1}$ in $kw\mathcal{H}$. Da $S^{n-1} \subset D^n$ abgeschlossen und $\varphi_j^n: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ stetig ist, ist nach Bemerkung 4.25 (2) induktiv auch X^n in $kw\mathcal{H}$ für alle n .

Nach Folgerung 4.19 ist der Kolimes X der X^n zumindest kompakt erzeugt. Um zu zeigen, dass X auch schwach Hausdorff ist, sei K kompakt und $f: K \rightarrow X$ stetig. Da im $f \subset X^n$ für ein n , ist im f in X^n und damit auch in X abgeschlossen. Also ist X auch schwach Hausdorff. \square

Da A nicht normal sein muss, können wir nicht erwarten, dass X wie in Satz 1.84 normal ist. Als Ersatz dafür reicht für manche Zwecke das folgende Resultat.

4.40. PROPOSITION. *Es sei (X, A) ein CW-Paar, dann sind für alle $m \leq n$ die Paare (X, X^n) , (X^n, X^m) und (X^m, A) abgeschlossene Kofaserungen.*

BEWEIS. Da (D^n, S^{n-1}) eine abgeschlossene Kofaserung ist, ist auch $(\coprod_{j \in J^n} D^n, \coprod_{j \in J^n} S^{n-1})$ eine abgeschlossene Kofaserung. Aufgrund von Proposition 3.64 und Definition 4.37 (2) ist dann auch

$$(X^n, X^{n-1}) = \left(\left(\prod_{j \in J^n} D^n \right) \cup_{\varphi^n} X^{n-1}, X^{n-1} \right)$$

eine abgeschlossene Kofaserung. Da $X^{-1} = A$, sind wegen Übung 3.124 (1) alle Paare (X^n, X^m) und (X^m, A) abgeschlossene Kofaserungen.

Sei jetzt $n \geq -1$, sei Y ein weiterer Raum, und seien $f: X \rightarrow Y$ und $h_n: X^n \times I \rightarrow Y$ mit $f|_{X^n} = h_n|_{X^n \times \{0\}}$ wie in Definition 3.55 gegeben. Konstruiere induktiv $h_k: X^k \rightarrow Y^{I^+}$ mit der Homotopieausdehnungseigenschaft, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & C(I, Y) \\ & & & & & & \downarrow \text{ev}_0 \\ X^n & \xrightarrow{h_n} & X^{n+1} & \xrightarrow{h_{n+1}} & \dots & \xrightarrow{h} & X \\ & & & & & & \downarrow f \\ & & & & & & Y \end{array} \quad (4.1)$$

kommutiert. Aufgrund der Kolimes-Eigenschaft in \mathcal{Top} existiert auch h . Da I lokalkompakt ist, entspricht h nach Satz 1.60 (3) der gesuchten Homotopie $X \times I \rightarrow Y$. Da X ein $kw\mathcal{H}$ -Raum ist, ist $X^n \subset X$ wie in den Übungen 3.126 und 4.80 abgeschlossen. \square

Wir erinnern uns an Unterkomplexe von CW-Komplexen aus Definition 1.85. Analog definieren wir einen relativen Unterkomplex Y von (X, A) als einen abgeschlossenen Unterraum $Y \subset X$ mit $A \subset Y$, der sich als Vereinigung von A und offenen Zellen von X schreiben lässt. Das nächste Resultat ist Übung 4.89.

4.41. FOLGERUNG. *Es sei Y ein Unterkomplex von (X, A) , dann ist (X, Y) eine Kofaserung.*

Wir verallgemeinern als nächstes Definition 1.88.

4.42. DEFINITION. Es seien (X, A) und (Y, B) CW-Paare. Eine Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ von Paaren heißt *zellulär*, wenn $\text{im}(f|_{X^n}) \subset Y^n$ für alle $n \geq -1$ gilt. Die CW-Paare mit den zellulären Abbildungen bilden eine Kategorie $CW\text{Pair}$. Analog definieren wir Kategorien CW und CW_+ der nicht-punktierten und der punktierten CW-Komplexe mit zellulären Abbildungen.

4.43. SATZ (Zelluläre Approximation). *Jede Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ von CW-Paaren ist homotop zu einer zellulären Abbildung. Wenn f auf einem Unterkomplex Z von (X, A) bereits zellulär ist, können zelluläre Abbildung und Homotopie relativ zu Z gewählt werden.*

BEWEIS. Wir konstruieren induktiv Homotopien $h^n: X^n \times I \rightarrow Y$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} h^{-1}(\cdot, t) &= f|_A && \text{für alle } t \in I, \\ h^n(\cdot, 0) &= f|_{X^n} && \text{für alle } n, \\ h^n|_{X^{n-1} \times I} &= h^{n-1} && \text{für alle } n, \\ \text{und } h^n(\cdot, 1) &: X^n \rightarrow Y^n && \text{für alle } n. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Exponentialgesetzes fassen wir die h^n als Abbildungen $X^n \rightarrow Y^I$ auf und erhalten mit der universellen Eigenschaft des Kolimes die gesuchte Abbildung $h: X \rightarrow Y^I$, oder äquivalent $h: X \times I \rightarrow Y$.

Es sei also $n \geq 0$, und die Homotopie h^{n-1} sei bereits konstruiert. Dann setzen wir sie n -Zelle für n -Zelle von X auf $X^n \times I$ fort. Sei e_j^n mit $j \in J^n$ eine n -Zelle von X . Um h^{n-1} auf $e_j^n \times I$ wie

gewünscht fortzusetzen, reicht es, eine Abbildung $g_j^n: D^n \times I \rightarrow Y$ anzugeben, so dass

$$\begin{aligned} g_j^n|_{D^n \times \{0\}} &= f \circ \Phi_j^n, \\ g_j^n|_{S^{n-1} \times I} &= h^{n-1} \circ (\varphi_j^n \times \text{id}_I), \\ \text{und} \quad g_j^n|_{D^n \times \{1\}} &: D^n \times I \longrightarrow Y^n. \end{aligned}$$

Da

$$(D^n \times I, (D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I)) \cong (D^n \times I, D^n \times \{0\}),$$

reicht es zu zeigen, dass jede Abbildung $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (Y, Y^{n-1})$ als Abbildung von Paaren homotop ist zu einer Abbildung nach (Y^n, Y^{n-1}) .

Sei also eine Abbildung $g: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (Y, Y^{n-1})$ gegeben. Da D^n kompakt ist, trifft g nach Proposition 4.38 nur endlich viele offene Zellen von Y . Sei m die maximale Dimension einer Zelle in Y , die getroffen wird; ohne Einschränkung gelte $m > n$. Es seien also $c_1^m, \dots, c_k^m \subset Y^m$ die m -Zellen von Y , die noch getroffen werden, und ψ_k^m sei die Verklebeabbildung von c_k^m . Betrachte $Y' = Y^{m-1} \cup c_1^m \cup \dots \cup c_{k-1}^m$ und schreibe

$$Y' \cup c_k^m = ((D^m \setminus \{0\}) \cup_{\psi_k^m} Y') \cup_{B^m \setminus \{0\}} B^m.$$

Da D^n zusammenhängend ist, trifft g nur diejenigen Wegzusammenhangskomponenten von Y , die Punkte im Bild von ψ_k^m enthalten (falls $m \geq 2$, ist das nur eine). Wir dürfen daher annehmen, dass Y' keine weiteren Wegzusammenhangskomponenten enthält. Dann ist $((D^m \setminus \{0\}) \cup_{\psi_k^m} Y', B^m \setminus \{0\})$ ein 0-zusammenhängendes und $(B^m, B^m \setminus \{0\})$ ein $(m-1)$ -zusammenhängendes Paar. Nach dem Ausschneidungssatz 3.38 und Homotopieinvarianz ist die Abbildung

$$0 = \pi_n(B^m, B^m \setminus \{0\}) \longrightarrow \pi_n(Y' \cup c_k^m, (D^m \setminus \{0\}) \cup_{\psi_k^m} Y') \cong \pi_n(Y' \cup c_k^m, Y')$$

surjektiv, da $n \leq m-1$. Wir können also g relativ zu S^{m-1} zu einer Abbildung homotopieren, die c_k^m nicht trifft. Genauso verfahren wir mit den Zellen c_{k-1}^m, \dots, c_1^m und erhalten eine Abbildung mit Bild in Y^{m-1} . Diesen Prozess setzen wir fort, bis wir eine Homotopie von g zu einer Abbildung mit Bild in (Y^n, Y^{n-1}) gefunden haben. \square

Später können wir den letzten Schritt im Beweis leicht mit der nächsten Folgerung begründen. Aber da die Folgerung zelluläre Approximation benutzt, brauchten wir oben einen anderen Beweis.

4.44. FOLGERUNG. *Es sei (X, A) ein CW-Paar mit $X = \text{colim } X^n$ wie oben.*

- (1) *Dann sind die Inklusionen $\iota: X^n \rightarrow X$ und $\iota: (X^n, A) \rightarrow (X, A)$ jeweils n -zusammenhängende Abbildungen.*
- (2) *Wenn $J^{m+1} = \dots = J^n = \emptyset$, ist (X, X^m) ein n -zusammenhängendes Paar.*

BEWEIS. Wir schreiben S^k als CW-Komplex $* \cup_{S^{k-1}} D^k$ und wenden zelluläre Approximation an. \square

4.45. DEFINITION. Eine Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ zwischen Paaren heißt *schwache Homotopieäquivalenz*, wenn $\pi_k f: \pi_k(X, A, x_0) \rightarrow \pi_k(Y, B, f(x_0))$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $x_0 \in A$ ein Isomorphismus ist.

Zwei Paare (X, A) und (Y, B) heißen *schwach homotopieäquivalent*, wenn es $n \geq 0$, Paare (X_i, A_i) für $i = 0, \dots, n$ mit $X = X_0$ und $Y = X_n$ und (Z_i, C_i) für $i = 0, \dots, n-1$ und schwache Homotopieäquivalenzen $f_i: (X_i, A_i) \rightarrow (Z_i, C_i)$ und $g_i: (X_{i+1}, A_{i+1}) \rightarrow (Z_i, C_i)$ für $0 \leq i < n$ gibt.

Analog definieren wir schwache Homotopieäquivalenz für Räume.

Somit bedeutet „schwache Homotopieäquivalenz“ das gleiche wie „ n -zusammenhängende Abbildung“ für alle $n \geq 0$.

Offensichtlich ist jede Homotopieäquivalenz eine schwache Homotopieäquivalenz, die Umkehrung muss jedoch nicht gelten, siehe Beispiel 4.52. Um tatsächlich eine Äquivalenzrelation zu erhalten, haben wir Symmetrie und Transitivität durch die Einführung von Zwischenschritten wie im folgenden Diagramm sichergestellt:

$$(X, A) = (X_0, A_0) \xrightarrow{f_0} (Z_0, C_0) \xleftarrow{g_0} (X_1, A_1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (Z_{n-1}, C_{n-1}) \xleftarrow{g_{n-1}} (X_n, A_n) = (Y, B).$$

In Übung 4.90 sehen wir, wie man diese Situation mit Hilfe von Satz 4.51 unten etwas vereinfachen kann.

4.46. SATZ (Whitehead). *Jede schwache Homotopieäquivalenz $f: (Y, A) \rightarrow (X, A)$ von CW-Paaren relativ zu A ist eine Homotopieäquivalenz. Wenn die Inklusion $\iota: Y \rightarrow X$ eines relativen Unterkomplexes (Y, A) von (X, A) eine schwache Homotopieäquivalenz ist, dann ist Y ein Deformationsretrakt von X .*

In der ersten Aussage dürfen wir nicht von Abbildungen $(Y, B) \rightarrow (X, A)$ sprechen, denn bereits für Abbildungen $f: (B, B) \rightarrow (A, A)$ kann sie falsch sein. Um zu zeigen, dass schwach homotopieäquivalente CW-Komplexe homotopieäquivalent sind, müssen wir später noch sicherstellen, dass die Räume X_i und Z_i in Definition 4.45 alle als CW-Komplexe gewählt werden können.

BEWEIS. Es sei $f: (Y, A) \rightarrow (X, A)$ eine stetige Abbildung relativ zu A , die wir nach Satz 4.43 als zellulär voraussetzen dürfen. Es sei Zf der Abbildungszylinder aus Definition 3.57. Da $f|_A = \text{id}_A$, enthält Zf den Abbildungszylinder $A \times I$ von id_A als Unterraum. Wir definieren den *relativen Abbildungszylinder* Z_Af als Pushout

$$\begin{array}{ccc} Zf & \longrightarrow & Z_Af \\ \uparrow & & \uparrow \\ A \times I & \longrightarrow & A, \end{array}$$

induziert von der Projektion $A \times I \rightarrow A$. Wir betrachten (Z_Af, A) als CW-Paar mit Unterraum (X, A) , so dass (Z_Af, X) zu jeder m -Zelle c_k^m von Y eine m -Zelle $c_k^m \times \{0\}$ und eine $(m+1)$ -Zelle $c_k^m \times (0, 1) \subset Z_Af$ enthält. Man beachte, dass der Rand der letzteren im m -Gerüst von Z_Af liegt. Die Inklusion $\iota: Y \rightarrow Z_Af$ mit $\iota(y) = (y, 0)$ und die Projektion $p: Z_Af \rightarrow X$ mit $[(y, t)] \mapsto [f(y)]$ sind dann ebenfalls zellulär.

Wir erhalten f als zusammengesetzte Abbildung

$$Y \xrightarrow{\iota} Z_Af \xrightarrow{p} X.$$

Da p eine Deformationsretraktion ist, ist mit f auch ι eine schwache Homotopieäquivalenz. Aus der zweiten Behauptung folgt dann, dass Y ein Deformationsretrakt von Z_Af ist, insbesondere ist f dann auch eine Homotopieäquivalenz.

Zur zweiten Behauptung konstruieren wir induktiv Homotopien $h^n: (X^n \cup Y) \times I \rightarrow X$ relativ zu Y ähnlich wie im Beweis der zellulären Approximation 4.43, so dass $h^n(\cdot, 0) = \text{id}$, $\text{im}(h^n(\cdot, 1)) \subset Y$, und $h^n|_{(X^{n-1} \cup Y) \times I} = h^{n-1}$, wobei $h^{-1} = \pi_Y$. Wie oben ergibt sich als Vereinigung die gesuchte Deformation $h: X \times I \rightarrow X$.

Im Falle $n = 0$ besagt unsere Voraussetzung, dass jede Zusammenhangskomponente von X einen Punkt aus Y enthält, und wir wählen $h^0(x, \cdot)$ als Pfad in X von x nach Y^0 für alle $x \in X^0 \setminus Y^0$.

Wir nehmen jetzt an, dass $n \geq 1$, und dass die Homotopie $h^{n-1} = h|_{(X^{n-1} \cup Y) \times I}$ bereits konstruiert ist. Dann setzen wir sie n -Zelle für n -Zelle von $X \setminus Y$ zu h^n fort. Ähnlich wie im obigen Beweis reicht es dafür, eine Abbildung $g: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, X^{n-1} \cup Y)$ als Abbildungen von Paaren zu einer Abbildung $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y)$ zu homotopieren.

Da die Inklusion eine schwache Homotopieäquivalenz ist, schließen wir aus der langen exakten Homotopiesequenz

$$\cdots \longleftarrow \pi_{n-1}(X, A) \xleftarrow{\cong} \pi_{n-1}(Y, A) \xleftarrow{\partial} \pi_n(X, Y) \longleftarrow \pi_n(X, A) \xleftarrow{\cong} \pi_n(Y, A) \longleftarrow \cdots$$

des Tripels (X, Y, A) aus Übung 3.110, dass $\pi_n(X, Y) = 0$, und die gesuchte Homotopie existiert. \square

4.47. BEMERKUNG. Für zwei schwach homotopieäquivalente Räume X und Y gibt es nach Definition 4.45 Isomorphismen $\pi_k(X) \cong \pi_k(Y)$ für alle $k \geq 0$; diese werden induziert von den Abbildungen f_i und g_i . Die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgemeinen nicht richtig. Dazu betrachten wir beispielsweise die Räume

$$X = S^2 \times \mathbb{R}P^3 \quad \text{und} \quad Y = \mathbb{R}P^2 \times S^3.$$

Beide Räume haben als universelle Überlagerung $S^2 \times S^3$, und die isomorphe Fundamentalgruppen $\mathbb{Z}/2$. Dennoch werden wir später sehen, dass sie nicht homotopieäquivalent sind.

Als nächstes versuchen wir, einen beliebigen topologischen Raum durch einen CW-Komplex zu ersetzen. Bis auf schwache Homotopieäquivalenz ist das möglich. Für spätere Anwendungen formulieren wir den entsprechenden Begriff noch etwas allgemeiner.

4.48. DEFINITION. Ein n -zusammenhängendes CW-Modell für ein Paar (Y, A) ist ein n -zusammenhängendes CW-Paar (X, A) zusammen mit einer Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, A)$ relativ zu A , so dass $f_*: \pi_n(X, a) \rightarrow \pi_n(Y, a)$ injektiv ist und $f_*: \pi_k(X, a) \rightarrow \pi_k(Y, a)$ ein Isomorphismus für alle $k > n$ und alle $A \in A$.

Eine CW-Approximation eines Paares (Y, A) besteht aus einem CW-Paar (X, A) und einer Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, A)$ relativ zu A , so dass $f_*: \pi_k(X, x_0) \rightarrow \pi_k(Y, f(x_0))$ für alle $k \geq 0$ und alle $x_0 \in X$ ein Isomorphismus ist.

Eine CW-Approximation ist somit ein „ (-1) -zusammenhängendes CW-Modell“. Falls $n \geq 1$, faktorisiert die Abbildung $\iota_*: \pi_n(A, a) \rightarrow \pi_n(Y, a)$ nach Voraussetzung als

$$\iota_*: \pi_n(A, a) \longrightarrow \pi_n(X, a) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Y, a).$$

Aus dem Homomorphiesatz folgt, dass $\pi_n(X, a)$ in natürlicher Weise isomorph ist zu $\text{im } \iota_*$. Das gleiche gilt sogar für $n = 0$.

4.49. BEMERKUNG. Wir betrachten einen punktierten CW-Komplex (X, x_0) , somit ist $A = \{x_0\}$.

- (1) Ein 0-zusammenhängendes CW-Modell von X ist beispielsweise die Zusammenhangskomponente X_0 von X , die x_0 enthält.
- (2) Ein 1-zusammenhängendes CW-Modell von X ist beispielsweise die universelle Überlagerung $p: \tilde{X}_0 \rightarrow X_0$, denn $\pi_1(\tilde{X}_0, \tilde{x}_0) = \pi_0(\tilde{X}_0, \tilde{x}_0) = 0$ und $p_*: \pi_k(\tilde{X}_0, \tilde{x}_0) \cong \pi_k(X_0, x_0) \cong \pi_k(X, x_0)$ nach Folgerung 3.26. Wir überlegen uns dazu, dass die universelle Überlagerung eines CW-Komplexes wieder eine natürliche CW-Struktur trägt.

Daher nennt man in diesem Spezialfall ein n -zusammenhängendes CW-Modell eines punktierten CW-Komplexes auch eine „ n -zusammenhängende Überlagerung“.

4.50. BEISPIEL. Es folgen einige konkrete Beispiele.

- (1) Da $\pi_k(S^1) = 0$ für alle $k \geq 2$ nach Beispiel 3.27, ist $\{*\} \rightarrow S^1$ ein n -zusammenhängendes CW-Modell für alle $n \geq 1$.
- (2) Nach Beispiel 3.33 liefert die Hopf-Faserung $p: S^3 \rightarrow S^2$ Isomorphismen $p_*: \pi_k(S^3) \rightarrow \pi_k(S^2)$ für alle $k \geq 3$. Also ist die Hopf-Faserung ein 2-zusammenhängendes CW-Modell für S^2 .

Weitere Beispiele betrachten wir in Übung 4.91.

4.51. SATZ (CW-Approximation). *Zu jedem punktierten Paar (Y, A) und jedem $n \geq 0$ existiert ein n -zusammenhängendes CW-Modell. Zu jedem Paar (Y, A) existiert eine CW-Approximation.*

Sei $f_1: (X, A) \rightarrow (Y, A)$ ein n -zusammenhängendes und $f_2: (Z, B) \rightarrow (W, B)$ ein m -zusammenhängendes CW-Modell mit $n \geq m$, wobei wir CW-Approximationen wie (-1) -zusammenhängende CW-Modelle behandeln. Sei $g: (Y, A) \rightarrow (W, B)$ eine Abbildung, dann existiert eine zelluläre Abbildung $\ell: (X, A) \rightarrow (Z, B)$, so dass $f_2 \circ \ell$ relativ A zu $g \circ f_1$ homotop ist. Je zwei solche Abbildungen sind relativ A homotop.

BEWEIS. Für die erste Behauptung behandeln wir jede Wegzusammenhangskomponente von Y einzeln und nehmen daher ab jetzt an, dass Y wegzusammenhängend ist. Falls $A = \emptyset$, ist $X = \emptyset$ das eindeutige n -zusammenhängende CW-Modell. Anderfalls fixieren wir einen Basispunkt in $x_0 \in A$.

Dann konstruieren wir ein CW-Paar (X, A) und eine Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, A)$ relativ zu A . Wir starten mit $X^n = A$ und $f^n = f|_{X^n} = f|_A$. Dann folgt mit Folgerung 4.44 (2) bereits, dass (X, A) ein n -zusammenhängendes Paar ist. Für alle $k > n$ konstruieren wir induktiv ein k -Skelett X^k mit einer Abbildung $f^k: X^k \rightarrow Y$, so dass $f^k|_{X^{k-1}} = f^{k-1}$ und

$$\begin{aligned} f_*^k: \pi_n(X^k) &\hookrightarrow \pi_n(Y) && \text{injektiv, falls } n \geq 0, \\ f_*^k: \pi_m(X^k) &\xrightarrow{\cong} \pi_m(Y) && \text{ein Isomorphismus für alle } m \text{ mit } n < m < k, \\ \text{und } f_*^k: \pi_k(X^k) &\twoheadrightarrow \pi_k(Y) && \text{surjektiv ist.} \end{aligned}$$

Sei jetzt $k > n$, und seien X^{k-1} und $f^{k-1}: X^{k-1} \rightarrow Y$ bereits konstruiert, so dass die obigen Bedingungen erfüllt sind. Da die Inklusion $X^{k-1} \hookrightarrow X^k$ nach Folgerung 4.44 (1) eine $(k-1)$ -zusammenhängende Abbildung ist und f_*^{k-1} über f_*^k faktorisiert, erfüllt f_*^k die obigen Eigenschaften für alle $m < k-1$, und $f_*^k: \pi_{k-1}(X^k) \rightarrow \pi_{k-1}(Y)$ ist automatisch surjektiv. Wenn alle $f^k: X^k \rightarrow Y$ konstruiert sind, setzen wir schließlich

$$X = \operatorname{colim} X^k \quad \text{und} \quad f = \operatorname{colim} f^k: X \rightarrow Y$$

und erhalten wieder wegen Folgerung 4.44 eine n -zusammenhängende CW-Approximation.

Die Konstruktion von X^k und f^k erfolgt in zwei Schritten. Falls $k = 1$, sei J_1^1 die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X^0 , die den Basispunkt x_0 nicht enthalten. Falls $k \geq 2$, wählen wir eine Erzeugermenge J_1^k des Kernes von $f_*^{k-1}: \pi_{k-1}(X^{k-1}) \rightarrow \pi_{k-1}(Y)$. Für jedes $j \in J_1^k$ sei $\varphi_j^k: S^{k-1} \rightarrow X^{k-1}$ eine punktierte Abbildung, die das entsprechende Element von $\pi_{k-1}(X^{k-1})$ darstellt. Da $[f^{k-1} \circ \varphi_j^k] = 0 \in \pi_{k-1}(Y)$, existiert eine Abbildung $g_j^k: D^k \rightarrow Y$ mit $g_j^k|_{S^{k-1}} = f^{k-1} \circ \varphi_j^k$. Wir kleben eine Zelle \bar{e}_j^k mit φ_j^k an X^{k-1} an und setzen f^{k-1} durch f_j^k auf \bar{e}_j^k fort, so dass

$$\begin{array}{ccc} D^k & \xrightarrow{\Phi_j^k} & X^{k-1} \cup \bar{e}_j^k \xrightarrow{f_j^k} Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ S^{k-1} & \xrightarrow{\varphi_j^k} & X^{k-1} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{g_j^k} \\ \nearrow f^{k-1} \end{array}$$

Sei $\psi^k: \coprod_{j \in J_1^k} S^{k-1} \rightarrow X^{k-1}$ durch die φ_j^k für $j \in J_1^k$ induziert, dann setzen wir

$$X_1^k = \left(\coprod_{j \in J_1^k} D^k \right) \cup_{\psi^k} X^{k-1} \quad \text{und} \quad f_1^k = f^{k-1} \cup \bigcup_{j \in J_1^k} f_j^k: X_1^k \rightarrow Y.$$

Nach Konstruktion ist $f_{1*}^k: \pi_{k-1}(X^k) \rightarrow \pi_{k-1}(Y)$ jetzt injektiv und somit ein Isomorphismus,

$$\begin{array}{ccc} \pi_{k-1}(X^{k-1}) & \longrightarrow & \pi_{k-1}(X_1^k) \\ f_*^{k-1} \downarrow & \nearrow f_{1*}^k & \downarrow \\ \pi_{k-1}(Y) & \xleftarrow{f_*^k} & \pi_{k-1}(X^k) . \end{array}$$

Daran ändert sich nichts mehr, wenn wir weitere k -Zellen hinzufügen.

Im zweiten Schritt wählen wir eine Erzeugermenge J_2^k von $\pi_k(Y)$ und Abbildungen $f_j^k: S^k \rightarrow (Y, y_0)$, die die entsprechenden Elemente von $\pi_k(Y)$ repräsentieren. Als Verklebeabbildung für die neuen k -Zellen wählen wir die konstante Abbildung $S^{k-1} \rightarrow \{x_0\} \rightarrow X^{k-1}$. Jetzt sei $J^k = J_1^k \sqcup J_2^k$, und wir erhalten

$$X^k = X_1^k \vee \bigvee_{j \in J_2^k} S^k \quad \text{und} \quad f^k = f_1^k \vee \bigvee_{j \in J_2^k} f_j^k: X^k \longrightarrow Y .$$

Dann ist $f_*^k: \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(Y)$ surjektiv, und die erste Behauptung somit vollständig bewiesen.

Für die zweite Behauptung erhalten wir X^0 und $f^0: X^0 \rightarrow Y$, indem wir aus jeder Wegzusammenhangskomponente Y_0 von Y , die keinen Punkt aus A enthält, einen Punkt $y_0 \in Y_0$ zu A hinzunehmen. Anschließend verfahren wir weiter wie oben für $n = 0$, beginnend bei $k = 1$. Da $\pi_0(A) \rightarrow \pi_0(Y)$ bereits surjektiv ist, liefert die Konstruktion am Ende auch einen Isomorphismus $\pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$.

Zur letzten Behauptung nehmen wir an, dass $X^n = A$ falls $n \geq 0$. Andernfalls bilden wir wie oben ein n -zusammenhängendes CW-Modell (X', A) von (X, A) mit $X'^n = A$. Nach dem Satz 4.46 von Whitehead sind (X', A) und (X, A) homotopieäquivalent relativ zu A , so dass wir (X, A) durch (X', A) ersetzen dürfen. Außerdem nehmen wir an, dass $Z \rightarrow W$ eine Inklusionsabbildung ist, die wir ι nennen. Andernfalls ersetzen wir (W, B) durch den relativen Abbildungszyylinder $(Z_B f_2, B)$, der (W, B) als Deformationsretrakt enthält, und g durch die entsprechende Abbildung im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} (X', A) & \xrightarrow{\sim} & (X, A) & \xrightarrow{f_1} & (Y, A) \\ \downarrow \ell & \swarrow & \downarrow & \searrow g & \downarrow \\ (Z, B) & \xrightarrow{\iota} & (Z_B f_2, B) & \xrightarrow{\sim} & (W, B) . \end{array}$$

f_2

Jetzt können wir ähnlich wie im Beweis der zellulären Approximation 4.43 induktiv Zelle für Zelle Homotopien $h^k: X^k \times I \rightarrow W$ konstruieren, so dass $h^k(\cdot, 0) = (g \circ f_1)|_{X^k}$, $h^k(\cdot, 1): X^k \rightarrow Z \subset W$ und $h^k|_{X^{k-1} \times I} = h^{k-1}$, wobei $h^n = (g \circ f_1 \circ p_X)|_{A \times I}: A \times I \rightarrow B \subset Z$ stationär sei. Wie oben ergibt sich als Vereinigung eine Homotopie $h: X \times I \rightarrow X$ von $g \circ f_1$ zu einer Abbildung nach Z . Nach Satz 4.43 macht eine weitere Homotopie diese Abbildung zellulär.

Sei jetzt $h^{k-1}: X^{k-1} \times I \rightarrow W$ bereits konstruiert, und sei e_j^k eine k -Zelle von X . Da $h^{k-1}(\cdot, 1) \circ \varphi_j^k$ nach Induktionsvoraussetzung S^{k-1} nach Z abbildet, reicht es ähnlich wie im Beweis des Satzes 4.46 von Whitehead, eine Abbildung $(D^k, S^{k-1}) \rightarrow (W, Z)$ als Abbildung von Paaren zu einer Abbildung $D^k \rightarrow Z$ zu homotopieren, um h^{k-1} auf $e_j^k \times I$ fortzusetzen. Das ist möglich, denn aus der langen exakten Sequenz 3.19 des Paares (W, Z) erhalten wir

$$\cdots \longleftarrow \pi_{k-1}(W) \longleftarrow \pi_{k-1}(Z) \longleftarrow \underbrace{\pi_k(W, Z)}_{=0} \longleftarrow \pi_k(W) \xleftarrow{\cong} \pi_k(Z) \longleftarrow \cdots .$$

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, seien $\ell_0, \ell_1: X \rightarrow Z$ wie oben gegeben. Die zugehörigen Homotopien $h_0, h_1: X \times I \rightarrow W$ liefern eine Homotopie relativ zu A von ℓ_0 und ℓ_1 als Abbildungen

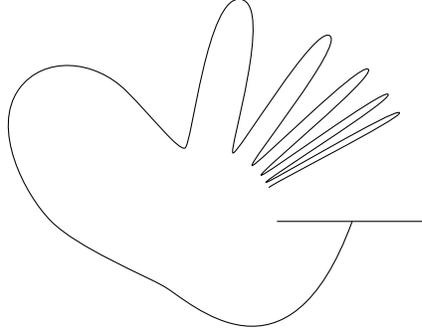


ABBILDUNG 4.1. Das Topologische Huhn

nach W . Mit dem gleichen Trick wie oben können wir diese Homotopie relativ zu $A \times I \cup X \times \{0, 1\}$ Zelle für Zelle zu einer Homotopie zwischen ℓ_0 und ℓ_1 mit Werten in Z deformieren, was noch zu zeigen war. \square

4.52. BEISPIEL. Wir betrachten das *topologische Huhn*

$$Y = \left\{ \left(2 + \sin \frac{2\pi^2}{\varphi} \right) e^{i\varphi} \mid \varphi \in (0, 2\pi] \right\} \cup [1, 3] \subset \mathbb{C},$$

siehe Abbildung 4.1, auch bekannt als *polnischer Kreis*. Die starken Oszillationen machen den Übergang von Punkten mit positivem Argument zur positiven reellen Achse zu einem unüberwindbaren Hindernis für Abbildungen $S^k \rightarrow Y$, somit ist $\pi_k(Y) = 0$ für alle k . Eine CW-Approximation wäre demnach ein einzelner Punkt $X = \{x_0\}$, den wir auf y_0 abbilden. Dass $X \rightarrow Y$ keine Homotopieäquivalenz ist, sehen wir daran, dass es eine nicht-zusammenziehbare Abbildung $Y \rightarrow S^1$ gibt, gegeben durch $z \mapsto \frac{z}{|z|}$. Da alle CW-Approximationen nach Satz 4.51 homotopieäquivalent sind, sagen wir, dass Y nicht den *Homotopietyp eines CW-Komplexes* hat. Wir haben jetzt also auch ein Beispiel von schwach homotopieäquivalenten, aber nicht homotopieäquivalenten Räumen.

In Übung 4.90 können wir jetzt zeigen, dass je zwei schwach homotopieäquivalente CW-Komplexe homotopieäquivalent sind, und dass schwach homotopieäquivalente topologische Räume homotopieäquivalente CW-Approximationen besitzen.

4.53. BEMERKUNG. Die Sätze 4.43, 4.46 und 4.51 zusammen erklären die Rolle der Homotopiegruppen und der CW-Komplexe in der Homotopietheorie.

- (1) Zu jedem topologischen Raum Y gibt es eine CW-Approximation $f_1: X \rightarrow Y$, und zu jedem Morphismus $g: Y \rightarrow W$ und jeder CW-Approximation $f_2: Z \rightarrow W$ gibt es bis auf Homotopie einen entsprechenden Morphismus $\ell: X \rightarrow Z$. Da all dies nur bis auf Homotopie wohldefiniert ist, erhalten wir einen Funktor $\mathcal{H}k\mathcal{W}\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}CW$, der mit schwacher Homotopieäquivalenz verträglich ist.
- (2) Dieser Funktor ist keine Äquivalenz von Kategorien, da die Abbildung $[Y, W] \rightarrow [X, Z]$ im Allgemeinen nicht bijektiv ist, wie wir anhand der Abbildung $Y \rightarrow S^1$ im obigen Beispiel gesehen haben. Im nächsten Abschnitt werden wir den Begriff der Homotopie und der Homotopiekategorie etwas allgemeiner formulieren, um dieses Problem zu lösen.

Letztlich sollte es nicht allzusehr verwundern, dass CW-Komplexe und Homotopiegruppen so gut zusammenarbeiten: sowohl Homotopiegruppen als auch Abbildungen von CW-Komplexen in andere Räume basieren auf dem Verhalten von Abbildungen der Paare (D^k, S^{k-1}) in andere Räume, was wir den vorangegangenen Beweisen auch immer wieder benutzt haben.

Als letztes in diesem Abschnitt wollen wir uns überlegen, welche der Standardkonstruktionen aus CW-Komplexen wieder CW-Komplexe machen.

4.54. PROPOSITION. *Die folgenden Konstruktionen mit CW-Konstruktion liefern in den Kategorien $k\text{Top}$ und $kw\mathcal{H}$ wieder CW-Komplexe:*

- (1) beliebige Koprodukte,
- (2) Pushouts entlang zellulärer Abbildungen von einem Unterkomplex in einen anderen CW-Komplex,
- (3) Kolimiten von Inklusionen von Unterkomplexen,
- (4) Produkte und reduzierte Produkte endlich vieler CW-Komplexe.

In (4) dürfen wir nicht mit dem gewöhnlichen topologischen Produkt arbeiten, siehe Bemerkung 1.90. Die Kategorie CW ist nach Proposition 4.10 kovollständig. Sie ist jedoch nicht bivollständig, da bereits die einfachsten Pullbacks, nämlich Urbilder von Punkten aus Y^0 unter zellulären Abbildungen $X \rightarrow Y$ im Allgemeinen keine CW-Komplexe mehr sind.

BEWEIS. In jedem der Punkte (1)–(4) findet sich eine natürliche CW-Struktur auf dem neu konstruierten Raum. In (1)–(3) liefern die universellen Eigenschaften, dass diese CW-Struktur die gleiche Topologie induziert wie die universelle Konstruktion. Die Details sind Übung 4.92.

Wir führen daher nur den Beweis von (4) vor. Dazu seien X und Y CW-Komplexe mit charakteristischen Abbildungen $(\Phi_j^n: D^n \rightarrow X)_{n,j \in J^n}$ und $(\Psi_k^n: D^n \rightarrow Y)_{n,k \in K^n}$. Es bezeichne $X \times Y$ das $kw\mathcal{H}$ -Produkt beider Räume, und es bezeichne Z den CW-Komplex auf der Trägermenge von $X \times Y$ mit den charakteristischen Abbildungen

$$(\Phi_j^p \times \Psi_k^q: D^n \cong D^p \times D^q \rightarrow Z)_{\substack{p+q=n, \\ j \in J^p, k \in K^q}} .$$

Wir betrachten zunächst die Identität $f = \text{id}: Z \rightarrow X \times Y$. Da alle $\Phi_j^p: D^p \rightarrow X$ und alle $\Psi_k^q: D^q \rightarrow Y$ stetig sind, sind auch alle Abbildungen

$$f \circ (\Phi_j^p \times \Psi_k^q): D^n \longrightarrow X \times Y$$

stetig. Damit ist f selbst nach Definition der schwachen Topologie auf Z ebenfalls stetig.

Fixiere jetzt $k \in K^q$. Für jedes $j \in J^p$ induziert die charakteristische Abbildung $\Phi_j^p \times \Psi_k^q$ von Z eine stetige Abbildung

$$D^p \longrightarrow \text{hom}(D^q, Z) .$$

Nach Definition der schwachen Topologie auf X ist dann auch die Abbildung $X \rightarrow \text{hom}(D^q, Z)$ stetig, und aufgrund des Exponentialgesetzes 4.30 in $kw\mathcal{H}$ auch die Abbildung

$$\text{id}_X \times \Psi_k^q: X \times D^q \longrightarrow Z .$$

Diese Abbildung induziert wiederum eine stetige Abbildung

$$D^q \longrightarrow \text{hom}(X, Z)$$

für alle q und alle $k \in K^q$. Mit der schwachen Topologie auf Y erhalten wir eine stetige Abbildung $Y \rightarrow \text{hom}(X, Z)$. Somit ist die Abbildung $\text{id}: X \times Y \rightarrow Z$ ebenfalls stetig, das heißt, $X \times Y$ und Z sind homöomorph. Hieraus leitet man mit (2) das analoge Resultat für $X \wedge Y$ ab. \square

Für kompliziertere Konstruktionen sind CW-Komplexe leider nicht mächtig genug. Immerhin gilt aber folgendes Resultat, das wir ohne Beweis angeben.

4.55. SATZ (Milnor). *Es seien X, Y homotopieäquivalent zu CW-Komplexen, dann ist auch der Abbildungsraum $C(X, Y)$ homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex.*

4.e. Modellkategorien

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass der Begriff der „schwachen Homotopieäquivalenz“ es uns ermöglicht, anstelle beliebiger topologischer Räume nur CW-Komplexe zu betrachten, die wir weit besser verstehen. Wir haben in Bemerkung 4.53 (2) aber auch gesehen, dass unser Begriff einer naiven Homotopiekategorie $\mathcal{Hkw}\mathcal{H}$ nicht gut zur Methode der CW-Approximation passt. Daher werden wir in diesem Abschnitt einen etwas anderen Begriff einer Homotopiekategorie entwickeln.

Bisher haben wir die Begriffe Faserung, Kofaserung und schwache Äquivalenz recht wahllos benutzt. In diesem Kapitel führen wir den Begriff einer Modellkategorie ein, der all diese Begriffe umfasst. Laut Quillen ist „Modellkategorie“ eine Abkürzung für „Kategorie von Modellen für eine Homotopietheorie“. Die Kategorie der kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räume ohne Basispunkte trägt mehrere solcher Modellstrukturen. Für Retrakte von Abbildungen verweisen wir auf Übung 3.113.

4.56. DEFINITION. Eine *Modellstruktur* $(w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ auf einer Kategorie \mathcal{M} besteht aus drei Unterkategorien, den *Faserungen* $f\mathcal{M}$, den *Kofaserungen* $c\mathcal{M}$, und den *schwachen Äquivalenzen* $w\mathcal{M}$, sowie zwei funktoriellen Faktorisierungen $f = p \circ i = q \circ j$ für alle Morphismen f in \mathcal{M} , so dass die folgenden Axiome gelten.

- (M1) *Retrakte*. Ein Retrakt einer Faserung, Kofaserung oder schwachen Äquivalenz ist wieder vom gleichen Typ.
- (M2) *Zwei-von-drei-Eigenschaft*. Seien $f: Y \rightarrow Z$ und $g: X \rightarrow Y$ Morphismen. Wenn zwei der drei Morphismen f , g und $f \circ g$ schwache Äquivalenzen sind, dann auch der dritte.
- (M3) *Liftungseigenschaft*. Wenn im äußeren kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

der Morphismus i eine Kofaserung, p eine Faserung und i oder p eine schwache Äquivalenz ist, dann existiert eine Abbildung $h: X \rightarrow E$, so dass das gesamte Diagramm kommutiert.

- (M4) *Funktorielle Faktorisierungen*. In den Faktorisierungen $f = p \circ i = q \circ j$ sind i, j Kofaserungen, p, q Faserungen und p und j schwache Äquivalenzen.

Eine *Modellkategorie* $(\mathcal{M}, w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ ist eine bivollständige Kategorie mit einer Modellstruktur.

Die Unterkategorien $c\mathcal{M}$, $f\mathcal{M}$ und $w\mathcal{M}$ sind im Allgemeinen nicht voll. Stattdessen folgt aus den Axiomen, dass sie jeweils alle Objekte enthalten. Wir nennen eine Faserung oder Kofaserung *trivial* oder *azyklisch*, wenn sie außerdem eine schwache Äquivalenz ist.

4.57. BEMERKUNG. Wir beginnen mit einigen einfachen Schlussfolgerungen.

- (1) *Eckmann-Hilton-Dualität*. Wenn man in einer Kategorie mit Modellstruktur alle Pfeile umdreht, erhält man wieder eine Modellstruktur; allerdings tauschen Faserungen und Kofaserungen ihre Rollen. Das bedeutet: wenn ein bestimmter Sachverhalt in allen Modellstrukturen (oder in allen Modellkategorien) gilt, dann gilt die Eckmann-Hilton-duale Aussage ebenfalls in allen Modellstrukturen (Modellkategorien).
- (2) In einer Modellstruktur $(w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ legen $w\mathcal{M}$ und $c\mathcal{M}$ gemeinsam $f\mathcal{M}$ fest, siehe Übung 4.93. Das heißt aber nicht, dass zur jeder Wahl von $w\mathcal{M}$ und $c\mathcal{M}$ bereits eine Modellstruktur existiert.
- (3) Es sei $A \rightarrow X$ eine Kofaserung und $A \rightarrow Y$ beliebig, dann ist der Pushout $Y \rightarrow X \cup_A Y$ wieder eine Kofaserung, siehe Übung 4.94.

Da Modellkategorien bivollständig sind, gibt es immer ein initiales Objekt \emptyset und ein terminales Objekt $*$, siehe Beispiel 4.9(1) und (2). In einer punktierten Kategorie (zum Beispiel \mathcal{Top}_+) stimmen beide überein, wir behalten aber trotzdem die obige Notation bei.

4.58. DEFINITION. Es sei $(\mathcal{M}, w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ eine Modellkategorie mit initialem Objekt \emptyset und terminalem Objekt $*$. Ein Objekt X von \mathcal{M} heißt *fibrant*, wenn $X \rightarrow *$ eine Faserung ist, und *kofibrant*, wenn $\emptyset \rightarrow X$ eine Kofaserung ist. Wir bezeichnen mit \mathcal{M}_{cf} die volle Unterkategorie der Objekte, die sowohl fibrant als auch kofibrant sind.

4.59. BEISPIEL. Es folgen einige Beispiele von Modellstrukturen auf Kategorien topologischer Räume.

- (1) Es sei $\mathcal{T} = \mathcal{Top}$, $k\mathcal{Top}$ oder $kw\mathcal{H}$ eine Kategorie topologischer Räume. Dann besitzt \mathcal{T} eine Modellstruktur, in der $w\mathcal{M}$ gerade die Homotopieäquivalenzen sind. Faserungen sind die Hurewicz-Faserungen aus Definition 3.22 und Kofaserungen die abgeschlossenen Kofaserungen aus Definition 3.55. In dieser Kategorie sind alle Objekte fibrant und kofibrant, es gilt also $\mathcal{Top}_{cf} = \mathcal{Top}$. Wir nennen sie die *Hurewicz-*, die *naive* oder die *Strøm-Modellstruktur*. Wir haben Axiom (M1) in den Übungen 3.113, 3.124 und 4.95 bewiesen, und (M3) in den Übungen 3.128 und 3.129. Axiom (M2) gilt offensichtlich.
- (2) Da schwache Homotopieäquivalenz allein mit Hilfe der Homotopiegruppen definiert ist, ist dieser Begriff unter Umständen hilfreicher als Homotopieäquivalenz im klassischen Sinne. In der sogenannten *Standard-*, *Serre-* oder *Quillen-Modellstruktur* sind die schwachen Äquivalenzen genau die schwachen Homotopieäquivalenzen, die Faserungen sind die Serre-Faserungen aus Definition 3.22, und die Kofaserungen sind Retrakte von relativen Zellkomplexen. *Relative Zellkomplexe* sind etwas allgemeiner als die relativen CW-Komplexe aus Definition 4.37. Hier darf man in jedem Schritt beliebig viele Zellen beliebiger Dimension ankleben, so dass eine Zelle auch an eine Zelle gleicher oder größerer Dimension angeklebt werden kann. Jetzt ist immer noch jedes Objekt fibrant. Kofibrant sind jedoch nur noch Zellkomplexe und ihre Retrakte.
- (3) Die *gemischte* oder *Cole-Modellstruktur* benutzt schwache Homotopieäquivalenzen und Hurewicz-Faserungen. Die passenden Kofaserungen werden durch Bemerkung 4.57 (2) gegeben. Nach wie vor sind alle Objekte fibrant, kofibrant sind nur Räume vom Homotopietyp eines CW-Komplexes.
- (4) Anstatt Homotopiegruppen zur Definition von schwacher Äquivalenz heranzuziehen, könnte man auch die Kategorie der Überlagerungen und die Kohomologie lokal konstanter Garben zur Definition von $w\mathcal{M}$ benutzen. In diesem Fall wäre beispielsweise der polnische Kreis (das „topologische Huhn“) aus Beispiel 4.52 zu S^1 schwach äquivalent. Leider ist mir keine Modellstruktur bekannt, die auf derartigen schwachen Äquivalenzen aufbaut.

In allen Fällen ist (M4) recht aufwändig nachzuprüfen, weshalb wir darauf hier verzichten wollen.

4.60. DEFINITION. Sei $(\mathcal{M}, w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ eine Modellkategorie. Zwei Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ heißen *linkshomotop*, wenn es einen Raum Z (den *Zylinder*) mit Abbildungen $\iota_0, \iota_1: X \rightarrow Z$, eine schwache Äquivalenz $p: Z \rightarrow X$ und eine *Linkshomotopie* $h: Z \rightarrow Y$ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 X \sqcup X & \xrightarrow{(f,g)} & Y \\
 \downarrow (\text{id}_X, \text{id}_X) & \searrow (\iota_0, \iota_1) & \uparrow h \\
 X & \xleftarrow{p} & Z
 \end{array} \tag{1}$$

Sie heißen *rechtshomotop*, wenn es einen Raum P (den *Pfadraum*) mit Abbildungen $\varepsilon_0, \varepsilon_1: P \rightarrow Y$, eine schwache Äquivalenz $u: Y \rightarrow P$ und eine *Rechtshomotopie* $k: X \rightarrow P$ gibt, so dass das

folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 Y \times Y & \xleftarrow{(f,g)} & X \\
 (\text{id}_Y, \text{id}_Y) \uparrow & \swarrow (\varepsilon_0, \varepsilon_1) & \downarrow k \\
 Y & \xrightarrow{u} & P
 \end{array} \tag{2}$$

Der „klassische“ Homotopiebegriff für stetige Abbildungen aus Definition 2.2 entspricht Linkshomotopie mit dem festen Zylinder $X \times I$. Nach dem Exponentialgesetz 1.60 (3) ist das äquivalent zu Rechtshomotopie mit dem Pfadraum Y^I . Die Definition hier ist zum einen allgemeiner, weil sie auch für Modellkategorien funktioniert, die überhaupt nichts mit topologischen Räumen zu tun haben, als auch potentiell gröber, weil man in \mathcal{Top} oder $ku\mathcal{H}$ auch andere Zylinder und Pfadräume benutzen darf und dadurch unter Umständen mehr Homotopien bekommt.

4.61. BEMERKUNG. Diese beiden Begriffe sind zueinander dual und stimmen nicht immer überein. Sie hängen beide von den schwachen Äquivalenzen in \mathcal{M} ab, aber nicht von der Wahl der Faserungen und der Kofaserungen. Wenn X kofibrant ist, ist Linkshomotopie eine Äquivalenzrelation auf $\text{Hom}(X, Y)$, und Linkshomotopie impliziert Rechtshomotopie. Die dazu duale Aussage gilt ebenfalls. Wenn wir uns also auf die volle Unterkategorie \mathcal{M}_{cf} einschränken, stimmen beide Homotopiebegriffe überein und definieren eine Äquivalenzrelation auf den Morphismen-Mengen. Es bezeichne \mathcal{HM}_{cf} eine Kategorie mit den gleichen Objekten wie \mathcal{M}_{cf} und Homotopieklassen von Morphismen.

4.62. DEFINITION. Es sei \mathcal{M} eine Modellkategorie. Eine *Homotopiekategorie* zu \mathcal{M} ist eine Kategorie $\text{Ho}\mathcal{M}$ mit einem Funktor $\text{Ho}: \mathcal{M} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{M}$, der alle schwachen Äquivalenzen auf Isomorphismen abbildet, so dass jeder andere Funktor $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$, der schwache Äquivalenzen auf Isomorphismen abbildet, auf eindeutige Weise über $\text{Ho}\mathcal{M}$ faktorisiert. Für Objekte X, Y von \mathcal{M} definieren wir

$$[X, Y] = \text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{M}}(\text{Ho } X, \text{Ho } Y) .$$

Man kann sich anhand der Diagramme zu Definition 4.60 überzeugen, dass der Funktor Ho links- oder rechtshomotope Abbildungen auf den gleichen Morphismus in $\text{Ho}\mathcal{M}$ abbildet. Er verhält sich also ähnlich wie der Funktor $\mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{HTop}$. Er kann aber auch Abbildungen identifizieren, die auf den ersten Blick nicht homotop sind, siehe Bemerkung 4.53 (2).

In der Sprache von Kategorien ist $\text{Ho}\mathcal{M}$ die *Lokalisierung* von \mathcal{M} an $w\mathcal{M}$. Insbesondere hängt die Homotopiekategorie nicht von der Wahl der Faserungen und Kofaserungen ab. Außerdem ist die Lokalisierung bis auf Äquivalenzen von Kategorien eindeutig, so dass insbesondere $[X, Y]$ wohldefiniert ist. Man kann Lokalisierungen (mit gewissen mengentheoretischen Schwierigkeiten) konstruieren, wobei man die Objekte beibehält und als Morphismen Äquivalenzklassen von „Zickzacks“ der Form

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & C_1 & & \dots & & C_k \\
 & \swarrow \sim & & \searrow & & \swarrow \sim & \\
 A & & & & A_1 & & \\
 & & & & \swarrow \sim & & \\
 & & & & & & A_{k-1} \\
 & & & & & & \swarrow \sim \\
 & & & & & & B
 \end{array}$$

einführt, bei denen alle nach links weisenden Pfeile aus $w\mathcal{M}$ stammen, ähnlich wie in Definition 4.45. Bei Quillen heißen die hier definierten Modellkategorien *abgeschlossen*, das heißt, dass ein Morphismus in \mathcal{M} genau dann eine schwache Äquivalenz ist, wenn er in $\text{Ho}\mathcal{M}$ auf einen Isomorphismus abgebildet wird. Das hat nichts mit dem Begriff „abgeschlossen“ aus Abschnitt 4.c zu tun.

Die Modellstruktur erlaubt eine einfachere Beschreibung der Homotopiekategorie bis auf Äquivalenz. An dieser Stelle kommen auch Faserungen und Kofaserungen ins Spiel.

4.63. SATZ (Fundamental- über Modellkategorien, Quillen). *Es sei \mathcal{M} eine Modellkategorie, dann induziert der Funktor Ho eine Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{HM}_{cf} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{M}$.*

Wir haben in Bemerkung 4.53 gesehen, dass der klassische Abbildungs- und Homotopiebegriff nicht gut zu schwachen Homotopieäquivalenzen passt. Um $[X, Y]$ wie in Definition 4.62 zu bestimmen, kann man also X und Y durch schwach äquivalente, fibrant-kofibrante Objekte ersetzen, bevor man $[X, Y]$ durch Homotopien im Sinne von Definition 4.60 beschreiben kann. In der Tat reicht es sogar, X durch ein kofibrantes und Y durch ein fibrantes Objekt zu ersetzen.

4.64. BEISPIEL. Wir wollen uns dieses Resultat anhand der obigen Modellstrukturen auf $\mathcal{T} = \text{Top}, k\text{Top}$ oder $kw\mathcal{H}$ anschauen. In der Tat bilden topologische Räume eine interessante Beispielskategorie, um das Verhalten verschiedener Modellkategorien zu studieren. Allerdings sind in Beispiel 4.59 stets alle Objekte fibrant. Quillen hat gesehen, dass das nicht in jeder Modellkategorie so sein muss.

- (1) In der Strøm-Modellstruktur sind alle Objekte fibrant und kofibrant. Wenn $f, g: X \rightarrow Y$ im klassischen Sinne von Definition 2.2 homotop sind, können wir $Z = X \times I$ in Definition 4.60 (1) wählen, somit sind f und g linkshomotop. Seien umgekehrt f und g linkshomotop, dann ist $p: Z \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz, und es existiert ein Homotopieinverses $q: X \rightarrow Z$. In der Notation von Definition 4.60 (1) sind dann ι_0, ι_1 und q im klassischen Sinne homotop. Wir erhalten klassische Homotopien

$$f = h \circ \iota_0 \sim h \circ \iota_1 = g .$$

Also stimmt der neue Homotopiebegriff in der Strøm-Modellstruktur mit dem klassischen überein, und es ist $\text{Ho}\mathcal{T} = \mathcal{HT}$ die Homotopiekategorie aus Bemerkung 2.6 (2).

- (2) Wenn wir zu punktierten Räumen übergehen, müssen wir als schwache Äquivalenzen punktierte Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ zulassen, für die eine punktierte Abbildung $g: Y \rightarrow X$ existiert, so dass $g \circ f$ und $f \circ g$ als unpunktete Abbildungen homotop zur Identität sind, siehe Übung 4.97.

Nach wie vor sind alle Objekte fibrant. Kofibrant sind jedoch nur noch die gut punktierten Räume aus Definition 3.55. Die zugehörige Homotopiekategorie hat als Objekte also nur gut punktierte Räume, und hier sind schwache Äquivalenzen wieder genau die punktierten Homotopieäquivalenzen. Somit erhalten wir die korrekte Homotopiekategorie, indem wir uns in unser naiven Homotopiekategorie auf gut punktierte Räume einschränken. Jeden nicht gut punktierten Raum X können wir, wenn nötig, durch den schwach äquivalenten, gut punktierten Raum $X \vee (I, 0)$ mit Basispunkt $1 \in I$ ersetzen.

- (3) In der Quillen-Modellkategorie ist jeder Raum nach Satz 4.51 zu einem CW-Komplex schwach äquivalent. Also reicht es, Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ zwischen CW-Komplexen zu betrachten.

Klassische Homotopie impliziert wieder Homotopie im neuen Sinn. Seien also f, g im Sinne von Definition 4.60 homotop. Wir approximieren das Zylinderobjekt Z durch einen CW-Komplex $k: W \rightarrow Z$ und erhalten mit Satz 4.51 zwei Abbildungen $j_0, j_1: X \rightarrow W$, so dass $k \circ j_i = \iota_i$ für $i = 0, 1$. Außerdem ist $p \circ k$ eine Homotopieäquivalenz nach dem Satz 4.46 von Whitehead. Sei $q: X \rightarrow W$ ein Homotopieinverses, dann folgt im klassischen Sinne $q \sim j_0 \sim j_1$, und wie oben sind auch f und g im klassischen Sinne homotop.

Also ist die Homotopiekategorie zur Quillen-Modellstruktur äquivalent zur naiven Homotopiekategorie \mathcal{HCW} der CW-Komplexe, siehe Bemerkung 4.53 (1). Letztere ist deutlich übersichtlicher als die Kategorie \mathcal{HT}_{cf} aller Retrakte von Zellkomplexen, die uns der Satz von Quillen liefert. Außerdem ist \mathcal{HCW} eine volle Unterkategorie der Kategorie \mathcal{HTop} . Wir erhalten $[X, Y]$, indem wir X durch einen schwach homotopieäquivalenten CW-Komplex ersetzen, bevor wir klassische Homotopien betrachten.

4.f. Faser- und Kofaser-Sequenzen

Ab sofort sei stets \mathcal{T} eine „schöne“ Kategorie topologischer Räume, also beispielsweise $k\mathcal{Top}$ oder $kw\mathcal{H}$. Wir arbeiten ab jetzt wieder überwiegend mit der zugehörigen punktierten Kategorie \mathcal{T}_+ . Außerdem fixieren wir eine Modellstruktur auf \mathcal{T}_+ , beispielsweise die Strøm- oder die Quillen-Modellstruktur aus Beispiel 4.59 (1) beziehungsweise (2). In diesem Sinne verstehen wir schwache Äquivalenzen $w\mathcal{T}_+$, Faserungen $f\mathcal{T}_+$ und Kofaserungen $c\mathcal{T}_+$. Mit $\text{Ho}\mathcal{T}_+$ bezeichnen wir eine zugehörige Homotopiekategorie, also etwa die „naive“ Homotopiekategorie \mathcal{HT}_+ der gut punktierten Räume im ersten und \mathcal{HCW}_+ im zweiten Fall, siehe Beispiel 4.64. Wir verstehen die Notation $[X, Y]$ im Sinne von Definition 4.62, das heißt, wir ersetzen X durch einen schwach äquivalenten kofibranten Raum, bevor wir naive Homotopieklassen betrachten. Die allermeisten Konstruktionen im Folgenden lassen sich komplett in der Sprache der Modellkategorien für beliebige Modellkategorien durchführen. Wir werden aber die meiste Zeit mit konkreten topologischen Methoden arbeiten.

In den Homotopiekategorien $\text{Ho}\mathcal{T}_+$ gibt es keinen natürlichen Begriff exakter Sequenzen. In diesem Abschnitt lernen wir zwei Typen von Sequenzen kennen, die sich ähnlich wie exakte Sequenzen verhalten. Dazu ersetzen wir Abbildungen durch homotopieäquivalente Faserungen beziehungsweise Kofaserungen.

In Definition 3.66 haben wir den reduzierten Kegel $CA = A \wedge (I, 0)$ eines Raumes A und den Homotopiequotienten $X//A = X \cup_A CA$ eines Paares (X, A) kennengelernt. Nach Bemerkung 3.67 (2) und (3) sind (CA, A) und $(X//A, X)$ immer Kofaserungen in der Strøm-Modellstruktur.

4.65. DEFINITION. Es sei $f: Y \rightarrow X$ eine punktierte Abbildung. Dann definieren wir den (*reduzierten*) *Abbildungskegel* durch

$$Cf = CY \cup_f X,$$

wobei f auf der Basis $Y \cong Y \times \{1\} \subset CY$ definiert sei.

Insbesondere ist $X//A$ gerade der Abbildungskegel der Inklusion $A \hookrightarrow X$.

4.66. BEMERKUNG. Der Abbildungskegel hat einige schöne Eigenschaften.

- (1) In Analogie zum Abbildungszyylinder aus Definition 3.57 definieren wir den *reduzierten Abbildungszyylinder* Zf einer punktierten Abbildung $f: Y \rightarrow X$ als Pushout

$$Zf = (Y \wedge I_+) \cup_f X \quad \text{mit} \quad f: Y \times \{1\} \cong Y \rightarrow X.$$

Er enthält $Y \cong Y \times \{0\}$ als Unterraum, und (Zf, Y) ist eine Kofaserung. Außerdem betrachten wir die Abbildung $\bar{f}: Y \times \{0, 1\} \rightarrow X$ mit

$$\bar{f}(y, t) = \begin{cases} * & \text{für } t = 0, \text{ und} \\ f(y) & \text{für } t = 1. \end{cases}$$

Man sieht leicht, dass

$$Cf = CY \cup_f X \cong Zf/Y \cong (Y \wedge I_+) \cup_{\bar{f}} X.$$

- (2) Es sei Z ein weiterer punktierter Raum. Aus der universellen Eigenschaft 1.75 eines Pushouts folgt, dass eine Abbildung $k: Cf \rightarrow Z$ genau einer Abbildung $g: X \rightarrow Z$ und einer punktierten Nullhomotopie h von der konstanten Abbildung $Y \rightarrow \{z_0\} \hookrightarrow Z$ zu $g \circ f$ entspricht.

$$\begin{array}{ccc} Y \wedge I_+ & \xrightarrow{\quad} & Cf & \xrightarrow{\quad} & Z \\ \uparrow & & \uparrow & \nearrow & \\ Y \times \{0, 1\} & \xrightarrow{\bar{f}} & X & & \end{array}$$

h (über $Y \wedge I_+ \rightarrow Z$), k (über $Cf \rightarrow Z$), g (über $X \rightarrow Z$)

- (3) Betrachte die Inklusion $\iota: X \rightarrow Cf$. Wir schreiben $f^* = \cdot \circ f: [X, Z] \rightarrow [Y, Z]$. Mit (2) sieht man, dass die Sequenz

$$[Cf, Z] \xrightarrow{\iota^*} [X, Z] \xrightarrow{f^*} [Y, Z]$$

punktierter Mengen für alle Z bei $[X, Z]$ im Sinne von Definition 3.17 exakt ist.

Mit Hilfe dieser Bemerkung können wir jeder punktierten Abbildung $f: Y \rightarrow X$ eine Sequenz topologischer Räume und für jeden Raum Z eine exakte Sequenz zuordnen. Auf diese Konstruktion kommen wir später in der Kohomologietheorie zurück. Wir erinnern uns an die iterierte Einhängung $S^k X = S^k \wedge X$ aus Definition 3.71 und Bemerkung 3.73 (2). Sei $f: X \rightarrow Y$ stetig, dann schreiben wir im Folgenden $-Sf$ für die Abbildung $(-\text{id}_{S^1}) \wedge f: S^1 X \rightarrow S^1 Y$.

4.67. SATZ (Barratt-Puppe-Sequenz). *Es sei $f: Y \rightarrow X$ eine Abbildung zwischen kofibranten punktierten Räumen. Dann existiert eine natürliche Sequenz*

$$\dots \longleftarrow S^2 Cf \xleftarrow{S^2 \iota} S^2 X \xleftarrow{S^2 f} S^2 Y \xleftarrow{-Sj} SCf \xleftarrow{-S\iota} SX \xleftarrow{-Sf} SY \xleftarrow{j} Cf \xleftarrow{\iota} X \xleftarrow{f} Y \quad (*)$$

in \mathcal{T}_+ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Für je zwei aufeinanderfolgende Abbildungen in der Sequenz existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & Ck & \\ & \swarrow & \\ \ell \downarrow \sim & & \\ W & \longleftarrow & V \longleftarrow^k U, \end{array}$$

bei dem ℓ eine schwache Äquivalenz ist;

- (2) Sei g eine beliebige Abbildung in der Sequenz, dann stimmt die rechts von g abgeschnittene Sequenz in $\text{Ho}\mathcal{T}_+$ gerade mit der entsprechenden Sequenz für g überein;
- (3) Für jeden Raum Z ist die induzierte Sequenz

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow [S^2 Cf, Z] &\xrightarrow{(S^2 \iota)^*} [S^2 X, Z] \xrightarrow{(S^2 f)^*} [S^2 Y, Z] \xrightarrow{(-Sj)^*} [SCf, Z] \xrightarrow{(-S\iota)^*} \\ &\longrightarrow [SX, Z] \xrightarrow{(-Sf)^*} [SY, Z] \xrightarrow{j^*} [Cf, Z] \xrightarrow{\iota^*} [X, Z] \xrightarrow{f^*} [Y, Z] \end{aligned}$$

von Mengen exakt.

Nach Bemerkung 3.75 (1) ist die *Puppe-Sequenz* (3) bis zur Stelle $[SY, Z]$ eine exakte Sequenz von Gruppen, und nach 3.75 (2) sogar eine exakte Sequenz abelscher Gruppen bis zur Stelle $[S^2 Y, Z]$.

Die Minuszeichen vor allen ungeraden Einhängungen in (*) sind nötig, um (2) zu beweisen. Sie spielen eine Rolle in der Theorie sogenannter „triangulierter Kategorien“. Auf die Exaktheit in (3) haben sie keinen Einfluss, und die analoge Sequenz ohne Minuszeichen ist offensichtlich isomorph zu (*), so dass man die Minuszeichen später oft weglässt.

Eine Sequenz (*) mit der Eigenschaft (1) heißt auch *Kofasersequenz*. Man kann zeigen, dass (1) und die Abbildung f die Sequenz (*) bereits bis auf Isomorphie in $\text{Ho}\mathcal{T}_+$ eindeutig festlegen.

Allgemeiner heißt eine Sequenz

$$\dots \longleftarrow X_3 \longleftarrow X_2 \longleftarrow X_1 \longleftarrow X_0$$

mit der Eigenschaft (3) *Homotopie-koexakt*. Diese Eigenschaft ist schwächer als (1) und legt (*) nicht eindeutig fest. Beispielsweise können wir Cf durch einen Raum W ersetzen, der Cf als Retrakt besitzt, und die Sequenz (*) links von X durch die entsprechende Sequenz zur Abbildung $X \rightarrow W$ ersetzen, ohne die Exaktheit von (3) zu zerstören. Die schwache Äquivalenz ℓ in (1) ist ebenfalls nicht eindeutig bestimmt, denn die Gruppe $[SU, W]$ operiert auf der Menge der möglichen Homotopieklassen von Homotopieäquivalenzen.

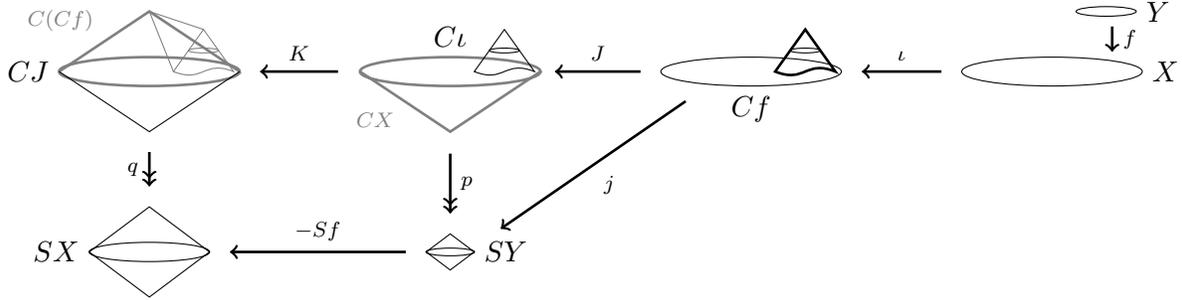


ABBILDUNG 4.2. Zur Kofasersequenz der Abbildung $f: Y \rightarrow X$

BEWEIS. Wir arbeiten hier nur in der Ström-Modellstruktur. In der Quillen-Modellstruktur reicht es, die Abbildung f wie in Satz 4.51 durch eine zelluläre Abbildung zwischen CW-Komplexen zu ersetzen. Dadurch werden alle weiteren Abbildungen in (1) ebenfalls zu zellulären Abbildungen zwischen CW-Komplexen.

Wir konstruieren die Sequenz (*) Schritt für Schritt und beweisen (1) und (2), dann folgt die Exaktheit der Sequenz (3) aus Bemerkung 4.66 (3). Am Anfang der Sequenz (*) ist nichts zu tun.

Wir betrachten zu $\iota: X \rightarrow C_f$ den Abbildungskegel

$$C_\iota = CX \cup_\iota C_f .$$

Da (CY, Y) eine Kofaserung ist, sind (C_f, X) und (C_ι, CX) nach Proposition 3.64 ebenfalls Kofaserungen. Außerdem ist CX zusammenziehbar, also ist die Quotientenabbildung $p: C_\iota \rightarrow C_\iota/CX$ eine Homotopieäquivalenz nach Proposition 3.62. Da CX die „Basis“ des Abbildungskegels C_ι ist, ist C_ι/CX natürlich homöomorph zur Einhängung SY . Wir beweisen (1) an der Stelle C_f , indem wir die Abbildung $j: C_f \rightarrow SY$ definieren wie im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_\iota & \xleftarrow{J} & C_f \xleftarrow{\iota} X \\ p \downarrow \sim & \swarrow j & \\ SY & & \end{array}$$

Im nächsten Schritt sei $J: C_f \rightarrow C_\iota$ die natürliche Inklusion. Wie oben ist $CJ = C(C_f) \cup_J C_\iota$, und $(CJ, C(C_f))$ ist eine Kofaserung. Da die „Basis“ $C(C_f)$ von CJ zusammenziehbar ist, erhalten wir wieder eine Homotopieäquivalenz

$$q: CJ \xrightarrow{\sim} CJ/C(C_f) \cong SX .$$

Das linke Quadrat in Abbildung 4.2 kommutiert bis auf die punktierte Homotopie $h: C_\iota \times I \rightarrow SX$ mit

$$\begin{aligned} h((y, s), t) &= (f(y), 1 - s + st) && \text{für } (y, s) \in CY \subset C_\iota , \\ \text{und } h((x, s), t) &= (x, st) && \text{für } (x, s) \in CX \subset C_\iota , \end{aligned}$$

wobei der Kegelparameter s jeweils an der Spitze den Wert 0 und an der Basis den Wert 1 annimmt. Es folgt $h(\cdot, 0) = (-Sf) \circ p$ und $h(\cdot, 1) = q \circ K$, wobei $K: C_\iota \rightarrow CJ$ wieder die natürliche Inklusion bezeichne. Wir erhalten das kommutative Diagramm in Abbildung 4.2. Damit ist (1) an der Stelle SY ebenfalls gezeigt.

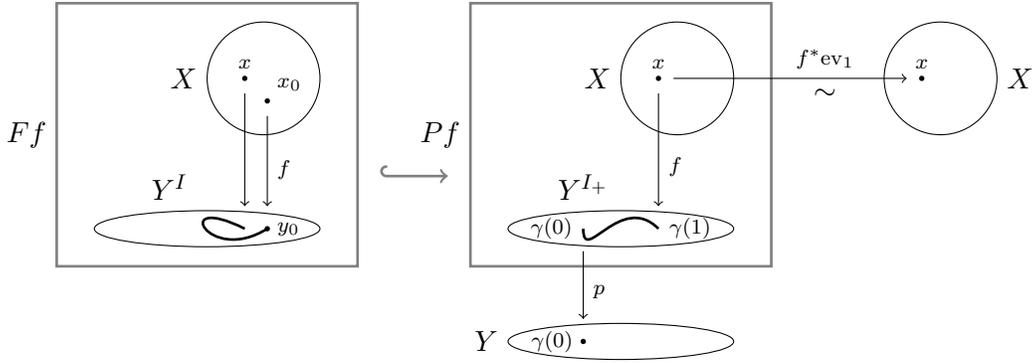


ABBILDUNG 4.3. Die Pfadfaserung einer Abbildung $f: X \rightarrow Y$

Als letztes beweisen wir induktiv (1) und (2), indem wir die Sequenz (*) mit der verschobenen Sequenz zur Abbildung ι vergleichen wie im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longleftarrow & SX & \xleftarrow{-Sf} & SY & \xleftarrow{j} & Cf \xleftarrow{\iota} X \xleftarrow{f} Y \\
 & & \parallel & & \uparrow \sim & & \parallel & & \parallel \\
 \dots & \longleftarrow & SCf & \xleftarrow{-S\iota} & SX & \xleftarrow{q \circ K} & Cl & \xleftarrow{J} & Cf \xleftarrow{\iota} X .
 \end{array}$$

Dies erlaubt uns, die Sequenz (*) Schritt für Schritt nach links fortzusetzen. Die Eigenschaft (1) folgt aus der entsprechenden Eigenschaft für die ι -Sequenz eine Position weiter rechts. \square

4.68. BEISPIEL. Es sei $f: S^3 \rightarrow S^2$ die Hopf-Faserung. Wenn wir an S^2 eine Zelle mit der Verklebeabbildung f ankleben, erhalten wir die komplex projektive Ebene $\mathbb{C}P^2$, siehe Übung 1.130. Insbesondere ist $\mathbb{C}P^2 \cong Cf$, da $D^4 \cong CS^3$. Der Quotient von $\mathbb{C}P^2$ nach dem 2-Gerüst S^2 ist homöomorph zu S^4 . Wir erhalten also eine Kofasersequenz

$$\dots \longleftarrow S^3 \xleftarrow{Sf} S^4 \longleftarrow \mathbb{C}P^2 \longleftarrow S^2 \xleftarrow{f} S^3 .$$

Völlig analog führen wir jetzt Fasersequenzen ein. Dabei lassen wir uns wie in Abschnitt 3.f vom Prinzip der Eckmann-Hilton-Dualität leiten. Wir erinnern uns daran, dass $Y^{I+} = C(I, Y)$ die unpunktieren und Y^I die punktierten Abbildungen von $I = (I, 0)$ nach Y bezeichnet. Diese Räume sind dual zum reduzierten Zylinder $Y \wedge I_+$ beziehungsweise zum reduzierten Kegel CY .

4.69. DEFINITION. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine punktierte Abbildung. Dann definieren wir die *Pfad-Faserung*

$$p: Pf \longrightarrow Y^{I+} \xrightarrow{\text{ev}_0} Y ,$$

indem wir $Pf = \{ (\gamma, x) \in Y^{I+} \times X \mid \gamma(1) = f(x) \} \rightarrow Y^{I+}$ als Pullback

$$\begin{array}{ccc}
 Y^{I+} & \longleftarrow & Pf \\
 \text{ev}_1 \downarrow & & \downarrow f^* \text{ev}_1 \\
 Y & \xleftarrow{f} & X
 \end{array}$$

konstruieren. Die typische Faser der Pfadfaserung ist die *Homotopiefaser*

$$Ff = \{ (\gamma, x) \in Y^{I+} \times X \mid \gamma(0) = y_0 \text{ und } \gamma(1) = f(x) \} = \{ (\gamma, x) \in Y^I \times X \mid \gamma(1) = f(x) \} .$$

4.70. BEMERKUNG. Die Pfadfaserung hat folgende Eigenschaften, siehe auch Abbildung 4.3 und Übung 4.98.

(1) Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \text{ev}_0: Y^{I+} &\longrightarrow Y, & \text{ev}_1: Y^{I+} &\longrightarrow Y, \\ p: Pf &\longrightarrow Y & \text{und} & f^*\text{ev}_1: Pf &\longrightarrow X \end{aligned}$$

sind Hurewicz-Faserungen mit Faser Y^I beziehungsweise Ff , siehe Definition 3.22.

(2) Wenn wir Y mit den konstanten Pfaden in Y^{I+} identifizieren, ist Y ein Deformationsretrakt von Y^{I+} . Dabei können wir ev_0 oder ev_1 als Retraktionsabbildung wählen. Wählen wir entsprechend zu $x \in X$ den konstanten Pfad im Punkt $f(x)$ und benutzen $\iota: X \rightarrow Pf$ mit

$$\iota(x) = (t \mapsto f(x), x)$$

um X mit $\text{im } \iota \subset Pf$ zu identifizieren, so wird X zu einem Deformationsretrakt von Pf .

(3) Es gilt $p \circ \iota = f$, und $f \circ f^*\text{ev}_1$ ist punktiert homotop zu p , somit können wir jede beliebige Abbildung f durch eine Hurewicz-Faserung $p: Pf \rightarrow Y$ mit homotopieäquivalentem Totalraum ersetzen.

(4) Wenn $f: X \rightarrow Y$ bereits eine Hurewicz-Faserung ist, dann ist die Homotopiefaser Ff homotopieäquivalent zur Faser $f^{-1}(y_0)$.

4.71. BEMERKUNG. Dual zu Bemerkung 4.66 hat die Homotopiefaser folgende Eigenschaften.

(1) Die Homotopiefaser Ff lässt sich auf zwei Weisen als Pullback darstellen:

$$\begin{array}{ccc} Y^I & \longleftarrow & Ff \\ \text{ev}_1 \downarrow & & \downarrow q = f^*\text{ev}_1 \\ Y & \xleftarrow{f} & X \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} Pf & \longleftarrow & Ff \\ p \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longleftarrow & \text{pt} . \end{array}$$

(2) Eine Abbildung $k: Z \rightarrow Ff$ entspricht genau einer Abbildung $g: Z \rightarrow X$ und einer punktierten Nullhomotopie h von der konstanten Abbildung $Z \rightarrow \{y_0\} \hookrightarrow Y$ zur Abbildung $f \circ g$.

(3) Wir schreiben $f_* = f \circ \cdot : [Z, X] \rightarrow [Z, Y]$. Aus (2) folgt, dass die Sequenz

$$[Z, Ff] \xrightarrow{q_*} [Z, X] \xrightarrow{f_*} [Z, Y]$$

punktierter Mengen exakt ist.

Der folgende Satz ist Eckmann-Hilton dual zum Satz 4.67 von Barratt-Puppe. Der Beweis ist daher Übung 4.99. Wir überlegen uns aber, dass $\Omega^k X = X^{S^k}$ zu $S^k X = X \wedge S^k$ dual ist.

Da jede Hurewicz-Faserung eine Serre-Faserung ist, sieht diese Sequenz in der Quillen-Modellstruktur genau so aus wie in der Ström-Modellstruktur. Allerdings sollten wir in (3) den Raum Z zunächst durch einen schwach äquivalenten CW-Komplex ersetzen, wenn wir die Menge $[Z, \cdot]$ aus Definition 4.62 durch die Menge naiver Homotopieklassen ersetzen wollen.

4.72. SATZ. Zu jeder Abbildung $f: X \rightarrow Y$ existiert eine natürliche Sequenz

$$\dots \longrightarrow \Omega^2 Ff \xrightarrow{\Omega^2 q} \Omega^2 X \xrightarrow{\Omega^2 f} \Omega^2 Y \xrightarrow{-\Omega r} \Omega Ff \xrightarrow{-\Omega q} \Omega X \xrightarrow{-\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{r} Ff \xrightarrow{q} X \xrightarrow{f} Y \quad (*)$$

punktierter Abbildungen mit folgenden Eigenschaften:

(1) Für je zwei aufeinanderfolgende Abbildungen in der Sequenz existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Ff & & \\ k \downarrow \sim & \searrow q & \\ W & \longrightarrow & V \xrightarrow{f} U, \end{array}$$

bei dem k eine Homotopieäquivalenz ist;

- (2) Sei g eine beliebige Abbildung in der Sequenz, dann stimmt die rechts von g abgeschnittene Sequenz in $\text{Ho}\mathcal{T}_+$ gerade mit der entsprechenden Sequenz für g überein;
 (3) Für jeden gut punktierten Raum Z ist die induzierte Sequenz

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow [Z, \Omega^2 Ff] &\xrightarrow{(\Omega^2 q)_*} [Z, \Omega^2 X] \xrightarrow{(\Omega^2 f)_*} [Z, \Omega^2 Y] \xrightarrow{(-\Omega r)_*} [Z, \Omega Ff] \xrightarrow{(-\Omega q)_*} \\ &\longrightarrow [Z, \Omega X] \xrightarrow{(-\Omega f)_*} [Z, \Omega Y] \xrightarrow{r_*} [Z, Ff] \xrightarrow{q_*} [Z, X] \xrightarrow{f_*} [Z, Y] \end{aligned}$$

von Mengen exakt.

Eine Sequenz mit der Eigenschaft (1) heißt *Fasersequenz*. Die Sequenz (*) wird durch (1) und die Abbildung f bis auf Isomorphie in $\text{Ho}\mathcal{T}_+$ eindeutig festgelegt. Allgemeiner heißt eine Sequenz

$$\dots \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0$$

mit der Eigenschaft (3) *Homotopie-exakt*. Wiederum ist die Sequenz (*) nicht allein durch diese Eigenschaft bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig festgelegt, und k in (1) ist nicht bis auf Homotopie eindeutig bestimmt.

Als Spezialfall der Sequenz (3) mit $Z = S^0$ erhalten wir die lange exakte Sequenz für Serre-Faserungen aus Satz 3.25, wenn wir Ff durch die Faser F und $[S^0, \Omega^k \cdot]$ mit Hilfe des Exponentialgesetzes durch $[S^k, \cdot]$ ersetzen.

4.73. BEISPIEL. Es sei $\iota: S^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ die Inklusion des 2-Gerüsts und $f: S^3 \rightarrow S^2$ die Hopf-Faserung. Da $\pi_3(\mathbb{C}P^\infty) = 0$, lässt sich die Abbildung $\iota \circ f$ auf $D^4 = CS^3$ fortsetzen. Das liefert uns eine Abbildung $g: S^3 \rightarrow F\iota$. Der Schleifenraum $\Omega\mathbb{C}P^\infty$ ist nach Übung 4.100 zu S^1 homotopieäquivalent. Aus der obigen langen exakten Sequenz (3) für $Z = S^k$ und Beispiel 3.33 folgt, dass $g_*: \pi_k(S^3) \rightarrow \pi_k(F\iota)$ ein Isomorphismus ist für alle $k \geq 3$. Für $k = 1, 2$ überlegt man sich, dass $\pi_k(\Omega S^2) \rightarrow \pi_j(\Omega\mathbb{C}P^1) = \pi_j(S^1)$ ein Isomorphismus ist für $j = 0, 1$. Außerdem sind sowohl S^3 als auch $F\iota$ zusammenhängend. Somit ist g eine schwache Homotopieäquivalenz. Da $F\iota$ nach einer etwas allgemeineren Version des Satzes 4.55 von Milnor den Homotopietyp eines CW-Komplexes hat, ist g nach dem Satz 4.46 von Whitehead sogar eine Homotopieäquivalenz. Wir erhalten somit eine Fasersequenz

$$\dots \longrightarrow S^1 \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{f} S^2 \xrightarrow{\iota} \mathbb{C}P^\infty .$$

Auf der rechten Seite können wir die Fasersequenz sogar noch durch die Abbildung $\mathbb{C}P^\infty \rightarrow \mathbb{H}P^\infty$ fortsetzen.

4.g. Übungen zu Kapitel 4

Übungen zu Abschnitt 4.a.

4.74. ÜBUNG. Beweisen Sie die folgenden Aussagen über Kolimiten.

- (1) Der Kolimes $\text{colim}(A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B)$ erfüllt die universelle Eigenschaft des Pushout.
- (2) Jeder Kolimes lässt sich als Pushout von Koproducten schreiben.

4.75. ÜBUNG. Es sei \mathcal{I} die Kategorie mit einem Objekt aus Beispiel 4.5 und $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{k}}$ ein Funktor. Beschreiben Sie \mathcal{F} in Termen der linearen Algebra und geben Sie $\lim \mathcal{F}$ und $\text{colim } \mathcal{F}$ an.

4.76. ÜBUNG. Welche Rechenregeln ergeben sich aus Lemma 4.14 und dem Exponentialgesetz für Mengen aus Beispiel 4.3 (1)

- (1) für disjunkte Vereinigungen und kartesische Produkte, sowie
- (2) für kartesische Produkte und Mengen von Abbildungen?

Übungen zu Abschnitt 4.b. Zur Erinnerung: unter „kompakt“ verstehen wir stets überdeckungs-kompakt und Hausdorffsch, siehe Definition 1.50.

4.77. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Hausdorff-Räume sind schwach Hausdorff, und schwache Hausdorff-Räume erfüllen (T1).
- (2) Sei X schwach Hausdorff, K kompakt und $f: K \rightarrow X$ stetig. Dann ist f kompakt (insbesondere Hausdorff), und f ist *eigentlich*, das heißt, Urbilder kompakter Teilmengen sind kompakt.

4.78. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Die k -offenen Mengen von X bilden eine Topologie \mathcal{O}_{kX} auf X ; diese ist feiner als \mathcal{O}_X . Schreibe $kX = (X, \mathcal{O}_{kX})$, dann ist insbesondere $\text{id}_X: kX \rightarrow X$ stetig.
- (2) Sei K kompakt, dann ist $f: K \rightarrow X$ genau dann stetig, wenn $f: K \rightarrow kX$ stetig ist.
- (3) Es gilt $\mathcal{O}_{k(kX)} = \mathcal{O}_{kX}$, also ist kX kompakt erzeugt.
- (4) Ein Raum X ist genau dann kompakt erzeugt, wenn für jeden Raum Y und jede Abbildung $g: X \rightarrow Y$ von Mengen äquivalent sind:
 - (a) die Abbildung g ist stetig, und
 - (b) für jedes Kompaktum K und jede stetige Abbildung $f: K \rightarrow X$ ist $g \circ f: K \rightarrow Y$ stetig.

4.79. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Der Funktor $k: w\mathcal{H} \rightarrow kw\mathcal{H}$ ist rechtsadjungiert zum Inklusionsfunktor $i: kw\mathcal{H} \rightarrow w\mathcal{H}$, das heißt, für alle $X \in kw\mathcal{H}$, $Y \in w\mathcal{H}$ gibt es eine natürliche Bijektion

$$\text{hom}_{kw\mathcal{H}}(X, kY) = \text{hom}_{w\mathcal{H}}(iX, Y).$$

- (2) Es sei $X \in kw\mathcal{H}$ und $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann hat kA die charakteristische Eigenschaft eines Unterraums in der Kategorie $kw\mathcal{H}$ aus Satz 1.43.
- (3) Es sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Räumen in $kw\mathcal{H}$, dann hat $k \prod_{i \in I} X_i$ die universelle Eigenschaft eines Produkts in der Kategorie $kw\mathcal{H}$ aus Satz 1.46.

4.80. ÜBUNG. Zeigen Sie in Analogie zu Aufgabe 3.126: wenn X ein kompakt erzeugter schwach Hausdorff-Raum und (X, A) eine Kofaserung in der Kategorie $kw\mathcal{H}$ ist, dann ist $A \subset X$ eine k -abgeschlossene Teilmenge.

4.81. ÜBUNG. Es sei $X \in kw\mathcal{H}$, und es sei $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X$ eine aufsteigende Folge von Unterräumen in $kw\mathcal{H}$, so dass $X \cong \text{colim } X_n$. Außerdem sei K kompakt und $f: K \rightarrow X$ stetig.

- (1) Zeigen Sie, dass $f \subset X_n$ für ein hinreichend großes n .
- (2) Folgern Sie für $x_0 \in X_0$, dass $\pi_k(X, x_0) = \text{colim } \pi_k(X_n, x_0)$.

Hinweis. Beweisen Sie zunächst folgende Aussage: es sei $(x_n)_n$ eine Folge in X , so dass $x_n \in X \setminus X_{n-1}$, dann ist $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X$ abgeschlossen.

4.82. ÜBUNG. Es bezeichne $|\cdot|: \mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{Set}$ den vergesslichen Funktor, der einem topologischen Raum die zugrundeliegende Menge zuordnet.

- (1) Geben Sie je einen links- und einen rechtsadjungierten Funktor zu $|\cdot|$ an.
- (2) Gibt es links- und rechtsadjungierte Funktoren zur Einschränkung $|\cdot|: kw\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{Set}$?

Hinweis zu (2). Welche Auswirkungen hat die Existenz der jeweiligen Adjungierten nach Lemma 4.14 auf Pullbacks und Pushouts?

4.83. ÜBUNG. Es bezeichne $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} S^1$ den Quotienten topologischer Räume. Bestimmen Sie den Kolimes der Folge

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \dots$$

zum einen in der Kategorie \mathcal{Top} , zum anderen in der Kategorie $kw\mathcal{H}$.

4.84. ÜBUNG. Wir betrachten den inversen Limes X der Folge

$$S^1 \xleftarrow{\cdot 1} S^1 \xleftarrow{\cdot 2} S^1 \xleftarrow{\cdot 3} S^1 \xleftarrow{\quad} \dots$$

topologischer Räume. Bestimmen Sie eine Abbildung der universellen Überlagerung $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ des ersten Raumes in den Limes X . Ist diese Abbildung eine Einbettung? Ist sie surjektiv?

Übungen zu Abschnitt 4.c.

4.85. ÜBUNG. Konstruieren Sie die natürlichen Transformationen α , λ und ρ aus Definition 4.26, zeigen Sie, dass sie Isomorphismen sind, und beweisen Sie die Axiome (1) und (2)

- (1) entweder für (\mathcal{C}, \times, E) , falls endliche Produkte in \mathcal{C} existieren und E terminal ist,
- (2) oder für (\mathcal{C}, \sqcup, E) , falls endliche Koproducte in \mathcal{C} existieren und E initial ist.

4.86. ÜBUNG. Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ eine abgeschlossene monoidale Kategorie.

- (1) Benutzen Sie die Adjunktion $\cdot \otimes Y \dashv \text{hom}(Y, \cdot)$ und die Funktorialität von \otimes im zweiten Argument, um zu zeigen, dass $\text{hom}(\cdot, Z): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ein kontravarianter Funktor ist.
- (2) Zeigen Sie, dass $\text{hom}(\cdot, \cdot)$ ein *Bifunktor* ist, das heißt, dass für alle $f: Z \rightarrow W$, $g: X \rightarrow Y$ gilt

$$\text{hom}(X, f) \circ \text{hom}(g, Z) = \text{hom}(g, W) \circ \text{hom}(Y, f): \text{hom}(Y, Z) \longrightarrow \text{hom}(X, W).$$

4.87. ÜBUNG. Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ eine abgeschlossene monoidale Kategorie. Beweisen Sie die universellen Eigenschaften des internen hom -Funktors und des Tensorproduktes aus Bemerkung 4.28 mit Hilfe von Bemerkung 4.2. Überlegen Sie sich außerdem, dass die Zuordnungen $f \mapsto g$ in (1) und $g \mapsto f$ in (2) zueinander invers sind.

4.88. ÜBUNG. Beweisen Sie Proposition 4.36, orientieren Sie sich dabei am Beweis von Proposition 3.59.

Übungen zu Abschnitt 4.d.

4.89. ÜBUNG. Beweisen Sie Folgerung 4.41.

4.90. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Schwach homotopieäquivalente CW-Komplexe sind homotopieäquivalent.
- (2) Schwach homotopieäquivalente topologische Räume haben homotopieäquivalente CW-Approximationen.

4.91. ÜBUNG. Geben Sie k -zusammenhängende CW-Modelle für $(\mathbb{C}P^n, *)$ an für alle $k \leq 2n$.
Zusatz: Wie sieht es mit $(\mathbb{H}P^n, *)$ aus?

4.92. ÜBUNG. Präzisieren und beweisen Sie die folgende Aussage:

Pushouts längst zellulären Abbildungen auf Unterkomplexen sowie Kolimiten einer Folge zellulärer Inklusionen von CW-Komplexen liefern wieder CW-Komplexe.

Übungen zu Abschnitt 4.e.

4.93. ÜBUNG. Es sei $(w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ eine Modellstruktur. Zeigen Sie, dass $f\mathcal{M}$ gerade die Menge aller $p: E \rightarrow B$ in \mathcal{M} ist, die für alle trivialen Kofaserungen $i: A \rightarrow X$ die Liftungseigenschaft

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

erfüllen.

Hinweis: Wenn p die Liftungseigenschaft hat, zerlegen Sie $p = q \circ j$ wie in Axiom (M4) und schreiben Sie p als Retrakt von q .

4.94. ÜBUNG. Es sei $A \rightarrow X$ eine Kofaserung und $A \rightarrow Y$ beliebig. Zeigen Sie, dass der Pushout $Y \rightarrow X \cup_A Y$ wieder eine Kofaserung ist.

4.95. ÜBUNG. Es sei $f: A \rightarrow B$ ein Retrakt von $g: X \rightarrow Y$ im Sinne von Übung 3.113 in einer beliebigen Kategorie \mathcal{C} . Zeigen Sie:

- (1) Wenn g ein Isomorphismus ist, dann ist auch f ein Isomorphismus.
- (2) Sei $\mathcal{C} = \mathcal{Top}$. Wenn g eine Homotopieäquivalenz ist, dann auch f .
- (3) Sei $\mathcal{C} = \mathcal{Top}$. Wenn g eine schwache Homotopieäquivalenz ist, dann auch f .

Hinweis: (2) und (3) folgen aus (1) dank Funktorialität.

4.96. ÜBUNG. Es sei \mathcal{C} eine beliebige Kategorie. Zeigen Sie, dass man stets drei „triviale“ Modellstrukturen auf \mathcal{C} erhält, indem man für zwei der drei Kategorien $w\mathcal{C}$, $f\mathcal{C}$ und $c\mathcal{C}$ alle Morphismen zulässt, und für die dritte nur Isomorphismen. Bestimmen Sie die zugehörigen Homotopiekategorien zum einen anhand der Definition 4.62, zum anderen mit dem Satz 4.63 von Quillen.

4.97. ÜBUNG. Es sei $(\mathcal{M}, w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ eine Modellkategorie und A ein Objekt von \mathcal{M} . Die Kategorie $A \downarrow \mathcal{M}$ „unter A “ enthält als Objekte Morphismen der Form $A \rightarrow X$ in \mathcal{M} , und als Morphismen kommutative Diagramme der Form

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ & \swarrow & \searrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

in \mathcal{M} .

- (1) Zeigen Sie, dass $(A \downarrow \mathcal{M}, A \downarrow w\mathcal{M}, A \downarrow c\mathcal{M}, A \downarrow f\mathcal{M})$ wieder eine Modellkategorie bildet.
- (2) Überlegen Sie sich, dass eine Homotopieäquivalenz in $(A \downarrow \mathcal{M})_{cf}$ nicht notwendigerweise eine Homotopieäquivalenz relativ zu A ist.

Hinweis zu (2): Verwenden Sie (ohne Beweis), dass Objekte von $(A \downarrow \mathcal{M})_{cf}$ genau dann schwach äquivalent sind, wenn sie im Sinne von Bemerkung 4.61 homotopieäquivalent sind.

Übungen zu Abschnitt 4.f.

4.98. ÜBUNG. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine beliebige Abbildung. Beweisen Sie zwei der folgenden Aussagen aus Bemerkung 4.70.

- (1) Die Pfadfaserung $Pf \rightarrow Y$ ist eine Hurewicz-Faserung mit Faser Ff .
- (2) Der Unterraum $\text{im}(\iota) \cong X$ ist ein Deformationsretrakt von Pf .
- (3) Die Abbildung $f \circ (f^* \text{ev}_1)$ ist zu $p: Pf \rightarrow Y$ punktiert homotop.
- (4) Wenn f eine Hurewicz-Faserung ist, ist $f^{-1}(y_0)$ zur Homotopiefaser Ff homotopieäquivalent.

4.99. ÜBUNG. Beweisen Sie Eigenschaft (1) für die Sequenz (*) aus Satz 4.72 an einer der Stellen Ff oder ΩY , indem Sie den Beweis von Satz 4.67 mit Eckmann-Hilton-Dualität übertragen.

4.100. ÜBUNG. Es sei $\iota: S^2 \cong \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ die Inklusion. Die Abbildung $S^1 \wedge S^1 \cong S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ induziert eine Abbildung

$$S^1 \longrightarrow \Omega^1(\mathbb{C}P^\infty).$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung eine schwache Homotopieäquivalenz ist. Aus den Sätzen von Milnor und Whitehead folgt, dass sie sogar eine Homotopieäquivalenz ist.

4.101. ÜBUNG. Es sei $\iota: S^2 \cong \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ die Inklusion und $F\iota$ ihre Homotopiefaser. Da $\pi_3(\mathbb{C}P^\infty) = 0$, lässt sich die durch die Hopf-Faserung induzierte Abbildung $g: S^3 \rightarrow S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ auf ganz D^4 fortsetzen.

Konstruieren Sie damit eine Abbildung $S^3 \rightarrow F\iota$. Zeigen Sie mit Hilfe der langen exakten Sequenz 3.25 für Faserungen, dass diese Abbildung eine schwache Homotopieäquivalenz ist.

4.102. ÜBUNG. Setzen Sie die Sequenz aus Beispiel 4.73 nach links fort, indem Sie sich überlegen, dass ΩS^1 zu \mathbb{Z} und $\Omega^k S^1$ für $k \geq 2$ zu einem Punkt homotopieäquivalent ist.

Homologie

Wir haben am Ende von Kapitel 3 gesehen, dass stabile Homotopiegruppen etwas leichter zu handhaben sind als die ursprünglichen Homotopiegruppen. Wir nehmen das als Inspiration für die Eilenberg-Steenrod-Axiome für allgemeine Homologie- und Kohomologiefunktoren. In der Literatur ist gern von Homologietheorien die Rede, aber eigentlich ist das ganze nur Teil einer größeren Theorie, daher verwenden wir den etwas bescheideneren Begriff Funktor.

5.a. Die Eilenberg-Steenrod-Axiome

Wir geben die Eilenberg-Steenrod-Axiome für allgemeine Homologiefunktoren an, leiten einige elementare Schlussfolgerungen ab, und geben ein Beispiel einer solchen Theorie. Weitere Homologiefunktoren konstruieren wir später.

Ab sofort sei wieder \mathcal{T} eine „schöne“ Kategorie topologischer Räume, also beispielsweise $k\mathit{Top}$ oder $kw\mathcal{H}$. An einzelnen Stellen werden wir sogar nur die Kategorie CW der CW-Komplexe und ihrer zellulären Abbildungen betrachten. Wir arbeiten ab jetzt wieder überwiegend mit der zugehörigen punktierten Kategorie \mathcal{T}_+ . Außerdem fixieren wir eine Modellstruktur auf \mathcal{T}_+ , beispielsweise die Ström- oder die Quillen-Modellstruktur aus Beispiel 4.64 (2) beziehungsweise (3). In diesem Sinne verstehen wir schwache Äquivalenzen, Faserungen und Kofaserungen in \mathcal{T}_+ . Anstelle von „kofibrant“ sagen wir aber nach wie vor „gut punktiert“ und erinnern uns daran, dass in beiden Modellstrukturen alle Räume fibrant sind. Mit $\mathit{Ho}\mathcal{T}_+$ bezeichnen wir wieder eine zugehörige Homotopiekategorie, und mit $[X, Y]$ die „Homotopieklassen“ im Sinne von Definition 4.62.

Als Zielkategorie wählen wir im Folgenden der Einfachheit halber stets die Kategorie $\mathcal{C} = \mathit{Mod}_R$ der (Links-) Moduln über einem Ring R . Im Prinzip könnten wir stattdessen eine Kategorie wählen, die viele wichtige Eigenschaften mit den Kategorien Mod_R gemeinsam hat. Ein paar dieser Eigenschaften listen wir gleich auf. Wir könnten also beispielsweise eine sogenannte *Grothendieck-Kategorie* wählen, siehe (7) unten. Nach dem *Satz von Gabriel-Popescu* ist jede Grothendieck-Kategorie \mathcal{C} eine volle Unterkategorie der Kategorie Mod_R mit $R = \mathit{End} G$, das heißt, sie erbt viele Eigenschaften von Mod_R . Allerdings erhalten wir unter Umständen andere Limiten und Kolimiten — dieses Phänomen haben wir in Abschnitt 4.b bereits beim Übergang von Top zu den vollen Unterkategorien $k\mathit{Top}$ und $kw\mathcal{H}$ beobachtet. Insgesamt gibt es kaum Vorteile, allgemeinere Kategorien als Mod_R zu betrachten, daher arbeiten wir lieber direkt in der Kategorie Mod_R . Später werden wir darüber hinaus oft annehmen, dass R kommutativ oder sogar ein Hauptidealring ist. Das liefert uns gleich die wichtigsten Zielkategorien, nämlich

$$\mathit{Mod}_{\mathbb{Z}} = \mathit{Ab} \quad \text{und} \quad \mathit{Mod}_{\mathbb{k}} = \mathit{Vec}_{\mathbb{k}} \quad \text{für einen Körper } \mathbb{k}.$$

Die wichtigsten Körper wiederum werden $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ und $\mathbb{k} = \mathbb{Z}/2$ sein.

5.1. BEMERKUNG. Es sei R ein Ring. Dann hat die Kategorie Mod_R der (Links-) R -Moduln folgende wichtige Eigenschaften.

- (1) *Punktiert*: Es gibt ein Nullobjekt 0 , und daher zwischen je zwei Objekten X, Y einen Nullmorphimus $0: X \rightarrow 0 \rightarrow Y$, siehe Bemerkung 4.29.

- (2) *Additiv*: Zusätzlich zu (1) gibt es endliche Produkte und Koprodukte, und für je zwei Objekte ist die natürliche Abbildung

$$X \sqcup Y \longrightarrow X \times Y$$

ein Isomorphismus. Wir nennen das Koprodukt daher auch *direkte Summe*. Jetzt kann man Morphismen $f, g: X \rightarrow Y$ addieren:

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xleftarrow{\cong} X \oplus X \xrightarrow{f \oplus g} Y \oplus Y \xrightarrow{\text{id} + \text{id}} Y.$$

Diese Addition entspricht genau der elementweisen Addition, also $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \in Y$. Allein aus der kategoriellen Beschreibung folgt, dass $\text{Hom}_R(X, Y)$ eine abelsche Halbgruppe ist, und dass die Verknüpfung von Morphismen bilinear ist. Zusätzlich fordert man noch, dass $\text{Hom}_R(X, Y)$ sogar ein Gruppe ist.

- (3) *Prä-Abelsch*: Zusätzlich zu (1), (2) hat jeder Morphismus $f: X \rightarrow Y$ einen *Kern* $\ker f \hookrightarrow X$ und einen *Kokern* $Y \rightarrow \text{coker } f$. Bisher haben wir sie als Faser und Kofaser bezeichnet:

$$\begin{array}{ccc} \ker f \hookrightarrow X & & \text{coker } f \twoheadrightarrow Y \\ \downarrow \text{id} & & \uparrow \text{id} \\ 0 & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & X \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} \ker f \hookrightarrow X & & \text{coker } f \twoheadrightarrow Y \\ \downarrow \text{id} & & \uparrow \text{id} \\ 0 & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & X \end{array}$$

- (4) *Abelsch*: Zusätzlich zu (1)–(3) ist jedes Unterobjekt *normal*, das heißt, Kern eines Morphismus, und jeder Quotient ist *konormal*, das heißt, Kokern eines Morphismus. Wir verzichten hier auf die kategorielle Beschreibung. Als Folge gilt der *Homomorphiesatz*: Für jeden Morphismus $f: X \rightarrow Y$ gilt

$$\text{im } f = \ker \text{coker } f \cong \text{coker } \ker f = \text{coim } f.$$

Außerdem können wir in abelschen Kategorien über exakte Sequenzen sprechen.

- (5) *Vollständig und Kovollständig*: Alle Limiten und Kolimiten existieren, siehe Abschnitt 4.a. Aus (1)–(4) folgt bereits, dass alle endlichen Limiten und Kolimiten existieren.
- (6) *Exakte gerichtete Kolimiten*: Jede Folge von Abbildungen kurzer exakter Sequenzen hat als Kolimes wieder eine kurze exakte Sequenz, siehe Beweis von Lemma 5.37. Man beachte, dass die analoge Eigenschaft für Limiten im Allgemeinen nicht gilt, siehe Abschnitt 6.b. Hier ist also zum ersten Mal das Dualitätsprinzip verletzt.
- (7) *Grothendieck-Kategorie*: Zusätzlich zu (1)–(6) hat Mod_R einen *Erzeuger*, nämlich R . Dazu betrachten wir den Funktor $|\cdot|: \text{Mod}_R \rightarrow \text{Set}_+$ aus Bemerkung 4.29, der ein Objekt X auf die Menge (nach (2) sogar abelsche Gruppe) $|X| = \text{Hom}_R(R, X)$ abbildet. Dieser Funktor ist *treu*, das heißt, für alle Objekte ist $\text{Hom}_R(X, Y) \rightarrow \text{Abb}(|X|, |Y|)$ injektiv.
- (8) *Abgeschlossen Monoidal*: Wenn R kommutativ ist, ist Mod_R eine abgeschlossene monoidale Kategorie, siehe Abschnitt 4.c.

In der Kategorie Mod_R gelten viele Lemmata der homologischen Algebra, von denen wir bis jetzt nur das Vierer- und Fünfer-Lemma 3.20 kennengelernt haben. Dank (4) lassen sich viele Sätze über exakte Sequenzen durch „Diagrammjagd“ beweisen, und dank (7) dürfen wir dabei mit Elementen (nicht mit Morphismen) arbeiten, siehe etwa Satz 5.6 über die Mayer-Vietoris-Sequenz. Eigenschaft (8) wird wichtig, sobald wir zu sogenannten „multiplikativen“ Theorien übergehen. Später werden wir zusätzlich sogar fordern, dass R ein Hauptidealring ist, siehe etwa Abschnitt 5.e.

5.2. DEFINITION. Es sei R ein Ring. Ein (*allgemeiner*) *reduzierter Homologiefunktor* $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$ mit Werten in Mod_R besteht aus einer Familie von Funktoren

$$\tilde{h}_\bullet = (\tilde{h}_n: \mathcal{T}_+ \rightarrow \text{Mod}_R)_{n \in \mathbb{Z}},$$

und einer Familie natürlicher Transformationen $\partial_\bullet = (\partial_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit $\partial_n(X, A): \tilde{h}_n(X/A) \rightarrow \tilde{h}_{n-1}(A)$ für alle Kofaserungen (X, A) in $c\mathcal{T}_+$, die die folgenden *Eilenberg-Steenrod-Axiome* erfüllen.

- (1) *Homotopieinvarianz.* Für jede schwache Äquivalenz $f: X \rightarrow Y$ ist $\tilde{h}_n f: \tilde{h}_n(X) \rightarrow \tilde{h}_n(Y)$ ein Isomorphismus für alle $n \in \mathbb{Z}$.
- (2) *Homologiesequenz.* Für jede Kofaserung (X, A) mit den natürlichen Abbildungen $\iota: A \rightarrow X$ und $p: X \rightarrow X/A$ ist die folgende Sequenz exakt:

$$\cdots \longleftarrow \tilde{h}_{n-1}(A) \xleftarrow{\partial_n} \tilde{h}_n(X/A) \xleftarrow{\tilde{h}_n p} \tilde{h}_n(X) \xleftarrow{\tilde{h}_n \iota} \tilde{h}_n(A) \longleftarrow \cdots$$

- (3) *Summenaxiom.* Sei $(X_i, x_i)_{i \in I}$ eine Familie von Räumen, dann ist die von den Inklusionsabbildungen $\iota_i: X_i \rightarrow \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i)$ induzierte Abbildung

$$\bigoplus_{i \in I} \tilde{h}_n \iota_i: \bigoplus_{i \in I} \tilde{h}_n(X_i) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_n\left(\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i)\right)$$

ein Isomorphismus.

Man nennt $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$ einen (*gewöhnlichen*) *reduzierten Homologiefunktor* mit *Koeffizienten* $M \in \text{Mod}_R$, wenn zusätzlich das folgende Axiom gilt.

- (4) *Dimensionsaxiom.*

$$\tilde{h}_n(S^0) = \begin{cases} M & \text{für } n = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgrund der Diagramme in Definition 4.60 gilt $h_n f = h_n g$ für alle n , wenn f und $g: X \rightarrow Y$ (rechts- oder links-) homotop sind. Nach Definition 4.62 lässt sich \tilde{h}_n auf der Homotopiekategorie $\text{Ho}\mathcal{T}_+$ definieren. Axiom (2) spricht nur über Kofaserungen. Für beliebige Paare (Y, X) und allgemeiner Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ ersetzt man den Quotienten durch den Homotopiequotienten $X//A$ aus Definition 3.66, beziehungsweise durch den Abbildungskegel aus Definition 4.65. Aufgrund der Homotopieinvarianz von \tilde{h} gilt Axiom (2) in dieser Situation analog.

Wir betrachten die Kategorie der Pfeile in $c\mathcal{T}_+$, das ist die volle Unterkategorie von Pair , die alle Kofaserungen (X, A) enthält. Die Zuordnungen $(X, A) \mapsto \tilde{h}_n(X/A)$ und $(X, A) \mapsto \tilde{h}_{n-1}(A)$ sind zwei Funktoren von dieser Kategorie in die Kategorie Mod_R . Der *Verbindungshomomorphismus* oder die *Randabbildung* ∂_n im Axiom (2) ist eine natürliche Transformation im Sinne von Definition 3.3 zwischen diesen beiden Funktoren. Sei $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine Abbildung zwischen Kofaserungen, dann erhalten wir also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots & \longrightarrow & \tilde{h}_n(A) & \xrightarrow{\tilde{h}_n \iota} & \tilde{h}_n(X) & \xrightarrow{\tilde{h}_n p} & \tilde{h}_n(X/A) & \xrightarrow{\partial_n} & \tilde{h}_{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \tilde{h}_n(f|_A) \downarrow & & \tilde{h}_n f \downarrow & & \tilde{h}_n \bar{f} \downarrow & & \tilde{h}_{n-1}(f|_A) \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & \tilde{h}_n(B) & \xrightarrow{\tilde{h}_n \iota} & \tilde{h}_n(Y) & \xrightarrow{\tilde{h}_n p} & \tilde{h}_n(Y/B) & \xrightarrow{\partial_n} & \tilde{h}_{n-1}(B) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Dabei ergibt sich die Kommutativität der zwei linken Quadrate aus der Natürlichkeit von ι und p (siehe oben) und der Funktorialität von \tilde{h}_n , während die Kommutativität des rechten Quadrats aus der Natürlichkeit von ∂_\bullet folgt. Streng genommen sollten wir in der Sequenz (3) Minuszeichen wie in den Faser- und Kofasersequenzen 4.67 und 4.72 einbauen. Diese ändern jedoch nichts an der Exaktheit und der Natürlichkeit und werden daher meist weggelassen.

Später schreiben wir meistens nur \tilde{h}_\bullet anstelle von $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$. Außerdem kürzen wir gern $\tilde{h}_k f$ durch f_* ab, wenn klar ist, zwischen welchen Homologien f_* abbildet.

In der Literatur gibt es viele Varianten dieser Axiome. Die natürliche lange exakte Sequenz (2) zusammen mit Homotopieinvarianz (1) bilden dabei stets den „harten Kern“. Auf das Summenaxiom (3) können wir wegen Bemerkung 5.7 verzichten, wenn wir nur endliche Koprodukte betrachten

wollen; diese reichen aber nicht für alle Anwendungen aus. Andere Axiome können wir bei Bedarf zusätzlich fordern, zum Beispiel, dass (3) sogar für alle abstrakten Limiten gilt. Die ursprünglichen Axiome von Eilenberg und Steenrod beziehen sich übrigens auf *unreduzierte* Homologie, siehe Bemerkung 5.5 (2) unten.

5.3. LEMMA. *Es sei X schwach zusammenziehbar, das heißt, schwach äquivalent zum Ein-Punkt-Raum pt . Dann gilt $\tilde{h}_k(X) = 0$ für jeden allgemeinen reduzierten Homologiefunktor \tilde{h}_\bullet .*

BEWEIS. Betrachte $(X, A) = (\text{pt}, \text{pt})$ mit den natürlichen Abbildungen $\iota = p = \text{id}_X$. Nach Axiom (2) ist die Sequenz

$$\tilde{h}_n(X/A) \xleftarrow{p_*} \tilde{h}_n(X) \xleftarrow{\iota_*} \tilde{h}_n(A)$$

bei $\tilde{h}_n(X)$ exakt, also folgt

$$\tilde{h}_n(X) = \text{im}(\text{id}) = \ker(\text{id}) = 0 \subset \tilde{h}_n(X) ,$$

das heißt, $\tilde{h}_n(\text{pt}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und für jeden allgemeinen reduzierten Homologiefunktor. \square

Wir kennen bereits einen allgemeinen Homologiefunktor. Dieser wird uns später dabei helfen, weitere Homologiefunktoren zu konstruieren.

5.4. FOLGERUNG (aus Satz 3.80 und den Propositionen 3.77 und 3.82). *Die stabilen Homotopiegruppen bilden einen allgemeinen Homologiefunktor $\pi_\bullet^s: \mathcal{T}_+ \rightarrow \mathcal{A}b$.*

Stabile Homotopiegruppen erfüllen aber nicht das Dimensionsaxiom, denn nach Satz 3.99 gilt $\pi_1^s(S^0) \cong \mathbb{Z}/2 \neq 0$.

5.5. BEMERKUNG. Wir betrachten die Rolle des Basispunktes in der Homologie. Dazu sei X ein Raum mit Basispunktes x_0 . Wegen der Homotopieinvarianz 5.2 (1) dürfen wir X , wenn nötig, durch einen schwach äquivalenten Raum $X \vee (I, 0)$ mit gutem Basispunkt $(I, 1)$ ersetzen.

(1) Es sei $X_+ = X \sqcup \{*\}$ ein Raum mit neuem Basispunkt $*$, dann betrachten wir die punktierten Abbildungen

$$\begin{aligned} \iota: S^0 &\longrightarrow X_+ && \text{mit } S^0 = \{x_0, *\} \subset X_+ , \\ p: X_+ &\longrightarrow X = X_+/S^0 && \text{mit } p(*) = x_0 , \\ r: X_+ &\longrightarrow S^0 && \text{mit } r(x) = x_0 \text{ für alle } x \in X . \end{aligned}$$

Dann ist S^0 ein Retrakt von X_+ , und $S^0 \hookrightarrow X_+$ ist eine Kofaserung. Nach Übung 5.85 zeigt die lange exakte Sequenz

$$\dots \xleftarrow{0} \tilde{h}_n(X) \xleftarrow{p_*} \tilde{h}_n(X_+) \xleftarrow{\iota_*} \tilde{h}_n(S^0) \xleftarrow{0} \dots ,$$

das $\tilde{h}_n(X_+) \cong \tilde{h}_n(X) \oplus \tilde{h}_n(S^0)$, und wir erhalten einen Isomorphismus

$$p_*: \ker(r_*: \tilde{h}_k(X_+) \rightarrow \tilde{h}_k(S^0)) \longrightarrow \tilde{h}_k(X) .$$

Die linke Seite ist funktoriell in X und hängt nicht von der Wahl des Basispunktes in X ab. Sie ist sogar noch wohldefiniert, wenn X überhaupt keinen guten Basispunkt besitzt. Allerdings hängt der Isomorphismus p_* selbst von der Wahl von x_0 ab, siehe Übung 5.86.

(2) Zu jedem allgemeinen reduzierten Homologiefunktor \tilde{h}_\bullet definieren wir einen allgemeinen *unreduzierten* Homologiefunktor h_\bullet auf \mathcal{T} durch

$$h_k(X) = \tilde{h}_k(X_+) .$$

Für Paare (X, U) definiert man einen *relativen Homologiefunktor* h_\bullet durch

$$h_k(X, U) = \tilde{h}_k(X//U) ,$$

siehe Übung 5.98 für CW-Komplexe. Die Eilenberg-Steenrod-Axiome [ES, Section I.3] fordern anstelle von Axiom 5.2 (2) eine lange exakte Sequenz

$$\dots \longleftarrow h_{n-1}(U) \xleftarrow{\partial_n} h_n(X, U) \longleftarrow h_n(X) \longleftarrow h_n(U) \longleftarrow \dots$$

für alle Paare (X, U) , nicht nur für Kofaserungen. Außerdem benötigt man ein Ausschneidungsaxiom, siehe Satz 7.47. Diese Forderungen sind dann zu 5.2 (2) äquivalent.

- (3) Mit Hilfe der Sequenz aus (1) können wir $\tilde{h}_n(X)$ aus der unreduzierten Homologie rekonstruieren:

$$0 \longleftarrow \tilde{h}_n(X) \longleftarrow h_n(X) \xleftarrow{\iota_*} h_n(\text{pt}) \longleftarrow 0 \quad (*)$$

Sei $X \neq \emptyset$, und $q: X \rightarrow \text{pt}$ bezeichne die konstante Abbildung, dann erhalten wir

$$\tilde{h}_n(X) = \ker(q_*: h_n(X) \rightarrow h_n(\text{pt})) .$$

Für $X = \emptyset$ ist die Abbildung q nicht mehr definiert, und es gilt $\tilde{h}_n(X) = 0$. In diesem liefert die obige lange exakte Sequenz

$$\tilde{h}_{n-1}(\emptyset) \cong h_n(\text{pt}) = \tilde{h}_n(S^0) .$$

Dies passt zur Homologiesequenz 5.2 (2), da wir $X_+ = X/\emptyset$ definiert hatten. Also können wir reduzierte Homologie sogar auf ganz \mathcal{T} definieren.

- (4) Wir erhalten wegen Satz 3.95, Folgerung 5.4 und (2) als Beispiel eines allgemeinen unreduzierten Homologiefunktors den gerahmten Bordismus

$$\Omega_{\bullet}^{\text{fr}}(X) = \pi_{\bullet}^s(X_+) .$$

In Zukunft meinen wir immer reduzierte Homologiefunktoren, solange wir nicht anderes sagen. Als nächstes wollen wir einige möglichst allgemeine Sätze über Homologiefunktoren aus den Axiomen herleiten.

5.6. SATZ (Mayer-Vietoris-Sequenz). *Es sei $X = A \cup B$, so dass $(A, A \cap B)$ und $(B, A \cap B)$ Kofaserungen sind, und es sei \tilde{h} ein allgemeiner Homologiefunktor. Bezeichne die natürlichen Inklusionen mit*

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \xrightarrow{a} & A \\ \downarrow b & & \downarrow i \\ B & \xrightarrow{j} & X \end{array} .$$

Dann existiert ein natürlicher Verbindungshomomorphismus $\partial: \tilde{h}_n(X) \rightarrow \tilde{h}_{n-1}(A \cap B)$, so dass die Sequenz

$$\dots \longleftarrow \tilde{h}_{n-1}(A \cap B) \xleftarrow{\partial} \tilde{h}_n(X) \xleftarrow{i_* + j_*} \tilde{h}_n(A) \oplus \tilde{h}_n(B) \xleftarrow{(a_*, -b_*)} \tilde{h}_n(A \cap B) \longleftarrow \dots$$

exakt ist.

BEWEIS. Wir wissen aus Folgerung 3.65, dass (X, A) und (X, B) unter den obigen Voraussetzungen ebenfalls Kofaserungen sind. Außerdem gilt $X/A \cong B/(A \cap B)$ und $X/B \cong A/(A \cap B)$. Wir fassen die \tilde{h} -Sequenzen für die Paare (X, A) , (X, B) , $(A, A \cap B)$ und $(B, A \cap B)$ im folgenden

Diagramm zusammen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \xleftarrow{r_*} & & \xleftarrow{\partial} & & \xleftarrow{s_*} & & \xleftarrow{-\partial} & & \\
 \tilde{h}_{n-1}(X/B) & & & \tilde{h}_{n-1}(A) & & \tilde{h}_n(X/A) & & \tilde{h}_n(B) & & \tilde{h}_{n+1}(X/B) & \\
 \swarrow q_* & & \searrow i_* & \swarrow a_* & \searrow \partial & \swarrow p_* & \searrow j_* & \swarrow b_* & \searrow -\partial & & \\
 & \tilde{h}_{n-1}(X) & & \tilde{h}_{n-1}(A \cap B) & & \tilde{h}_n(X) & & \tilde{h}_n(A \cap B) & & & \\
 \swarrow p_* & & \searrow j_* & \swarrow b_* & \searrow -\partial & \swarrow q_* & \searrow i_* & \swarrow a_* & \searrow \partial & & \\
 \tilde{h}_{n-1}(X/A) & & \tilde{h}_{n-1}(B) & & \tilde{h}_n(X/B) & & \tilde{h}_n(A) & & \tilde{h}_{n+1}(X/A) & & \\
 & & \xleftarrow{s_*} & & \xleftarrow{-\partial} & & \xleftarrow{r_*} & & \xleftarrow{\partial} & &
 \end{array}$$

Die linke und die rechte Raute kommutieren, weil \tilde{h}_\bullet ein Funktor ist. Die „runden Dreiecke“ kommutieren wegen der Natürlichkeit der langen exakten Sequenz (2), angewandt auf die Paarabbildung $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ beziehungsweise $(A, A \cap B) \hookrightarrow (X, B)$, und weil $X/A \cong B/(A \cap B)$ beziehungsweise $X/B \cong A/(A \cap B)$. Die Kommutativität der mittleren Raute können wir erst später in Bemerkung 5.8 zeigen; sie wird im Folgenden auch nicht benutzt.

Als Verbindungshomomorphismus wählen wir $\partial \circ p_* = -\partial \circ q_*$. Da ∂ natürlich ist, ist dieser Verbindungshomomorphismus ebenfalls natürlich, hängt allerdings von der Reihenfolge der Mengen A und B ab. Um zu zeigen, dass die Sequenz exakt ist, veranstalten wir eine Diagrammjagd zwischen den (oben schwarz gezeichneten) exakten Sequenzen der Paare (X, A) und $(B, A \cap B)$.

Beispielsweise folgt die Exaktheit bei $\tilde{h}_n(A) \oplus \tilde{h}_n(B)$ aus folgendem Argument. Sei zunächst $\gamma \in \tilde{h}_n(A \cap B)$. Aus der Kommutativität der rechten Raute folgt

$$((i_* + j_*) \circ (a_*, -b_*))(\gamma) = (i_* \circ a_*)(\gamma) - (j_* \circ b_*)(\gamma) = 0.$$

Seien jetzt $\alpha \in \tilde{h}_n(A)$ und $\beta \in \tilde{h}_n(B)$ gegeben, so dass $i_*\alpha + j_*\beta = 0$. Dann liegt $\xi = -j_*\beta = i_*\alpha$ im Bild von i_* , also im Kern von p_* . Es folgt $s_*\beta = -p_*\xi = 0$, also existiert ein Element $\gamma' \in \tilde{h}_n(A \cap B)$ mit $-b_*\gamma' = \beta$. Da $(i_* \circ a_*)\gamma' = (j_* \circ b_*)\gamma' = \xi = i_*\alpha$, also $i_*(\alpha - a_*\gamma') = 0$, existiert ein $\delta \in \tilde{h}_{n+1}(X/A)$ mit $\partial\delta = \alpha - a_*\gamma' \in \tilde{h}_n(A)$. Dann ist $\gamma = \gamma' + \partial\delta \in \tilde{h}_n(A \cap B)$ das gesuchte Urbild von (α, β) .

Die Exaktheit an den anderen Stellen ist Inhalt der Übung 5.87. \square

5.7. BEMERKUNG. Mit Hilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz sehen wir, dass das Summenaxiom (3) für endliche Summen bereits aus den Axiomen (1) und (2) folgt, denn mehr haben wir im obigen Beweis nicht gebraucht. Sei dazu $X = Y \vee Z$ mit Basispunkt in $Y \cap Z = \text{pt}$, dann erhalten wir mit Lemma 5.3, dass

$$\dots \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_{n-1}(\text{pt})}_{=0} \longleftarrow \tilde{h}_n(X) \xleftarrow{i_*+j_*} \tilde{h}_n(Y) \oplus \tilde{h}_n(Z) \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_n(\text{pt})}_{=0} \longleftarrow \dots$$

5.8. BEMERKUNG. Aufgrund der Symmetrie des Diagramms im Beweis von Satz 5.6 erhalten wir analog zur Mayer-Vietoris-Sequenz eine zweite Sequenz

$$\dots \longleftarrow \tilde{h}_{n-1}(X) \xleftarrow{\partial} \tilde{h}_n(A \cap B) \xleftarrow{-\partial} \tilde{h}_n(X/A) \oplus \tilde{h}_n(X/B) \xleftarrow{(p_*, -q_*)} \tilde{h}_n(X) \longleftarrow \dots$$

Nun kann man sich überzeugen, dass $X/(A \cap B) \cong (X/A) \vee (X/B)$, indem man $X/(A \cap B)$ als Pushout von $A/(A \cap B)$ längs $\text{pt} \rightarrow B/(A \cap B)$ schreibt. Dann entspricht die obige Sequenz nach Bemerkung 5.7 gerade der exakten Sequenz des Paares $(X, A \cap B)$. Aus ihrer Exaktheit schließen wir, dass auch die mittlere Raute im obigen Diagramm kommutiert.

5.9. BEMERKUNG. Nach Folgerung 5.4 bilden die stabilen Homotopiegruppen π_\bullet^s einen Homologiefunktor, somit ist die Mayer-Vietoris-Sequenz für π_\bullet^s exakt. Wenn ähnliche Zusammenhangsvoraussetzungen für die Paare $(A, A \cap B)$ und $(B, A \cap B)$ wie in Folgerung 3.65 gelten, existiert eine ähnliche endliche exakte Sequenz für die „instabilen“ Homotopiegruppen π_\bullet . Wir überlassen Konstruktion und Beweis dem Leser als Übung 5.88. Allerdings muss man für π_1 aufpassen, da der Satz 2.42 von Seifert-van Kampen sich nur dann gut in die lange exakte Sequenz einfügt, wenn mindestens eine der Gruppen $\pi_1(A)$, $\pi_1(B)$ oder $\pi_1(A \cap B)$ verschwindet.

5.10. SATZ. *Es sei \tilde{h}_\bullet ein allgemeiner reduzierter Homologiefunktor und $k, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq 1$. Dann existiert für jeden gut punktierten Raum X ein natürlicher Isomorphismus*

$$\tilde{h}_k(S^n X) \cong \tilde{h}_{k-n}(X). \quad (1)$$

Falls \tilde{h}_\bullet ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten M in Mod_R ist, gilt insbesondere

$$\tilde{h}_k(S^n) \cong \begin{cases} M & \text{falls } k = n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2)$$

Aussage (1) liefert für $\tilde{h}_\bullet = \pi_\bullet^s$ eine offensichtliche Folgerung aus dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.74.

Jetzt wird auch der Name „Dimensionsaxiom“ klar: ein reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten $M \neq 0$ „sieht“ die Dimension der Sphären S^n . Daher lassen sich manche der Anwendungen des Satzes 3.42 von Brouwer-Hopf aus (2) folgern, beispielsweise der Fixpunktsatz 3.44 von Brouwer und der Satz 3.51 von der Invarianz der Dimension. Für den Satz 3.48 vom Igel benötigen wir zusätzlich den Abbildungsgrad, siehe Satz 5.11 unten.

BEWEIS. Diesen Beweis können wir entweder analog zum Satz 3.42 oder mit Hilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz führen. Wir entscheiden uns für Letzteres. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Für $n \geq 1$ zerlegen wir $S^n X$ in zwei reduzierte Kegel $C_\pm^n X \cong (I, 0) \wedge \cdots \wedge (I, 0) \wedge X \cong D^n \wedge X$ mit Basispunkt auf dem Durchschnitt $S^{n-1} X = C_+^n X \cap C_-^n X$. Da $(C_\pm^n X, S^{n-1} X)$ Kofaserungen sind und $C_\pm^n X$ zusammenziehbar, erhalten wir mit Lemma 5.3 und Satz 5.6 die exakte Sequenz

$$\cdots \leftarrow \underbrace{\tilde{h}_{k-1}(C_+^n X) \oplus \tilde{h}_{k-1}(C_-^n X)}_{=0} \leftarrow \tilde{h}_{k-1}(S^{n-1} X) \xleftarrow{\partial} \tilde{h}_k(S^n X) \leftarrow \underbrace{\tilde{h}_k(C_+^n X) \oplus \tilde{h}_k(C_-^n X)}_{=0} \leftarrow \cdots$$

Wir erhalten induktiv den gesuchten Isomorphismus

$$\tilde{h}_k(S^n X) \cong \tilde{h}_{k-1}(S^{n-1} X) \cong \tilde{h}_{k-n}(X).$$

Wenn \tilde{h}_\bullet ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten M in Mod_R ist, folgt die zweite Behauptung aus der ersten und dem Dimensionsaxiom 5.2 (4). \square

Wir betrachten jetzt stetige Abbildungen $f: S^n \rightarrow S^n$. Nach dem Satz 3.42 von Brouwer-Hopf und Übung 3.116 ist für alle $n \geq 1$ der Abbildungsgrad aus Definition 3.45 ein Ringisomorphismus $\text{deg}: \pi_n(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$. Wegen Homotopieinvarianz hängt $f_*: \tilde{h}_k(S^n) \rightarrow \tilde{h}_k(S^n)$ nur vom Abbildungsgrad $\text{deg } f$ ab. Für spätere Anwendungen ist die Charakterisierung des Abbildungsgrades für differenzierbare f aus Folgerung 3.89 hilfreich, bei der es reicht, die Urbilder eines regulären Wertes von f mit dem durch die jeweilige Orientierung von df gegebenen Vorzeichen zu zählen.

Da Mod_R additiv ist, ist $\text{Hom}_R(\tilde{h}(S^n), \tilde{h}(S^n))$ eine abelsche Gruppe, oder äquivalent ein \mathbb{Z} -Modul. Wir können also Elemente von $\text{Hom}_R(\tilde{h}(S^n), \tilde{h}(S^n))$ mit ganzen Zahlen multiplizieren.

5.11. SATZ. *Sei \tilde{h}_\bullet ein Homologiefunktor, und $k \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N}$ und $f: S^m \rightarrow S^n$ seien stetig.*

(1) *Falls $m < n$, gilt $f_* = 0: \tilde{h}_k(S^m) \rightarrow \tilde{h}_k(S^n)$.*

- (2) Falls $m = n$, gilt $f_* = \deg f: \tilde{h}_k(S^n) \rightarrow \tilde{h}_k(S^n)$.
(3) Falls $m > n$ und falls \tilde{h}_\bullet das Dimensionsaxiom (4) erfüllt, gilt $f_* = 0: \tilde{h}_k(S^m) \rightarrow \tilde{h}_k(S^n)$.

Insbesondere liefert dieser Satz eine weitere Charakterisierung des Abbildungsgrades. Allerdings können wir den Abbildungsgrad nur dann mit Hilfe von \tilde{h}_\bullet bestimmen, wenn \mathbb{Z} treu auf $\tilde{h}_\bullet(S^0)$ wirkt. Das ist beispielsweise nicht der Fall, wenn \tilde{h}_\bullet ein gewöhnlicher Homologiefunktor mit Koeffizienten \mathbb{Z}/n ist für ein $n \neq 0$.

BEWEIS. Nach Satz 3.42 (1) ist f homotop zur konstanten Abbildung, falls $m < n$. In diesem Fall faktorisiert f_* über $\tilde{h}_k(\text{pt}) = 0$, und es folgt Behauptung (1).

Falls \tilde{h}_\bullet das Dimensionsaxiom erfüllt und $m \neq n$, gilt $\tilde{h}_k(S^m) = 0$ oder $\tilde{h}_k(S^n) = 0$, und es folgt (3).

Zu (2) reicht es, zu zeigen, dass $\tilde{h}: \pi_n(S^n) \rightarrow \text{End}_R(\tilde{h}_k(S^n))$ mit $f \mapsto f_*$ ein Homomorphismus abelscher Gruppen ist. Denn $\deg \text{id}_{S^n} = 1$, und wegen Folgerung 3.46 und Funktorialität folgt

$$f_* = (\deg f \cdot \text{id}_{S^n})_* = \deg f \cdot (\text{id}_{S^n})_* = \deg f .$$

Es sei $S^{n-1} \subset S^n$ ein Äquator, der den Basispunkt erhält. Wir betrachten die Quotientenabbildung $d: S^n \rightarrow S^n/S^{n-1} \cong S^n \vee S^n$. Seien $f, g: S^n \rightarrow S^n$ gegeben, dann können wir die Summe $[f] + [g] \in \pi_n(S^n)$ nach Definition 3.1 darstellen durch die zusammengesetzte Abbildung

$$S^n \xrightarrow{d} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} S^n .$$

Wir wenden den Homologiefunktor \tilde{h}_n an und erhalten

$$\tilde{h}_n(S^n) \xrightarrow{d_*} \tilde{h}_n(S^n) \oplus \tilde{h}_n(S^n) \xrightarrow{f_* \oplus g_*} \tilde{h}_n(S^n) . \quad (*)$$

Um die Abbildung d_* besser zu verstehen, betrachten wir zunächst $f = \text{id}_{S^n}$, $g = 0$. Dann ist $(f \vee g) \circ d$ homotop zur Identität, und wir erhalten

$$(\text{id}_{\tilde{h}_n(S^n)} \oplus 0) \circ d_* = \text{id}_{\tilde{h}_n(S^n)} .$$

Indem wir die Rollen von f und g vertauschen, sehen wir insgesamt, dass $d_* = \Delta$ die Diagonalabbildung in die direkte Summe ist.

Wir vergleichen jetzt das Diagramm (*) mit der Addition von Morphismen in Mod_R nach Bemerkung 5.1 (3) und erhalten wie gewünscht

$$((f \vee g) \circ d)_* = (f_* \oplus g_*) \circ \Delta = f_* + g_* \in \text{Hom}_R(\tilde{h}_n(S^m), \tilde{h}_n(S^n)) . \quad \square$$

5.12. BEMERKUNG. Aussage (3) gilt nicht für allgemeine Homologiefunktoren. Dazu betrachten wir wieder π_\bullet^s . Es sei $f: S^3 \rightarrow S^2$ die Hopf-Faserung. Aus Satz 3.99 wissen wir, dass $0 \neq [f] \in \pi_3^s(S^2) = \pi_1^s(S^0)$. Außerdem sei $1 = [\text{id}_{S^3}] \in \pi_0^s(S^0)$. Es folgt

$$f_*(1) = f_*[\text{id}_{S^3}] = [f \circ \text{id}_{S^3}] = [f] \neq 0 \in \pi_3^s(S^2) .$$

5.b. Zelluläre Homologie

Wir zeigen, dass sich die (gewöhnliche) Homologie \tilde{h}_\bullet von CW-Komplexen allein aus den Koeffizienten $\tilde{h}_\bullet(S^0)$ und gewissen Daten der CW-Struktur berechnen lässt. Dieses Ergebnis ist aus mehreren Gründen interessant:

- Es zeigt, dass die Eilenberg-Steenrod-Axiome gewöhnliche Homologiefunktoren auf der Unterkategorie der CW-Komplexe bereits vollständig festlegen, in der Quillen-Modellstruktur also auf ganz \mathcal{T}_+ ;
- Es zeigt auch, dass gewöhnliche Homologiefunktoren mit beliebigen Koeffizienten in Mod_R stets existieren;

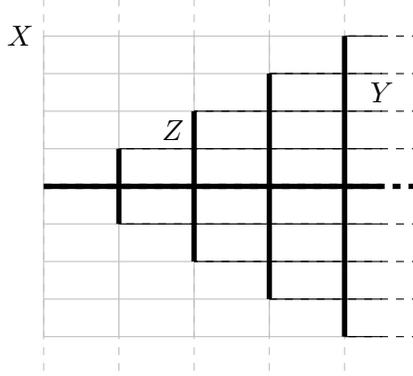


ABBILDUNG 5.1. Das Teleskop einer Folge von CW-Komplexen

- Für einfach konstruierte Räume erhalten wir sehr effizientes Verfahren zur Bestimmung der Homologiegruppen.

Wir beginnen mit einigen Vorüberlegungen.

5.13. PROPOSITION. *Es sei \tilde{h}_\bullet ein Homologiefunktor, der das Summenaxiom 5.2 (3) erfüllt, und es sei X ein CW-Komplex mit einer aufsteigenden Folge $X_0 \subset X_1 \subset \dots$ von Unterkomplexen, so dass $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$. Für alle k gilt dann*

$$\tilde{h}_k(X) = \operatorname{colim} \tilde{h}_k(X_i) .$$

BEWEIS. Anstelle von X betrachten wir den CW-Komplex

$$Y = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} ([i, i+1]_+ \wedge X_i) \subset [0, \infty)_+ \wedge X ,$$

siehe Abbildung 5.1. Somit ist Y die Vereinigung der Abbildungszylinder der Inklusionen $\iota_i: X_i \rightarrow X_{i+1}$. Die Projektion $[0, \infty)_+ \wedge X \rightarrow X$ induziert eine Abbildung $r: Y \rightarrow X$. Analog definieren wir

$$r_n: Y_n = \bigcup_{i \leq n} ([i, i+1]_+ \wedge X_i) \longrightarrow X_n .$$

Dann ist r_n eine Deformationsretraktion, insbesondere eine schwache Äquivalenz.

Als nächstes zeigen wir, dass r eine schwache Homotopieäquivalenz ist. Jede stetige Abbildung $S^k \rightarrow X$ trifft nach Proposition 4.38 nur endlich viele Zellen, und faktorisiert daher über eine der Inklusionen $X_i \rightarrow X$. Das gleiche gilt für Homotopien zwischen solchen Abbildungen. Analog faktorisieren Abbildungen $S^k \rightarrow Y$ und Homotopien zwischen ihnen über eine der Inklusionen $Y_i \rightarrow Y$. Da X_i und Y_i homotopieäquivalent sind, induziert r einen Isomorphismus

$$\pi_k(Y) = \operatorname{colim} \pi_k(Y_i) \xrightarrow{r_*} \operatorname{colim} \pi_k(X_i) = \pi_k(X) .$$

Nach dem Satz 4.46 von Whitehead ist r sogar eine Homotopieäquivalenz. Also reicht es, $\tilde{h}_\bullet(Y)$ zu bestimmen.

Wir schreiben Y als Vereinigung zweier Unterkomplexe

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} ([2i, 2i+1]_+ \wedge X_{2i}) \quad \text{und} \quad B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} ([2i+1, 2i+2]_+ \wedge X_{2i+1}) \subset Y .$$

Dann erhalten wir Homotopieäquivalenzen

$$A \simeq \bigvee_{i \in \mathbb{N}} X_{2i} , \quad B \simeq \bigvee_{i \in \mathbb{N}} X_{2i+1} , \quad \text{und} \quad A \cap B \simeq \bigvee_{i \in \mathbb{N}} X_i .$$

Da es sich um Unterkomplexe handelt, sind $(A, A \cap B)$ und $(B, A \cap B)$ Kofaserungen, und wir betrachten die Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longleftarrow & \tilde{h}_k(Y) & \longleftarrow & \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \tilde{h}_k(X_{2i}) \oplus \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \tilde{h}_k(X_{2i+1}) & \xleftarrow{\varphi} & \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \tilde{h}_k(X_i) & \longleftarrow & \cdots \\ & & \parallel & & \parallel & & \cong \downarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i \text{id}_{\tilde{h}_k(X_i)} & & \\ \cdots & \longleftarrow & \tilde{h}_k(Y) & \longleftarrow & \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \tilde{h}_k(X_i) & \xleftarrow{\psi} & \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \tilde{h}_k(X_i) & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

Der Pfeil φ wird nach Satz 5.6 für alle i gegeben durch

$$\varphi|_{\tilde{h}_k(X_{2i})} = \text{id}_{\tilde{h}_k(X_{2i})} - \iota_{2i*} \quad \text{und} \quad \varphi|_{\tilde{h}_k(X_{2i+1})} = \iota_{(2i+1)*} - \text{id}_{\tilde{h}_k(X_{2i+1})},$$

also erhalten wir

$$\psi = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} (\text{id}_{\tilde{h}_k(X_i)} - \iota_{i*}).$$

Sei $\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i \in \ker \psi$, dann können wir induktiv $\alpha_i = 0 \in \tilde{h}_k(X_i)$ zeigen, also ist ψ injektiv, und die Sequenz zerfällt in lauter kurze exakte Sequenzen. Mit der üblichen Charakterisierung des Kolimes folgt

$$\tilde{h}_k(Y) \cong \bigoplus_i \tilde{h}_k(X_i) / \text{im } \psi \cong \text{colim } h_k(X_i). \quad \square$$

Im folgenden sei \tilde{h}_\bullet stets ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten $M = \tilde{h}_0(S^0)$ in Mod_R . Wir fixieren Homöomorphismen $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ und benutzen die Isomorphismen

$$\partial_n: \tilde{h}_n(S^n) \rightarrow \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1})$$

aus dem Beweis von Satz 5.10, um induktiv $\tilde{h}_n(S^n)$ mit $\tilde{h}_0(S^0) = M$ zu identifizieren.

Sei $(X, \{x_0\})$ ein CW-Paar wie in Definition 4.37 mit den n -Gerüsten X^n für $n \geq -1$ und den Indexmengen J^n für die n -Zellen für $n \geq 0$. Insbesondere gilt $X^{-1} = \{x_0\}$ und $X^0 \cong J^0 \sqcup \{x_0\}$. Wir schreiben

$$M^{\oplus J^n} = \bigoplus_{j \in J^n} M \quad \text{und} \quad \sum_{j \in J^n} a_j e_j^n = (a_j)_{j \in J^n} \in M^{\oplus J^n},$$

wobei wir verlangen, dass $a_j = 0$ außer für endlich viele $j \in J^n$.

Es seien Φ_j^n die charakteristischen Abbildungen von X für $j \in J^n$. Für alle n fassen wir Φ_j^n als Abbildung von Paaren $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$ auf und bezeichnen die induzierte punktierte Abbildung auf den Quotienten mit $\bar{\Phi}_j^n: S^n \rightarrow X^n/X^{n-1}$.

5.14. LEMMA. *Es sei $k \in \mathbb{Z}$ und $n \geq 0$. Wir erhalten natürliche Isomorphismen*

$$M^{\oplus J^n} \cong \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1}) \quad \text{mit} \quad a_j e_j^n \mapsto \tilde{h}_n \bar{\Phi}_j^n(a_j) \quad \text{für alle } j \in J^n, \quad (1)$$

$$0 \cong \tilde{h}_k(X^n/X^{n-1}) \quad \text{falls } k \neq n, \quad (2)$$

$$0 \cong \tilde{h}_k(X^n) \quad \text{falls } k > n, \quad (3)$$

$$\text{und} \quad \tilde{h}_k(X) \cong \tilde{h}_k(X^n) \quad \text{falls } n > k. \quad (4)$$

BEWEIS. Für jedes $n \geq 0$ erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{j \in J^n} (D^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\bigcup_{j \in J^n} \Phi_j^n} & X^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigvee_{j \in J^n} S^n & \xrightarrow[\cong]{\bigvee_{j \in J^n} \bar{\Phi}_j^n} & X^n/X^{n-1}, \end{array}$$

und die Abbildung $\bigvee_j \bar{\Phi}_j^n$ ist ein Homöomorphismus. Die Behauptungen (1) und (2) folgen aus dem Summenaxiom und aus Satz 5.10.

Punkt (3) folgt aus (2) für $n = 0$ und ergibt sich für $n > 0$ induktiv aus der langen exakten Sequenz des Paares (X^n, X^{n-1}) aus Axiom (2) und Behauptung (2) für $k > n$, da

$$\dots \leftarrow \underbrace{\tilde{h}_k(X^n/X^{n-1})}_{\cong 0} \leftarrow \tilde{h}_k(X^n) \leftarrow \underbrace{\tilde{h}_k(X^{n-1})}_{\cong 0} \leftarrow \dots$$

Mit (2) und der langen exakten Sequenz des Paares (X^{n+1}, X^n) schließen wir, dass $\tilde{h}_k(X^{n+1}) \cong \tilde{h}_k(X^n)$ für $n > k$, denn

$$\dots \leftarrow \underbrace{\tilde{h}_k(X^{n+1}/X^n)}_{\cong 0} \leftarrow \tilde{h}_k(X^{n+1}) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_k(X^n) \leftarrow \underbrace{\tilde{h}_{k+1}(X^{n+1}/X^n)}_{\cong 0} \leftarrow \dots$$

Behauptung (4) folgt jetzt aus Proposition 5.13 mit $X_i = X^i$. □

Nach dem obigen Lemma enthält die lange exakte Sequenz des Paares (X^{n+1}, X^n) für alle n einen Ausschnitt der Form

$$\underbrace{\tilde{h}_n(X^{n+1}/X^n)}_{\cong 0} \leftarrow \underbrace{\tilde{h}_n(X^{n+1})}_{\cong \tilde{h}_n(X)} \xleftarrow{\iota_*^{n+1}} \tilde{h}_n(X^n) \xleftarrow{\partial^{n+1}} \underbrace{\tilde{h}_{n+1}(X^{n+1}/X^n)}_{\cong M \oplus J^{n+1}} \xleftarrow{p_*^{n+1}} \tilde{h}_{n+1}(X^{n+1}) \leftarrow \underbrace{\tilde{h}_{n+1}(X^n)}_{\cong 0}.$$

Wir definieren $d_n^{\text{CW}} = p_*^{n-1} \circ \partial$ und setzen diese Ausschnitte zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \swarrow & & \\
 & & & & \tilde{h}_n(X) & & \\
 & & & & \swarrow \iota_*^{n+1} & \searrow 0 & \\
 & & & & \tilde{h}_n(X^n) & & \\
 & & & & \swarrow p_*^n & \searrow \partial^{n+1} & \\
 \dots & \leftarrow & \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) & \xleftarrow{d_n^{\text{CW}}} & \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1}) & \xleftarrow{d_{n+1}^{\text{CW}}} & \tilde{h}_{n+1}(X^{n+1}/X^n) & \leftarrow \dots \\
 & & \swarrow p_*^{n-1} & \searrow \partial^n & & & \swarrow p_*^{n+1} & \searrow \partial^{n+1} \\
 & & \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}) & & & & \tilde{h}_{n+1}(X^{n+1}) & \\
 & & \swarrow & \searrow & & & \swarrow & \searrow \\
 \dots & \leftarrow & & & 0 & & & 0
 \end{array}$$

zusammen. Indem wir die Exaktheit der Diagonalen ausnutzen, erhalten wir eine Kette natürlicher Isomorphismen

$$\begin{array}{ll}
 \tilde{h}_n(X) \cong \tilde{h}_n(X^n) / \text{im } \partial^{n+1} & \text{da } \iota_*^{n+1} \text{ surjektiv ist,} \\
 \cong \text{im } p_*^n / \text{im } (p_*^n \circ \partial^{n+1}) & \text{da } p_*^n \text{ injektiv ist,} \\
 = \ker \partial^n / \text{im } d_{n+1}^{\text{CW}} & \text{da } \text{im } p_*^n = \ker \partial^n, \\
 = \ker d_n^{\text{CW}} / \text{im } d_{n+1}^{\text{CW}} & \text{da } p_*^{n-1} \text{ injektiv ist.}
 \end{array}$$

Der Quotient auf der rechten Seite ist wohldefiniert, da $\text{im } d_{n+1}^{\text{CW}} \subset \ker d_n^{\text{CW}}$, oder äquivalent

$$d_n^{\text{CW}} \circ d_{n+1}^{\text{CW}} = p_*^{n-1} \circ (\partial^n \circ p_*^n) \circ \partial^{n+1} = 0.$$

Mit unserer Definition $X^{-1} = \{x_0\}$ funktioniert dieses Argument für alle $n \geq 0$. Wir erinnern uns an Definition 3.17 und Bemerkung 5.1 (3) und (4).

5.15. DEFINITION. Ein (Ketten-)Komplex (C_\bullet, d_\bullet) über R ist eine Sequenz $(d_n: C_n \rightarrow C_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$ von R -Moduln, so dass

$$d_n \circ d_{n+1} = 0: C_{n+1} \longrightarrow C_{n-1}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Man definiert R -Moduln

$$\begin{aligned} B_n(C_\bullet, d_\bullet) &= \text{im } d_{n+1} \subset Z_n(C_\bullet, d_\bullet) = \ker d_n \subset C_n \\ \text{und } H_n(C_\bullet, d_\bullet) &= Z_n(C_\bullet, d_\bullet) / B_n(C_\bullet, d_\bullet) = \ker d_n / \text{im } d_{n+1}. \end{aligned}$$

Elemente von $C_n, Z_n(C_\bullet, d_\bullet)$ und $B_n(C_\bullet, d_\bullet)$ heißen n -Ketten, n -Zykel beziehungsweise n -Ränder des Komplexes. Der R -Modul $H_n(C_\bullet, d_\bullet)$ heißt n -te Homologie des Komplexes und seine Elemente n -te Homologieklassen.

Eine Kettenabbildung $f_\bullet: (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet, d'_\bullet)$ vom Grad a ist eine Sequenzabbildung vom Grad a . Die induzierten Abbildungen zwischen den Homologien bezeichnet man mit

$$H_n f_\bullet = f_*: H_n(C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow H_{n+a}(C'_\bullet, d'_\bullet).$$

Man überlegt sich leicht, dass sich jede Kettenabbildung $f_\bullet: (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet, d'_\bullet)$ zu Abbildungen

$$Z_n(C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow Z_{n+a}(C'_\bullet, d'_\bullet) \quad \text{und} \quad B_n(C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow B_{n+a}(C'_\bullet, d'_\bullet)$$

einschränken lässt, so dass die Abbildung f_* tatsächlich wohldefiniert ist. Die Kettenkomplexe über R bilden eine Kategorie Ch_R mit den Kettenabbildungen als Morphismen, und die n -te Homologie ist ein Funktor $H_n: Ch_R \rightarrow Mod_R$.

5.16. BEMERKUNG. Die volle Unterkategorie der Kettenkomplexe (C_\bullet, d_\bullet) mit $d_\bullet = 0$ wird auch als Kategorie $GrMod_R$ der graduierten R -Moduln bezeichnet; speziell sei $GrAb$ die Kategorie der graduierten abelschen Gruppen. Homologie ist ein Funktor $H_\bullet: Ch_R \rightarrow GrMod_R$. Er ist *graduiert*, das heißt für alle Kettenabbildungen f_\bullet gilt $\deg f_* = \deg f_\bullet$. Zur Illustration dieser Konzepte sei Übung 5.96 empfohlen.

Wir verwenden im Folgenden Kleinbuchstaben \tilde{h} für (reduzierte) Homologiefunktoren im Sinne der Eilenberg-Steenrod-Axiome 5.2 und Großbuchstaben für die Homologie von Kettenkomplexen.

Nach unseren obigen Überlegungen ist $\tilde{h}_k(X)$ zur Homologie eines Kettenkomplexes $(\tilde{C}_\bullet^{CW}, d_\bullet^{CW})$ isomorph. Wir identifizieren $\tilde{C}_n^{CW}(X; M) = \tilde{h}_n(X^n / X^{n-1})$ mit $M^{\oplus J^n}$ wie in Lemma 5.14 (1). Als nächstes suchen wir eine explizite Formel für den Randoperator $d_n^{CW}: M^{\oplus J^n} \rightarrow M^{\oplus J^{n-1}}$. Wir betrachten dazu für $j \in J^n$ die Projektionsabbildung

$$q_j^n: X^n / X^{n-1} \longrightarrow X^n / \left(X^{n-1} \cup \bigcup_{i \in J^n \setminus \{j\}} e_i^n \right) \xrightarrow{(\bar{\Phi}_j^n)^{-1}} S^n.$$

Dann gilt

$$q_j^n \circ \bar{\Phi}_i^n = \begin{cases} \text{id}_{S^n} & \text{falls } i = j \in J^n, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } i \neq j, \end{cases}$$

und für $\sum_{i \in J^n} a_i e_i^n \in M^{\oplus J^n} = \tilde{h}_n(X^n / X^{n-1})$ folgt

$$(q_j^n)_* \sum_{i \in J^n} a_i e_i^n = \sum_{i \in J^n} (q_j^n \circ \bar{\Phi}_i^n)_*(a_i) = a_j \in \tilde{h}_n(S^n) \cong M.$$

Wir betrachten die Paarabbildungen $\Phi_i^n: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$ und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}) & \xleftarrow{(f_{ij}^n)_*} & \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}) & \xleftarrow{\cong \partial^n} & \tilde{h}_n(S^n) \\ (q_j^{n-1})_* \uparrow & & (\varphi_i^n)_* \downarrow & & (\bar{\Phi}_i^n)_* \downarrow \\ \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) & \xleftarrow{p_*^{n-1}} & \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}) & \xleftarrow{\partial^n} & \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1}) \end{array}$$

für $i \in J^n$, $j \in J^{n-1}$ mit $f_{ji}^n = q_j^{n-1} \circ p^{n-1} \circ \varphi_i^n: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$. Dabei kommutiert das rechte Quadrat wegen der Natürlichkeit von ∂_n , und das linke nach Definition von f_{ji}^n . Nach Satz 5.11 (2) operiert $(f_{ji}^n)_*$ auf $M = \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1})$ durch Multiplikation mit dem Abbildungsgrad $d_{ij}^n = \deg f_{ji}^n$.

Insgesamt wird der zelluläre Randoperator d_n^{CW} für $n \geq 2$ also durch die ganzzahlige Matrix

$$d_n^{\text{CW}} = (d_{ji}^n)_{j,i} \in M_{J^{n-1}, J^n}(\mathbb{Z}) \subset \text{hom}_R(M^{\oplus J^n}, M^{\oplus J^{n-1}})$$

beschrieben. Die Koeffizienten d_{ji}^n dieser Matrix heißen auch die *Inzidenzzahlen* von X . Man beachte, dass S^{n-1} kompakt ist und φ_i^n nach Proposition 4.38 daher nur endlich viele Zellen e_j^{n-1} trifft, so dass $e_i^n \in M \cong \text{im}(\tilde{h}_n \bar{\Phi}_i^n)$ auf eine endliche Linearkombination, also ein Element der direkten Summe $M^{\oplus J^{n-1}}$ abgebildet wird. Man beachte auch, dass der reduzierte Homologiefunktor \tilde{h}_\bullet in dieser Beschreibung des reduzierten zellulären Kettenkomplexes überhaupt nicht mehr auftaucht, sondern nur noch die Koeffizienten M . Das liegt an Folgerung 3.46 aus dem Satz 3.42 von Brouwer-Hopf, sowie an den Sätzen 5.10 und 5.11.

5.17. DEFINITION. Es sei X ein CW-Komplex und M ein R -Modul. Der *reduzierte zelluläre Kettenkomplex* von X mit Koeffizienten M ist definiert als $(\tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(X; M), d_\bullet^{\text{CW}})$ mit $\tilde{C}_n^{\text{CW}} = M^{\oplus J^n}$ und

$$d_n^{\text{CW}} \sum_{i \in J^n} a_i e_i^n = \sum_{j \in J^{n-1}} \sum_{i \in J^n} \deg(q_j^{n-1} \circ p^{n-1} \circ \varphi_i^n) a_i e_j^{n-1} = \sum_{j \in J^{n-1}} \sum_{i \in J^n} d_{ji}^n a_i \cdot e_j^{n-1}.$$

Die Homologie $\tilde{H}_\bullet^{\text{CW}}(X; M) = H_\bullet(\tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(X; M), d_\bullet^{\text{CW}})$ dieses Komplexes heißt die *reduzierte zelluläre Homologie* von X mit Koeffizienten in M .

Wir erinnern uns an die Definitionen 1.88 und 4.42 zellulärer Abbildungen zwischen CW-Komplexen. Die CW-Komplexe mit den zellulären Abbildungen bilden eine Kategorie CW .

Es sei Y ein CW-Komplex mit $\tilde{h}_n(Y^n/Y^{n-1}) = M^{\oplus K^n}$. Eine zelluläre Abbildung $f: X \rightarrow Y$ induziert Abbildungen $\bar{f}^n: X^n/X^{n-1} \rightarrow Y^n/Y^{n-1}$, also auch Abbildungen $f_{\#n} = \bar{f}_*^n: M^{\oplus J^n} \rightarrow M^{\oplus K^n}$ für alle n . Mit einem ähnlichen Argument wie oben sieht man, dass

$$f_{\#n} \sum_{j \in J^n} a_j e_j^n = \sum_{j \in J^n} \sum_{k \in K^n} \deg(q_k^n \circ \bar{f}^n \circ \bar{\Phi}_j^n) a_j e_k^n.$$

Die Familie $f_{\#\bullet}$ ist eine Kettenabbildung vom Grad 0, da das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) & \xleftarrow{p_*^{n-1}} & \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}) & \xleftarrow{\partial} & \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1}) \\ \bar{f}_*^{n-1} \downarrow & & f_*^{n-1} \downarrow & & \bar{f}_*^n \downarrow \\ \tilde{h}_{n-1}(Y^{n-1}/Y^{n-2}) & \xleftarrow{p_*^{n-1}} & \tilde{h}_{n-1}(Y^{n-1}) & \xleftarrow{\partial} & \tilde{h}_n(Y^n/Y^{n-1}) \end{array}$$

kommutiert. Wir bezeichnen die induzierten Abbildungen mit

$$f_*^{\text{CW}} = \tilde{H}^{\text{CW}} f_n: \tilde{H}_n^{\text{CW}}(X; M) \rightarrow \tilde{H}_n^{\text{CW}}(Y; M).$$

5.18. SATZ (Zelluläre Homologie, Eindeutigkeit). Sei M ein R -Modul und $n \in \mathbb{Z}$.

- (1) Die reduzierte zelluläre Homologie mit Koeffizienten M ist ein Funktor auf der Kategorie CW_+ der punktierten CW -Komplexe und der punktierten zellulären Abbildungen.
- (2) Für jeden gewöhnlichen reduzierten Homologiefunktor \tilde{h}_n mit Koeffizienten M existiert ein natürlicher Isomorphismus $\tilde{h}_n|_{CW_+} \rightarrow \tilde{H}_n^{CW}(\cdot; M)$.

BEWEIS. Wir haben zu jedem CW -Komplex X einen graduierten Modul $H_\bullet^{CW}(X; M)$ und zu jeder zellulären Abbildung $f: X \rightarrow Y$ eine induzierte Abbildung $f_*^{CW}: \tilde{H}_n^{CW}(X; M) \rightarrow \tilde{H}_n^{CW}(Y; M)$ konstruiert. Um Funktorialität unabhängig von der Existenz eines Homologiefunktors \tilde{h} zu zeigen, betrachten wir zelluläre Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$. Seien Φ_k^n und Ψ_j^n die charakteristischen Abbildungen von X beziehungsweise Y , und q_j^n und r_i^n die entsprechenden Kollapsabbildungen von Y beziehungsweise Z .

Die Verkettung von f_*^{CW} und g_*^{CW} wird durch das Matrixprodukt

$$(\deg(r_i^n \circ g \circ \bar{\Psi}_j^n))_{ij} \cdot (\deg(q_j^n \circ f \circ \bar{\Phi}_k^n))_{jk}$$

beschrieben, während zu $(g \circ f)_*^{CW}$ die Matrix

$$(\deg(r_i^n \circ g \circ f \circ \bar{\Phi}_k^n))_{ik}$$

gehört. Funktorialität folgt, denn man kann zeigen, dass

$$\begin{aligned} \sum_j \deg(r_i^n \circ g \circ \bar{\Psi}_j^n) \cdot \deg(q_j^n \circ f \circ \bar{\Phi}_k^n) &= \sum_j \deg(r_i^n \circ g \circ \bar{\Psi}_j^n \circ q_j^n \circ f \circ \bar{\Phi}_k^n) \\ &= \deg(r_i^n \circ g \circ f \circ \bar{\Phi}_k^n). \end{aligned}$$

Sei jetzt \tilde{h}_\bullet ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten M . Wir haben oben Isomorphismen

$$\tilde{h}_n(X) \leftarrow \tilde{h}_n(X^n) / \text{im } \partial_{n+1} \longrightarrow \text{im } \tilde{h}_n p^n / \text{im } (\tilde{h}_n p^n \circ \partial_{n+1}) = \ker d_n / \text{im } d_{n+1} = \tilde{H}_n^{CW}(X; M)$$

konstruiert, die alle von natürlichen Abbildungen zwischen Homologiemoduln induziert werden. Also ist auch der zusammengesetzte Isomorphismus $\tilde{h}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n^{CW}(X; M)$ natürlich, und es folgt (2). \square

5.19. BEMERKUNG. Wir können uns zelluläre Homologie vereinfacht wie folgt vorstellen. Jede n -Zelle ist ein n -dimensionales Objekt in X mit einem $(n-1)$ -dimensionalen Rand, und Ketten $c \in \tilde{C}_n^{CW}(X; M)$ sind M -Linearkombinationen davon. Den Rand $d_n^{CW}c$ einer solchen Kette c schreiben wir wieder als M -Linearkombination von $(n-1)$ -Zellen, dabei hängen die Vorzeichen von einer Art „Orientierung“ auf dem Rand ab, siehe Folgerung 3.89. Wenn also der Rand von c eine bestimmte Zelle a -mal „richtig herum“ und b -mal „falsch herum“ trifft, dann kommt diese Zelle $(a-b)$ -mal in $d_n^{CW}c$ vor.

Ketten c mit Rand $d_n^{CW}c = 0$ heißen Zykel. Wir stellen sie uns als „geschlossene“ n -dimensionale Objekte in X vor. Jeder Zykel repräsentiert ein „Loch“ in X^n . Wenn dieses Loch in X^{n+1} von einer Kette $b \in C_{n+1}^{CW}(X; M)$ „gestopft“ wird, das heißt, wenn $c = d_{n+1}^{CW}b$, vergessen wir es. Alle anderen Löcher bleiben nach Lemma 5.14 (4) dann auch in X „ungestopft“. Somit dürfen wir uns $\tilde{H}_n^{CW}(X; M)$ als Menge der Linearkombinationen von Löchern in X vorstellen. Man vergleiche das mit der Beschreibung des gerahmten Bordismus in Bemerkung 3.96.

Ein Beispiel ist das Loch in der Mitte der n -Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, das sich nach den Sätzen 5.10 und 5.18 dadurch manifestiert, dass $H_n^{CW}(S^n) \cong M$. Allerdings sehen wir dieses Loch erst „mit bloßem Auge“, wenn wir S^n in den \mathbb{R}^{n+1} einbetten, während die Homologie es immer findet.

5.20. BEISPIEL. Die reduzierte zelluläre Homologie lässt sich besonders einfach berechnen, wenn der zelluläre Randoperator d_n^{CW} für alle $n \in \mathbb{Z}$ verschwindet. Das passiert etwa dann, wenn X keine Zellen in aufeinanderfolgenden Dimensionen hat. Ein Beispiel sind die komplex und quaternionisch projektiven Räume aus den Übungen 1.129 und 1.130, siehe Übung 5.89.

5.21. BEISPIEL. Wir betrachten jetzt den reell projektiven Raum $X = \mathbb{R}P^n$ mit der CW-Struktur aus Übung 1.130. Dann existiert neben $\{x_0\} = \mathbb{R}P^0$ genau eine Zelle e^k in jeder Dimension $1 \leq k \leq n$, und die Verklebeabbildung ist die Projektion

$$\varphi^k: S^{n-1} \rightarrow X^{k-1} = \mathbb{R}P^{k-1} = S^{n-1}/\{1, -1\}.$$

Dabei wird der Äquator S^{k-2} gerade auf den Unterkomplex $X^{k-2} = \mathbb{R}P^{k-2}$ abgebildet. Ähnlich wie bei der Konstruktion der „Summe“ stetiger Abbildungen erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S^{k-1} & \longrightarrow & S^{k-1}/S^{k-2} & \xrightarrow{\cong} & S^{k-1} \vee S^{k-1} \\ \varphi^k \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varphi_+^k \vee \varphi_-^k \\ \mathbb{R}P^{k-1} & \xrightarrow{p^{k-1}} & \mathbb{R}P^{k-1}/\mathbb{R}P^{k-2} & \xrightarrow[\cong]{q^{k-1}} & S^{k-1}. \end{array}$$

Also gilt $[q^{k-1} \circ \varphi^k] = [\varphi_+^k] + [\varphi_-^k] \in \pi_{k-1}(\mathbb{R}P^{k-1})$; hierbei werden $\varphi_{\pm}^k: S^{k-1} \rightarrow S^{k-1}$ durch die Einschränkung von $q^{k-1} \circ \varphi^k$ auf je eine der beiden Halbkugeln induziert. Da $\varphi_-^k = \varphi_+^k \circ (-\text{id})$ nach Konstruktion, folgt aus Beispiel 3.47 bei geeigneter Wahl der Verklebeabbildungen, dass

$$d_k^{\text{CW}} = \deg(q^{k-1} \circ \varphi^k) = 1 + (-1)^k = \begin{cases} 2 & \text{falls } k \text{ gerade ist, und} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

- (1) Wir wählen \mathbb{Z} in der Kategorie $\mathcal{A}b \cong \text{Mod}_{\mathbb{Z}}$ als Koeffizienten. Für gerade n und erhalten wir in den Graden 0 bis n den reduzierten zellulären Kettenkomplex

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \dots \xleftarrow{2} \mathbb{Z}$$

für ungerade n hingegen

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \dots \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z},$$

und daher

$$\tilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } k \text{ ungerade und } 0 < k < n, \\ \mathbb{Z} & \text{falls } k = n \text{ ungerade, und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier taucht gelegentlich der Modul $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auf. Im Sinne von Bemerkung 5.19 beschreibt das Element $0 \neq c \in \tilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ein „Loch“ in $\mathbb{R}P^k$, das in $\mathbb{R}P^{k+1}$ nicht gestopft wird; erst das zweimal umlaufene Loch $2c$ tritt als Rand einer $(k+1)$ -Kette auf.

- (2) Wir bleiben in der Kategorie $\mathcal{A}b$ und wählen $\mathbb{Z}/2$ als Koeffizienten. Da $2 \equiv 0$ in $\mathbb{Z}/2$, verschwindet der Randoperator komplett, und wir erhalten

$$\tilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } 0 < k \leq n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das gleiche Ergebnis erhalten in der Kategorie $\text{Vec}_{\mathbb{Z}/2}$. Wir sehen also modulo 2 mehr „Löcher“ als über \mathbb{Z} .

- (3) Es sei jetzt \mathbb{k} ein Körper der Charakteristik $\neq 2$. Dann ist Multiplikation mit 2 invertierbar. Sowohl in der Kategorie $\mathcal{A}b$ als auch in $\mathcal{V}ec_{\mathbb{k}}$ erhalten wir daher nur noch

$$\tilde{H}_k^{CW}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{k}) \cong \begin{cases} \mathbb{k} & \text{falls } k = n \text{ ungerade ist, und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir wollen zelluläre Homologie zu einem Homologiefunktor bezüglich zellulärer Homologie machen. Dazu müssen wir die Eilenberg-Steenrod-Axiome 5.2 zeigen. Das Summenaxiom (3) und das Dimensionsaxiom (4) sind leicht zu überprüfen. Zur Homotopieinvarianz (1) und zur langen exakten Sequenz (2) skizzieren wir die Beweise nur, da wir später eine andere Konstruktion für beliebige Homologiefunktoren genauer betrachten wollen.

5.22. DEFINITION. Seien $f_{\bullet}, g_{\bullet}: (C_{\bullet}, d_{\bullet}) \rightarrow (E_{\bullet}, e_{\bullet})$ zwei Kettenabbildungen vom Grad a . Eine *Kettenhomotopie* $h_{\bullet}: f_{\bullet} \sim g_{\bullet}$ zwischen f_{\bullet} und g_{\bullet} ist eine Familie von Abbildungen $h_k: C_k \rightarrow E_{k+a+1}$, so dass

$$g_k - f_k = h_{k-1} \circ d_k + e_{k+a+1} \circ h_k: C_k \rightarrow E_{k+a}.$$

Falls eine solche Kettenhomotopie existiert, heißen f_{\bullet} und g_{\bullet} *kettenhomotop*.

5.23. PROPOSITION. Seien $f_{\bullet}, g_{\bullet}: (C_{\bullet}, d_{\bullet}) \rightarrow (E_{\bullet}, e_{\bullet})$ zwei Kettenabbildungen vom Grad a . Wenn eine Kettenhomotopie $h_{\bullet}: f_{\bullet} \sim g_{\bullet}$ existiert, dann induzieren f_{\bullet} und g_{\bullet} die gleiche Abbildung

$$f_* = g_*: H_{\bullet}(C_{\bullet}, d_{\bullet}) \rightarrow H_{\bullet}(E_{\bullet}, e_{\bullet}).$$

BEWEIS. Für alle Zyklen $c \in Z_k \subset C_k$ erhalten wir einen Rand

$$g_k(c) - f_k(c) = h_{k-1}(\underbrace{d_k(c)}_{=0}) + e_{k+a+1}(h_k(c)). \quad \square$$

Man überprüft außerdem leicht, dass Kettenhomotopie eine Äquivalenzrelation auf Kettenabbildungen definiert, die mit der Verkettung von Kettenabbildungen verträglich ist, siehe Übung 5.91. In Analogie zur Homotopiekategorie topologischer Räume können wir daher eine naive Homotopiekategorie $\mathcal{H}Ch_R$ von Kettenkomplexen über R definieren.

Eine zelluläre Homotopie induziert stets eine Kettenhomotopie zwischen den zugehörigen zellulären Kettenkomplexen, siehe Übung 5.92. Somit ist zelluläre Homologie in $\mathcal{C}W_+$ zellulär homotopieinvariant.

5.24. BEMERKUNG. In Analogie zu den schwachen Äquivalenzen aus Definition 4.45 definiert man schwache Äquivalenzen in der Kategorie $\mathcal{C}h_R$ als Kettenabbildungen, die Isomorphismen auf allen Homologiegruppen induzieren. Es gibt dazu passende Modellstrukturen auf $\mathcal{C}h_R$. Außerdem kann man Kettenhomotopie in diesem Sinne als Links- oder als Rechtshomotopie auffassen, siehe Übungen 5.93 und 5.94. Diese Konstruktionen bilden die Grundlage für die sogenannte *derivierte Kategorie* in der homologischen Algebra. Wir werden uns in Abschnitt 5.e ein bisschen mehr dazu anschauen.

Es sei jetzt X ein CW-Komplex und $A \subset X$ ein Unterkomplex. Dann ist auch $\tilde{C}_{\bullet}^{CW}(A; M)$ ein *Unterkettenkomplex* von $\tilde{C}_{\bullet}^{CW}(X; M)$, das heißt, es gilt $\tilde{C}_k^{CW}(A; M) \subset \tilde{C}_k^{CW}(X; M)$ für alle k , und die Inklusion ist mit den Differentialen d_{\bullet}^{CW} verträglich; das ergibt sich unmittelbar aus der obigen Konstruktion. Dann können wir den *Quotienten* $\tilde{C}_{\bullet}^{CW}(X; M)/\tilde{C}_{\bullet}^{CW}(A; M)$ mit dem induzierten Differential betrachten, und erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longleftarrow (\tilde{C}_{\bullet}^{CW}(X; M)/\tilde{C}_{\bullet}^{CW}(A; M), \bar{d}_{\bullet}^{CW}) \longleftarrow (\tilde{C}_{\bullet}^{CW}(X; M), d_{\bullet}^{CW}) \longleftarrow (\tilde{C}_{\bullet}^{CW}(A; M), e_{\bullet}^{CW}) \longleftarrow 0$$

von Kettenkomplexen. Man überprüft leicht, dass $\tilde{C}_{\bullet}^{CW}(X; M)/\tilde{C}_{\bullet}^{CW}(A; M)$ gerade der zelluläre Kettenkomplex des Quotienten X/A ist, siehe Übung 5.98. Das folgende Lemma liefert uns dann die gesuchte lange exakte Sequenz aus Axiom (3).

5.25. LEMMA (Schlangen-). *Es seien $(C_\bullet, \partial_\bullet)$, $(C'_\bullet, \partial'_\bullet)$ und $(C''_\bullet, \partial''_\bullet)$ Kettenkomplexe über R und $f_\bullet: (C'_\bullet, \partial'_\bullet) \rightarrow (C_\bullet, \partial_\bullet)$ und $g_\bullet: (C_\bullet, \partial_\bullet) \rightarrow (C''_\bullet, \partial''_\bullet)$ seien Kettenabbildungen, so dass für alle k die Sequenz*

$$0 \longrightarrow C'_k \xrightarrow{f_\bullet} C_k \xrightarrow{g_\bullet} C''_k \longrightarrow 0$$

exakt ist. Dann existiert eine Folge natürlicher Transformationen $d_k: H_k(C''_\bullet, \partial''_\bullet) \rightarrow H_{k-1}(C'_\bullet, \partial'_\bullet)$, so dass die folgende Sequenz exakt ist:

$$\cdots \longrightarrow H_k(C_\bullet, \partial_\bullet) \xrightarrow{g_*} H_k(C''_\bullet, \partial''_\bullet) \xrightarrow{d_k} H_{k-1}(C'_\bullet, \partial'_\bullet) \xrightarrow{f_*} H_{k-1}(C_\bullet, \partial_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

In gewissem Sinne entspricht die hier konstruierte Sequenz einer Faser- oder Kofasersequenz, ausgehend von einer „Faserung“ g_\bullet oder einer „Kofaserung“ f_\bullet in \mathcal{Ch}_R (nach Wahl einer passenden Modellstruktur), genauer entspricht sie den langen exakten Sequenzen 4.67 (3) beziehungsweise 4.72 (3). Insbesondere sollten wir hier eigentlich entsprechende Vorzeichen verwenden, siehe auch die Anmerkungen nach Definition 5.2.

BEWEIS. Dieser Beweis ist eine Diagrammjagd im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C'_k & \xrightarrow{\quad} & C_k & \xrightarrow{\twoheadrightarrow} & C''_k \longrightarrow 0 \\ & & \partial'_k \downarrow & & \partial_k \downarrow & & \partial''_k \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C'_{k-1} & \xrightarrow{\quad} & C_{k-1} & \xrightarrow{\twoheadrightarrow} & C''_{k-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

Um das Bild von $[c''_k] \in H_k(C''_\bullet, \partial''_\bullet)$ zu bestimmen, wählen wir zunächst ein Urbild $c_k \in C_k$ von c''_k , dann bildet $\partial_k c_k$ auf $0 \in C''_{k-1}$ ab, also erhalten wir ein Urbild $c'_{k-1} \in C'_{k-1}$ von $\partial_k c_k$. Wir setzen $d_k[c''_k] = [c'_{k-1}]$ und lassen den Rest als Übung 5.95. \square

Der Name des Lemmas ergibt sich, wenn man im obigen Diagramm an die Stelle der Komplexe ihre Homologien einträgt und die Verbindungshomomorphismen mit einzeichnet. Wir nennen die im Lemma konstruierten natürlichen Transformationen d_k auch *Verbindungshomomorphismen*.

5.26. SATZ (Zelluläre Homologie; Existenz). *Sei M ein R -Modul und $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist die reduzierte zelluläre Homologie mit Koeffizienten M ein Mod_R -wertiger Homologiefunktor $\tilde{H}_\bullet^{\text{CW}}(\cdot; M)$ auf der Kategorie CW_+ der punktierten CW-Komplexe und der punktierten zellulären Abbildungen.*

BEWEIS. Der Funktor ist CW-homotopieinvariant nach Proposition 5.23, und mit Hilfe des Schlangenlemmas 5.25 erhalten wir die Homologiesequenz für Paare von CW-Komplexen. Das Summen- und das Dimensionsaxiom ergeben sich leicht aus der Konstruktion. \square

5.27. FOLGERUNG. *Zu jedem R -Modul M gibt es gewöhnliche reduzierte Homologiefunktoren mit Koeffizienten M auf den Kategorien $k\text{Top}$ und $kw\mathcal{H}$ und ihren punktierten Versionen, und zwar sowohl bezüglich der Quillen- als auch bezüglich der Strøm-Modellstruktur.*

BEWEIS. Sei $\mathcal{T} = k\text{Top}$ oder $kw\mathcal{H}$. Wie in Bemerkung 5.5 (1) und (3) können wir auch zelluläre Homologie auf der unpunkteten CW-Kategorie CW definieren. Aufgrund von Homotopieinvarianz

faktoriert H_{\bullet}^{CW} über die Homotopiekategorie \mathcal{HCW} , die nach Beispiel 4.64 (3) zur Homotopiekategorie $\text{Ho}\mathcal{T}$ der Quillen-Modellstruktur äquivalent ist. Also erhalten wir den gesuchten Homologiefunktor für die Quillen-Modellstruktur als Verkettung

$$\tilde{h}_{\bullet}: \mathcal{T} \xrightarrow{\text{Ho}} \text{Ho}\mathcal{T}_+ \xleftarrow{\cong} \mathcal{HCW} \xrightarrow{H_{\bullet}^{\text{CW}}} \mathcal{GrMod}_R.$$

Analog verfahren wir im punktierten Fall. Der Funktor \tilde{h}_{\bullet} ist invariant unter schwachen Äquivalenzen, also insbesondere unter Homotopieäquivalenzen. Somit ist er ebenfalls ein Homologiefunktor für die Ström-Modellstruktur. \square

5.28. BEMERKUNG. Wir übertragen Bemerkung 5.5 auf die zelluläre Homologie.

- (1) Wir betrachten den reduzierten zellulären Randoperator in Grad 1 etwas näher. Sei $j \in J^1$ und $i \in J^0 = X^0 \setminus \{x_0\}$, und sei $S^0 = \{1, -1\}$ mit Basispunkt 1. Dann erhalten wir die Matrixkoeffizienten

$$d_{ij}^1 = \deg(q_i^0 \circ \varphi_j^1) = \sum_{s \in (\varphi_j^1)^{-1}(i)} s \in \{-1, 0, 1\},$$

wobei wir hier i als Punkt in $X^0 \setminus \{x_0\}$ verstehen.

- (2) Wir definieren den *unreduzierten zellulären Kettenkomplex* $C_{\bullet}^{\text{CW}}(X; W) = \tilde{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(X_+; W)$. In der obigen Formel für d_{ij}^1 erlauben wir jetzt $i \in X^0$. Die *unreduzierte zelluläre Homologie* bezeichnen wir mit

$$H_{\bullet}^{\text{CW}}(X; W) = H_{\bullet}(C_{\bullet}^{\text{CW}}(X; W); d_{\bullet}^{\text{CW}}) = \tilde{H}_{\bullet}^{\text{CW}}(X_+; W).$$

In Analogie zur Sequenz (*) auf Bemerkung 5.5 erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longleftarrow \tilde{H}_n^{\text{CW}}(X; W) \longleftarrow H_n^{\text{CW}}(X; W) \longleftarrow H_n^{\text{CW}}(\{x_0\}; W) \longleftarrow 0.$$

Wenn $q: X \rightarrow \{x_0\}$ die konstante Abbildung bezeichne, folgt wieder

$$\tilde{H}_n^{\text{CW}}(X; W) \cong \ker(q_*: H_n^{\text{CW}}(X; W) \rightarrow H_n^{\text{CW}}(\{x_0\}; W)),$$

und die reduzierte zelluläre Homologie ist ebenfalls unabhängig von der Wahl von x_0 . Da $H_n^{\text{CW}}(\{x_0\}; W) \cong \tilde{H}_n^{\text{CW}}(S^0)$, folgt $H_n^{\text{CW}}(X; W) \cong \tilde{H}_n^{\text{CW}}(X; W)$ für alle $n \neq 0$ nach dem Dimensionsaxiom 5.2 (4).

- (3) Wir definieren den *augmentierten zellulären Kettenkomplex* $(\bar{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(X; M), \bar{d}_{\bullet}^{\text{CW}})$, indem wir die Abbildung $q_{\#}: C_0^{\text{CW}}(X; W) \rightarrow C_0^{\text{CW}}(\{x_0\}; W) = M$ in den unreduzierten Kettenkomplex mit einbauen. Das heißt, wir setzen

$$\bar{C}_n^{\text{CW}}(X; M) = \begin{cases} C_n^{\text{CW}}(X; M) & \text{falls } n \neq -1, \text{ und} \\ C_0^{\text{CW}}(\{x_0\}; W) = M & \text{falls } n = -1, \end{cases}$$

und
$$\bar{d}_n^{\text{CW}} = \begin{cases} d_n^{\text{CW}} & \text{falls } n \neq 0, \text{ und} \\ q_{\#}: C_0^{\text{CW}}(X; W) \rightarrow M & \text{falls } n = 0. \end{cases}$$

Die Abbildung $\bar{d}_0^{\text{CW}} = q_{\#}$ heißt *Augmentierung* und wird auch mit ε bezeichnet. Aus der Konstruktion ergibt sich ein natürlicher Isomorphismus

$$H_{\bullet}(\bar{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(X; M), \bar{d}_{\bullet}^{\text{CW}}) \cong \ker(q_*: H_{\bullet}^{\text{CW}}(X; W) \rightarrow H_{\bullet}^{\text{CW}}(\{x_0\}; W)) \cong \tilde{H}_{\bullet}^{\text{CW}}(X; W).$$

Da der augmentierte Kettenkomplex die gleiche Homologie wie der reduzierte Kettenkomplex liefert, aber keine Basispunkte benötigt, definiert man die reduzierte zelluläre Homologie später lieber als die Homologie des augmentierten Kettenkomplexes.

5.29. BEMERKUNG. Es gibt eine besonders elegante und vor allem funktorielle Möglichkeit, jedem topologischen Raum X eine CW-Approximation zuzuordnen. Dazu betrachten wir den sogenannten *singulären (simplicialen) Komplex* von X . Zu jeder stetigen Abbildung $\sigma: \Delta^k \rightarrow X$ vom Standardsimplex $\Delta^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ nach X betrachten wir eine k -Zelle in der Form eines Simplex, und wir kleben jede Seite dieses Simplexes an den $(k-1)$ -Simplex, der der Einschränkung von σ auf die jeweilige Seite entspricht. Dann lassen sich diese Abbildungen zu einer Abbildung von einem (zugegeben sehr großen) CW-Komplex $|\text{sing}_\bullet X|$ nach X verkleben, und man kann zeigen, dass es sich dabei um eine schwache Homotopieäquivalenz handelt. Tatsächlich ist diese Abbildung gerade die Einheit der Adjunktion $|\cdot| \dashv \text{sing}_\bullet$ zwischen der geometrischen Realisierung und dem singulären Simplicialkomplex, siehe Kapitel 9. Wir können jetzt also *singuläre Homologie* definieren als

$$H_\bullet(X; M) = H_\bullet^{\text{CW}}(|\text{sing}_\bullet X|; M) .$$

Der Vorteil gegenüber der CW-Approximation nach Satz 4.51 besteht darin, dass wir oben keine Wahlen in Abhängigkeit von X getroffen haben. Für die reduzierte Homologie verwenden wir den augmentierten Komplex aus Bemerkung 5.28 (3).

5.30. DEFINITION. Es sei \mathbb{k} ein Körper, h_\bullet ein unreduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten \mathbb{k} und X ein topologischer Raum, dann heißen die Dimensionen $b_k(X; \mathbb{k}) = \dim_{\mathbb{k}} h_k(X) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ der Homologie-Vektorräume von X die *Betti-Zahlen* von X über \mathbb{k} . Falls alle Betti-Zahlen endlich sind und fast alle verschwinden, ist die *Euler-Zahl* oder *Euler-Charakteristik* von X definiert als

$$\chi(X) = \sum_k (-1)^k b_k(X; \mathbb{k}) .$$

Die Betti-Zahlen von X hängen im allgemeinen vom gewählten Homologiefunktor h_\bullet ab. Nach Satz 5.18 hängen sie nur von \mathbb{k} ab, genauer von seiner Charakteristik, wenn X ein CW-Komplex ist. Aber selbst für CW-Komplexe können verschiedene Körper unterschiedliche Betti-Zahlen liefern, siehe Beispiel 5.21. Die Euler-Zahl hängt zumindest für kompakte CW-Komplexe nicht von \mathbb{k} ab, wie der folgende Satz zeigt. Dazu beachten wir, dass CW-Komplexe nach Satz 1.86 genau dann kompakt sind, wenn sie insgesamt nur aus endlich vielen Zellen bestehen.

5.31. SATZ. Sei \mathbb{k} ein Körper und $X = X^n$ ein punktierter CW-Komplex mit endlich vielen Zellen in jeder Dimension k , und sei $c_k(X) = \#I^k < \infty$ die Anzahl der k -Zellen. Für alle m gilt

$$\sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} c_k(X) \geq \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} b_k(X, \mathbb{k}) , \quad (1)$$

$$c_m(X) \geq b_m(X, \mathbb{k}) , \quad (2)$$

$$\chi(X) = \sum_k (-1)^k c_k(X) \quad \text{falls } X \text{ kompakt ist.} \quad (3)$$

BEWEIS. Man leitet (1) aus den Dimensionsformeln für \mathbb{k} -Vektorräume ab. Sei etwa $U \subset V$ ein Untervektorraum und $f: V \rightarrow W$ linear, dann gilt

$$\dim_{\mathbb{k}} U + \dim_{\mathbb{k}}(V/U) = \dim_{\mathbb{k}} V \quad \text{und} \quad \dim_{\mathbb{k}} V = \dim_{\mathbb{k}} \ker f + \dim_{\mathbb{k}} \text{im } f .$$

Die Ungleichungen (2) und die Gleichung (3) folgen aus (1). Die Details sind Übung 5.97. \square

5.32. BEISPIEL. Für die 2-Sphäre erhalten wir $\chi(S^2) = 2$, da die übliche CW-Struktur nur aus einer 0- und einer 2-Zelle besteht. Die Oberfläche eines konvexen Polyeders im \mathbb{R}^3 liefert eine andere CW-Struktur X auf S^2 mit $e = c_0(X)$ „Ecken“, $k = c_1(X)$ „Kanten“ und $f = c_2(X)$ „Flächen“. Wir erhalten den *Eulerschen Polyedersatz*

$$2 = e - k + f .$$

5.c. Homologiefunktoren und Spektre

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass gewöhnliche Homologiefunktoren auf CW-Komplexen eindeutig bestimmt und (prinzipiell) mittels Kettenkomplexen berechenbar sind. Es bleibt die Existenz solcher Funktoren zu zeigen. In diesem Abschnitt geben wir eine Konstruktion allgemeiner Homologiefunktoren mit Hilfe von Spektren an. Wir arbeiten zumindest am Anfang mit beliebigen abelschen Kategorien, später gehen wir aus technischen Gründen zu Kategorien von Moduln über.

Wir erinnern uns das Axiom 1 der Homotopieinvarianz. In der Quillen-Modellstruktur bedeutet es, dass schwach homotopieäquivalente Räume isomorphe Homologie haben. Es erlaubt uns mit Hilfe des CW-Approximationsatzes 4.51, viele Berechnungen und Beweise auf CW-Komplexe zurückzuführen.

5.33. BEMERKUNG. Diesen Begriff erklärt folgende Beobachtung.

- (1) Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine schwache Äquivalenz, und es sei $Cf = Zf/X$ ihr Abbildungskegel. Wir dürfen annehmen, dass X und Y wegzusammenhängend sind, andernfalls betrachten wir f für jede Wegzusammenhangskomponente einzeln. Der Abbildungszylinder Zf enthält Y als Deformationsretrakt. Da f schwache Äquivalenz ist, ist die Inklusion $X \rightarrow Zf$ eine p -zusammenhängende Abbildung für alle p . Daher liefert Folgerung 3.70 für das Paar (Zf, X) eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longleftarrow \pi_{k-1}(Zf) \xleftarrow{\cong} \pi_{k-1}(X) \xleftarrow{\partial} \pi_k(Cf) \longleftarrow \pi_k(Zf) \xleftarrow{\cong} \pi_k(X) \longleftarrow \cdots ,$$

insbesondere ist Cf schwach zusammenziehbar. Wenn \tilde{h}_\bullet invariant unter schwachen Äquivalenzen ist, betrachten wir die lange exakte \tilde{h}_\bullet -Sequenz

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_n(Cf)}_{=0} \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_n(Zf)}_{\cong \tilde{h}_n(Y)} \longleftarrow \tilde{h}_n(X) \xleftarrow{\partial} \underbrace{\tilde{h}_{n+1}(Cf)}_{=0} \longleftarrow \cdots$$

des Paares (Zf, X) aus Definition 5.2 (2), und erhalten für alle $n \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen

$$f_*: \tilde{h}_n(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_n(Y) .$$

- (2) Die stabilen Homotopiegruppen bilden nach Folgerung 5.4 einen allgemeinen Homologiefunktor π_\bullet^s . Wegen Folgerung 3.78 ist π_\bullet^s invariant unter schwachen Äquivalenzen.

Für den nächsten Schritt erinnern wir uns an die Kofasersequenz

$$SA \xleftarrow{q} X // A \xleftarrow{j} X \xleftarrow{\iota} A$$

der Inklusion $A \hookrightarrow X$ aus Satz 4.67.

5.34. PROPOSITION. *Es gibt eine Bijektion zwischen allgemeinen Homologiefunktoren $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$ und Paaren $(\tilde{h}_\bullet, \sigma_\bullet)$ aus je einem Funktor $\tilde{h}_k: \text{Ho}\mathcal{T}_+ \rightarrow \mathcal{C}$ und einem natürlichen Stabilisierungsisomorphismus $\sigma_k: \tilde{h}_k(S \cdot) \rightarrow \tilde{h}_{k-1}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, mit folgenden Eigenschaften.*

- (1') Quotientenaxiom. *Für jedes gute Paar (X, A) ist die folgende Sequenz exakt:*

$$\tilde{h}_k(X/A) \longleftarrow \tilde{h}_k(X) \longleftarrow \tilde{h}_k(A) .$$

- (2) Summenaxiom. *Es gilt das Summenaxiom 5.2 (3).*

Dabei bezeichnet \tilde{h}_\bullet in beiden Paaren denselben Funktor, und für alle guten Paare (X, A) kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{h}_k(SA) & \xleftarrow{q_*} & \tilde{h}_k(X//A) \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{h}_{k-1}(A) & \xleftarrow{\partial} & \tilde{h}_k(X/A) . \end{array}$$

Eine natürliche Transformation zwischen zwei solchen Funktoren kommutiert genau dann mit den Randoperatoren ∂_\bullet , wenn sie mit den Stabilisierungsisomorphismen σ_\bullet kommutiert.

BEWEIS. Es sei zunächst ein allgemeiner Homologiefunktor \tilde{h}_\bullet gegeben. Wir betrachten die Abbildungen von Paaren $(X \cup_A ZA, A) \rightarrow (CA, A)$, bei der X zu einem Punkt zusammengezogen wird, und $(X \cup_A ZA, A) \rightarrow (X, A)$, bei der der Zylinder ZA auf A gestaucht wird. Wegen der Natürlichkeit von ∂ erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{h}_{k-1}(A) & \xleftarrow{\sigma=\partial} & \tilde{h}_k(SA) & \xleftarrow{\quad} & \tilde{h}_k(CA) \\ \parallel & & \uparrow q_* & & \uparrow \\ \tilde{h}_{k-1}(A) & \xleftarrow{\partial} & \tilde{h}_k(X//A) & \xleftarrow{\quad} & \tilde{h}_k(X \cup_A ZA) \\ \parallel & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ \tilde{h}_{k-1}(A) & \xleftarrow{\partial} & \tilde{h}_k(X/A) & \xleftarrow{\quad} & \tilde{h}_k(X) . \end{array}$$

Mit diesem Diagramm definieren wir σ und erhalten das Quotientenaxiom (1') aus der langen exakten Sequenz 5.2 (2).

Seien umgekehrt $(\tilde{h}_\bullet, \sigma_\bullet)$ gegeben. Wir wenden den Funktor \tilde{h}_k auf die Kofasersequenz der Inklusion $A \hookrightarrow X$ an. Nach Satz 4.67 (1) ist jeder Abschnitt der Kofasersequenz aus zwei aufeinanderfolgenden Abbildungen homotopieäquivalent zu einer Sequenz $Y/B \leftarrow Y \leftarrow B$ für eine passende Kofaserung (Y, B) , also ist die obere Sequenz im folgenden Diagramm nach dem Quotientenaxiom (1') exakt. Wir konstruieren die lange exakte Homologie-Sequenz des Paares (X, A) als

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{h}_k(SX) & \xleftarrow{(S\iota)_*} & \tilde{h}_k(SA) & \xleftarrow{q_*} & \tilde{h}_k(X//A) & \xleftarrow{j_*} & \tilde{h}_k(X) & \xleftarrow{\iota_*} & \tilde{h}_k(A) \\ \sigma \downarrow & & \sigma \downarrow & & \cong \downarrow & \swarrow & & & \\ \tilde{h}_{k-1}(X) & \xleftarrow{\iota_*} & \tilde{h}_{k-1}(A) & \xleftarrow{\partial} & \tilde{h}_k(X/A) & & & & \end{array}$$

Aus den obigen Konstruktionen folgt sofort, dass eine natürliche Transformation zwischen zwei solchen Funktoren genau dann mit σ verträglich ist, wenn sie mit ∂ verträglich ist. \square

Diese Überlegung vereinfacht die Konstruktion eines allgemeinen Homologiefunktors.

5.35. LEMMA. Es sei $\tilde{h}_\bullet: \mathcal{T}_+ \rightarrow \mathcal{C}$ ein allgemeiner reduzierter Homologiefunktor, und E ein gut punktierter Raum in \mathcal{T}_+ . Dann ist $\tilde{h}_\bullet^E = \tilde{h}_\bullet(E \wedge \cdot)$ ebenfalls ein allgemeiner reduzierter Homologiefunktor. Wenn \tilde{h}_\bullet invariant unter schwachen Äquivalenzen ist, dann ist es \tilde{h}_\bullet^E auch.

BEWEIS. Es gilt $S(E \wedge X) \cong E \wedge (SX)$. Somit erbt \tilde{h}_\bullet^E den Stabilisierungsisomorphismus σ von \tilde{h}_\bullet .

Für ein gutes Paar (X, A) ist auch $(E \wedge X, E \wedge A)$ ein gutes Paar nach Übung 3.132, und es gilt

$$(E \wedge X)/(E \wedge A) \cong E \wedge (X/A) .$$

Also erfüllt \tilde{h}_\bullet^E genau wie \tilde{h}_\bullet das Quotientenaxiom aus Proposition 5.34 (1').

Es sei jetzt $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie gut punktierter Räume. Mit den universellen Eigenschaften von Koprodukt und Smash-Produkt erhalten wir eine natürliche stetige Abbildung

$$\bigvee_{i \in I} (E \wedge X_i) \longrightarrow E \wedge \bigvee_{i \in I} X_i, \quad (*)$$

die als Abbildung von Mengen eine Bijektion ist, siehe Übung 3.131. Für jedes $i \in I$ induziert die Inklusion $E \wedge X_i \rightarrow \bigvee_{i \in I} (E \wedge X_i)$ eine Abbildung $X_i \rightarrow \text{hom}(E, \bigvee_{i \in I} (E \wedge X_i))$, und wir erhalten eine Abbildung

$$\bigvee_{i \in I} X_i \rightarrow \text{hom}\left(E, \bigvee_{i \in I} (E \wedge X_i)\right).$$

Aufgrund des Exponentialgesetzes 4.30 in \mathcal{T}_+ schließen wir, dass (*) ein Homöomorphismus ist. Wir erhalten das Summenaxiom für \tilde{h}_\bullet^E aus dem Summenaxiom für \tilde{h}_\bullet , denn

$$\bigoplus_{i \in I} \tilde{h}_n(E \wedge X_i) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_n\left(\bigvee_{i \in I} (E \wedge X_i)\right) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_n\left(E \wedge \bigvee_{i \in I} X_i\right).$$

Zu guter Letzt sei X schwach zusammenziehbar. Aus Übung 3.104 und dem Ausschneidungssatz 3.65 für Kofaserungen erhalten wir Isomorphismen

$$\pi_k(E \times X) \xleftarrow{\cong} \pi_k E \xleftarrow{\cong} \pi_k(E \vee X),$$

falls E zusammenhängend ist. Andernfalls erhalten wir die obigen Isomorphismen, indem wir die Zusammenhangskomponente des Basispunkts in E separat betrachten.

Da $(E \times X, E \vee X)$ somit p -zusammenhängend ist für jedes p , liefert Folgerung 3.70 wieder eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longleftarrow \pi_{k-1}(E \times X) \xleftarrow{\cong} \pi_{k-1}(E \vee X) \xleftarrow{\partial} \pi_k(E \wedge X) \longrightarrow \pi_k(E \times X) \xleftarrow{\cong} \pi_k(E \vee X) \longleftarrow \cdots$$

Daher ist $E \wedge X$ schwach zusammenziehbar. Also ist \tilde{h}_\bullet^E invariant unter schwachen Äquivalenzen, wenn dasselbe für \tilde{h}_\bullet gilt. \square

Wir wären jetzt fertig, wenn wir einen Raum E_0 mit $\pi_0^s(E_0) = M \in \mathcal{Ab}$ und $\pi_k^s(E_0) = 0$ für alle $k \neq 0$ angeben könnten. Denn dann würden wir $\tilde{h}_\bullet = \pi_\bullet^s$ wählen und erhielten einen Homologiefunktor mit Koeffizienten

$$\tilde{h}_k^{E_0}(S^0) = \pi_k^s(E_0 \wedge S^0) = \pi_k^s(E_0).$$

Leider geht es aber nicht so einfach. Denn $\pi_k^s(E_0)$ erkennen wir wegen Folgerung 3.78 erst am Raum $S^{k+2}E_0$. Um ein Element von $\pi_k^s(E_0)$ wie im Beweis von Satz 4.51 zu beseitigen, müssten wir also eine $(2k+3)$ -Zelle an $S^{k+2}E_0$ ankleben. Den gleichen Effekt können wir in der Regel nicht dadurch erreichen, dass wir eine $(k+1)$ -Zelle an E_0 ankleben.

Wir können stattdessen für $i \geq 2$ einen Raum E_i betrachten mit $\pi_i(E_i) \cong M$ und $\pi_k(E_i) = 0$ für $k \neq i$. Dann betrachten wir

$$\tilde{h}_k^i(X) = \pi_{k+i}^s(E_i \wedge X).$$

Da E_i und $E_i \wedge X$ dann $(i-1)$ -zusammenhängend sind, sehen wir mit Folgerung 3.78, dass

$$\tilde{h}_k^i(S^0) = \pi_{k+i}^s(E_i) \cong \begin{cases} M & \text{für } k = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{für } i \neq k \leq i - 2. \end{cases}$$

Für größere k erhalten wir nach wie vor keine Aussage. Je größer i ist, desto besser „approximieren“ wir also eine gewöhnliche Homologietheorie mit Koeffizienten M .

Wenn wir natürliche Transformationen zwischen den obigen allgemeinen Homologietheorien zu E_i hätten, könnten wir jetzt eine gewöhnliche Homologietheorie \tilde{h} mit Koeffizienten M durch

$$\tilde{h}_k(X) = \lim_{\rightarrow} \tilde{h}_k^i(X) = \lim_{\rightarrow} \pi_{k+i}^s(E_i \wedge X) = \lim_{\rightarrow} \pi_{k+i}(E_i \wedge X)$$

konstruieren (zur letzten Gleichheit siehe Satz 5.38 unten). Das motiviert die folgende Definition.

5.36. DEFINITION. Ein *Spektrum* $\mathbb{E} = (E_i, s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ist eine Folge von CW-Komplexen E_i und punktierten Abbildungen $s_i: SE_i \rightarrow E_{i+1}$, den *Stabilisierungsabbildungen*.

Ein Spektrum \mathbb{E} heißt *Suspensionsspektrum* oder *Einhängungsspektrum*, wenn ein n_0 existiert, so dass die Abbildungen s_i für alle $i \geq n_0$ schwache Äquivalenzen sind, und ω -*Spektrum*, wenn die induzierten Abbildungen $E_i \rightarrow \Omega^1(E_{i+1}) = \text{hom}(S^1, E_{i+1})$ für alle $i \geq n_0$ schwache Äquivalenzen sind.

Wenn unsere Spektren erst bei einer bestimmten Zahl n_0 beginnen, können wir $E_i = \text{pt}$ für alle $i < n_0$ setzen, und für $s_i: \text{pt} = SE_i \rightarrow E_{i+1}$ die Nullabbildung wählen. In anderen Büchern heißen unsere Spektren oft Präspektren, da dort oft zusätzliche Anforderungen gestellt werden. Da wir als Räume in der obigen Definition CW-Komplexe verwenden, ist es aufgrund der Sätze von Whitehead und Milnor egal, ob wir in der Definition von Suspensions- und ω -Spektren schwache Äquivalenzen oder Homotopieäquivalenzen verlangen.

Für ein Spektrum \mathbb{E} und einen Homologiefunktor \tilde{h}_\bullet definieren wir mit Lemma 5.35 weitere Homologiefunktoren $\tilde{h}_\bullet^{\mathbb{E}, i}$ durch

$$\tilde{h}_k^{\mathbb{E}, i}(X) = \tilde{h}_{k+i}(E_i \wedge X).$$

Die Stabilisierungsabbildungen induzieren für alle Räume X natürliche Abbildungen

$$\tau_k^i: \tilde{h}_k^{\mathbb{E}, i}(X) = \tilde{h}_{k+i}(E_i \wedge X) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_{k+i+1}(E_i \wedge S^1 \wedge X) \xrightarrow{(s_i \wedge \text{id}_X)^*} \tilde{h}_{k+i+1}(E_{i+1} \wedge X) = \tilde{h}_k^{\mathbb{E}, i+1}(X).$$

Diese Abbildungen sind offensichtlich mit den Stabilisierungsisomorphismen verträglich, und nach Proposition 5.34 dann auch mit den Randoperatoren.

Da wir im Beweis des folgenden Lemma elementweise in Kolimiten arbeiten möchten, lassen wir nur noch Kategorien von Moduln zu, also beispielsweise $\mathcal{A}b = \text{Mod}_{\mathbb{Z}}$ oder $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$.

5.37. LEMMA. *Es sei $(\tilde{h}_\bullet^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ eine Folge allgemeiner Homologiefunktoren in der Kategorie $\mathcal{C} = \text{Mod}_R$ der (rechts-) R -Moduln, und es seien $\tau_\bullet^i: \tilde{h}_\bullet^i \rightarrow \tilde{h}_\bullet^{i+1}$ natürliche Transformationen, die mit den Randoperatoren ∂ verträglich sind. Dann ist auch der Kolimes*

$$\tilde{h}_\bullet(X) = \lim_{\rightarrow} \tilde{h}_\bullet^i(X)$$

ein allgemeiner Homologiefunktor. Wenn alle \tilde{h}_\bullet^i unter schwachen Äquivalenzen invariant sind, gilt das auch für \tilde{h}_\bullet .

BEWEIS. Die Stabilisierungsisomorphismen für \tilde{h}_\bullet^i induzieren im Kolimes einen Stabilisierungsisomorphismus σ für \tilde{h}_\bullet .

Es sei (X, A) ein gutes Paar, dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{h}_k^i(X/A) & \xleftarrow{q_*} & \tilde{h}_k^i(X) & \xleftarrow{\iota_*} & \tilde{h}_k^i(A) \\ \tau_k^i \downarrow & & \tau_k^i \downarrow & & \tau_k^i \downarrow \\ \tilde{h}_k^{i+1}(X/A) & \xleftarrow{q_*} & \tilde{h}_k^{i+1}(X) & \xleftarrow{\iota_*} & \tilde{h}_k^{i+1}(A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{h}_k(X/A) & \xleftarrow{q_*} & \tilde{h}_k(X) & \xleftarrow{\iota_*} & \tilde{h}_k(A) \end{array}$$

Wir überprüfen Exaktheit der Grenzsequenz bei X . Für jedes $\alpha \in \tilde{h}_k(A)$ existiert ein $\alpha^i \in \tilde{h}_k^i(A)$, das im Kolimes auf α abgebildet wird. Es gilt $(q_* \circ \iota_*)(\alpha^i) = 0 \in \tilde{h}_k^i(X/A)$, wegen Kommutativität also auch $(q_* \circ \iota_*)(\alpha) = 0 \in \tilde{h}_k(X/A)$.

Zu jedem $\xi \in \ker(q_*) \subset \tilde{h}_k(X)$ gibt es ein $\xi^i \in \tilde{h}_k^i(X)$, das im Kolimes auf ξ abgebildet wird, und ein $j \geq i$, so dass $\xi_j = (\tau_k^{j-1} \circ \dots \circ \tau_k^i)(\xi^i) \in \ker(q_*) \subset \tilde{h}_k^j(X)$. Folglich existiert $\alpha^j \in \tilde{h}_k^j(A)$ mit $\iota_*(\alpha^j) = \xi_j$. Das Bild α in $\tilde{h}_k(A)$ wird dann auf ξ abgebildet. Somit erhalten wir das Quotientenaxiom 5.34 (1'), und Natürlichkeit ist offensichtlich.

Zum Summenaxiom (3) betrachten wir $X = \bigvee_{j \in J} X_j$. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & \bigoplus \tilde{h}_\bullet^i(X_j) & & \\ & \nearrow & \downarrow & \xrightarrow{\oplus \iota_{j*}} & \\ \tilde{h}_\bullet^i(X_j) & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\cong} & \tilde{h}_\bullet^i(\bigvee X_j) \\ & \downarrow & \downarrow \iota_{j*} & & \downarrow \\ & & \bigoplus \tilde{h}_\bullet(X_j) & & \\ \tilde{h}_\bullet(X_j) & \xrightarrow{\quad} & \xrightarrow{\oplus \iota_{j*}} & & \tilde{h}_\bullet(\bigvee X_j) . \end{array}$$

Die untere Abbildung $\oplus \iota_{j*}$ ist surjektiv, da jedes Element $\xi \in \tilde{h}_\bullet(\bigvee X_j)$ von einem $\xi_i \in \tilde{h}_\bullet^i(\bigvee X_j)$ kommt, das ein Urbild $\sigma_i \in \bigoplus \tilde{h}_\bullet^i(X_j)$ hat. Für das Bild $\sigma \in \bigoplus \tilde{h}_\bullet(X_j)$ folgt $\oplus \iota_{j*}(\sigma) = \xi$.

Sei jetzt $\sigma \in \ker(\oplus \iota_{j*}) \subset \bigoplus \tilde{h}_\bullet(X_j)$. Dann liegt σ in einem endlichen Teil der direkten Summe, hat also zu einer endlichen Zeit i ein Urbild $\sigma_i \in \bigoplus \tilde{h}_\bullet^i(X_j)$. Es gibt ein $i' \geq i$, so dass $\oplus \iota_{j*}(\sigma_{i'}) = 0$, also folgt $\sigma_{i'} = 0 = \sigma$. Nach Proposition 5.34 ist \tilde{h} also ein allgemeiner Homologiefunktor.

Wenn wir schließlich annehmen, dass alle \tilde{h}_\bullet^i unter schwachen Äquivalenzen invariant sind, dann erhalten wir für jeden schwach zusammenziehbaren Raum Z und alle $k \in \mathbb{Z}$, dass

$$\tilde{h}_k(Z) = \varinjlim \tilde{h}_k^i(Z) = \varinjlim 0 = 0 . \quad \square$$

5.38. SATZ UND DEFINITION. Zu jedem Spektrum $\mathbb{E} = (E_i, s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ existiert ein allgemeiner reduzierter Homologiefunktor \tilde{E}_\bullet mit Werten in $\mathcal{A}b$, gegeben durch

$$\tilde{E}_k(X) = \varinjlim \pi_{k+i}^s(E_i \wedge X) \cong \varinjlim \pi_{k+i}(E_i \wedge X) ,$$

der unter schwachen Äquivalenzen invariant ist.

Man nennt \tilde{E}_\bullet den (reduzierten) Homologiefunktor zum Spektrum \mathbb{E} .

BEWEIS. Aus den Lemmata 5.35 und 5.37 und der Konstruktion der natürlichen Transformationen τ nach Definition 5.36 folgt, dass \tilde{E}_k ein reduzierter Kohomologiefunktor ist.

Die Abbildungen $\pi_{k+i}(E_i \wedge X) \rightarrow \pi_{k+i}^s(E_i \wedge X)$ liefern eine natürliche Abbildung

$$\varinjlim \pi_{k+i}(E_i \wedge X) \longrightarrow \varinjlim \pi_{k+i}^s(E_i \wedge X) = \tilde{E}_k(X) \quad (*)$$

Für die Umkehrabbildung repräsentieren wir $a \in \tilde{E}_k(X)$ durch ein Element $a_i \in \pi_{k+i}^s(E_i \wedge X)$, und dieses wiederum durch $a_{i,\ell} \in \pi_{k+i+\ell}(S^\ell E_i \wedge X)$. Betrachte dazu das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \dots & & \\ & & & & \nearrow & & \\ & & & & \pi_{k+2}(S^2 E_0 \wedge X) & & \dots \\ & & & & \nearrow^S & \searrow_{(S s_0 \wedge \text{id}_X)_*} & \\ \pi_{k+1}(S E_0 \wedge X) & & \pi_{k+2}(S E_1 \wedge X) & & \dots & & \\ \nearrow^S & \searrow_{(s_0 \wedge \text{id}_X)_*} & \nearrow^S & \searrow_{(s_1 \wedge \text{id}_X)_*} & \nearrow^S & \searrow_{(s_2 \wedge \text{id}_X)_*} & \\ \pi_k(E_0 \wedge X) & & \pi_{k+1}(E_1 \wedge X) & & \pi_{k+2}(E_2 \wedge X) & & \dots \end{array}$$

Mehrfaches Anwenden der Stabilisierungsabbildungen s_\bullet liefert $a_{i+\ell,0} \in \pi_{k+i+\ell}(E_{i+\ell} \wedge X)$, welches das Bild von a_i in $\pi_{k+i+\ell}^s(E_{i+\ell} \wedge X)$ und damit ebenfalls $a \in \tilde{E}_k(X)$ repräsentiert. Dann bilden wir a auf das Bild von $a_{i+\ell,0}$ in $\text{colim } \pi_{k+i}(E_i \wedge X)$ ab, das liefert die Umkehrabbildung zu (*). \square

5.39. BEISPIEL. Das *Sphärenspektrum* \mathbb{S} ist definiert als $(S^i, s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, mit $s_i = \text{id}_{S^{i+1}}: SS^i \rightarrow S^{i+1}$. Es ist demnach ein Suspensionsspektrum. Der zugehörige Homologiefunktor besteht aus den stabilen Homotopiegruppen aus Folgerung 5.4. Wir erhalten also (noch) nichts Neues.

5.40. BEMERKUNG. Die obige Konstruktion ist sehr allgemein. Sie liefert uns im nächsten Abschnitt alle gewöhnlichen Homologiefunktoren mit Koeffizienten in $\mathcal{A}b$. Später lernen wir Spektren kennen, die verschiedene Bordismustheorien liefern.

Der Brownsche Darstellungssatz besagt, dass jeder allgemeine Homologiefunktor, der invariant unter schwachen Äquivalenzen und invariant unter gerichteten Kolimiten ist, von einem Spektrum herkommt. Dabei ist Invarianz unter gerichteten Kolimiten eine Verschärfung des Summenaxioms.

5.d. Das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum

Um die Existenz eines gewöhnlichen Homologiefunktors zu zeigen, müssen wir jetzt nur noch das passende Spektrum konstruieren. Da wir mit stabilen Homotopiegruppen starten, arbeiten wir jetzt in der Kategorie $\mathcal{A}b = \text{Mod}_{\mathbb{Z}}$ der abelschen Gruppen. Andere mögliche Konstruktionen gewöhnlicher Homologiefunktoren sind singuläre Homologie oder Garbenkohomologie.

Am Schluss dieses Abschnitts betrachten wir die so konstruierten Homologiefunktoren $\tilde{H}_\bullet(\cdot; G)$ genauer und beweisen insbesondere den Satz von Hurewicz, der die erste nicht verschwindende Homotopiegruppe eines zusammenhängenden Raumes mit der entsprechenden Homologiegruppe $\tilde{H}_k(X; \mathbb{Z})$ in Verbindung bringt. Als Folgerung erhalten wir auch eine homologische Fassung des Satzes 4.46 von Whitehead.

5.41. DEFINITION. Es sei G eine Gruppe und $n \geq 1$. Ein *Eilenberg-Mac Lane-Raum* zu G im Grad n ist ein punktierter CW-Komplex $K(G, n)$ in \mathcal{T}_+ mit $\pi_k(K(G, n)) = 0$ für alle $k \neq n$ zusammen mit einem Isomorphismus

$$\varphi: \pi_n(K(G, n)) \xrightarrow{\cong} G. \quad (1)$$

Ein *Eilenberg-Mac Lane-Spektrum* zur abelschen Gruppe G ist ein Spektrum $\mathbb{H}G = (HG_n, s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, für das ein $n_0 \geq 1$ existiert, so dass HG_n für alle $n \geq n_0$ ein Eilenberg-Mac Lane-Raum mit einem Isomorphismus $\varphi_n: \pi_n(HG_n) \rightarrow G$ ist, und so dass für alle $n \geq n_0$ das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(HG_n) & \xrightarrow[\cong]{S} & \pi_{n+1}(SHG_n) \\ \varphi_n \downarrow \cong & & s_{n*} \downarrow \cong \\ G & \xleftarrow[\cong]{\varphi_{n+1}} & \pi_{n+1}(HG_{n+1}). \end{array} \quad (2)$$

Ein Eilenberg-Mac Lane-Raum hat nur eine nicht verschwindende Homotopiegruppe. Dabei sind die Isomorphismen φ wichtig. Die Notationen $K(G, n)$ und HG_n sind beide gebräuchlich, die letztere passt etwas besser zu unser Notation für Spektren.

Nach Proposition 3.5 kann es Eilenberg-Mac Lane-Räume zu nicht-abelschen Gruppen nur in Grad 1 geben. Da diese in manchen Bereichen der Topologie und Geometrie recht wichtig sind, haben wir sie hier bereits mitdefiniert.

5.42. BEISPIEL. Wir können bereits einige Eilenberg-Mac Lane-Räume angeben.

- (1) Der Kreis S^1 ist ein $K(\mathbb{Z}, 1)$ nach Beispiel 3.27.
- (2) Nach Übung 3.104 ist der n -Torus $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ ein $K(\mathbb{Z}^n, 1)$.

- (3) Sei allgemeiner (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtpositiver Schnittkrümmung, dann ist ihre universelle Überlagerung \tilde{M} nach dem Satz von Hadamard-Cartan zusammenziehbar. Nach Folgerung 3.26 ist M dann ein $K(\pi_1(M), 1)$.
- (4) Der reell projektive Raum $\mathbb{R}P^\infty$ ist ein $K(\mathbb{Z}/2, 1)$.
- (5) Der komplex projektive Raum $\mathbb{C}P^\infty$ ist ein $K(\mathbb{Z}, 2)$ nach Beispiel 5.21 und Lemma 5.14 (4).
- (6) Der quaternionisch projektive Raum $\mathbb{H}P^\infty$ ist kein Eilenberg-Mac Lane-Raum, denn es gilt $\pi_4(\mathbb{H}P^\infty) \cong \pi_4(S^4) = \mathbb{Z}$ und $\pi_5(\mathbb{H}P^\infty) \cong \pi_5(S^4) = \mathbb{Z}/2 \neq 0$ nach Satz 3.99.

5.43. SATZ. Zu jeder abelschen Gruppe G existiert ein Eilenberg-MacLane-Spektrum (HG_\bullet, s_\bullet) aus CW-Komplexen mit $HG_n = 0$ für alle $n \leq 0$ und $HG_n \cong K(G, n)$ für alle $n \geq 1$. Diese können so konstruiert werden, dass HG_n außer dem Basispunkt keine Zellen der Dimension $< n$ enthält. Zu jedem Homomorphismus $f: G \rightarrow K$ existiert eine bis auf Homotopie eindeutige Familie von Abbildungen $Hf_n: HG_n \rightarrow HK_n$ zu (HG_\bullet, s_\bullet) und (HK_\bullet, t_\bullet) , so dass die folgenden Diagramme für alle $n \geq 1$ kommutieren.

$$\begin{array}{ccc}
 SHG_{n-1} & \xrightarrow{s_{n-1}} & HG_n \\
 SHf_{n-1} \downarrow & & \downarrow Hf_n \\
 SHK_{n-1} & \xrightarrow{t_{n-1}} & HK_n
 \end{array}
 \quad \text{und} \quad
 \begin{array}{ccc}
 \pi_n(HG_n) & \xrightarrow{\cong} & G \\
 Hf_{n*} \downarrow & & \downarrow f \\
 \pi_n(HK_n) & \xrightarrow{\cong} & K
 \end{array}$$

Aus der zweiten Aussage folgt insbesondere, dass die einzelnen Räume HG_n bis auf Homotopieäquivalenz und die einzelnen Abbildungen s_n bis auf Homotopie eindeutig bestimmt sind. Außerdem ist die Zuordnung $G \rightsquigarrow (HG_\bullet, s_\bullet)$ fast funktoriell: seien $f: G \rightarrow K$ und $g: K \rightarrow L$ Homomorphismen abelscher Gruppen, dann sind die Abbildungen $H(g \circ f)$ und $Hg \circ Hf$ homotop. Man beachte, dass wir bei Hf_\bullet nicht von „Abbildungen von Spektren“ sprechen — dieser Begriff hat später eine andere, allgemeinere Bedeutung.

BEWEIS. Unsere Konstruktion lehnt sich an den Beweis des CW-Approximationssatzes 4.51 an. Wir starten mit $HG_n = \text{pt}$ für alle $n \leq 0$.

Sei jetzt $n \geq 1$ und HG_{n-1} bereits konstruiert. Wir konstruieren ein CW-Paar (HG_n, SHG_{n-1}) und definieren $s_{n-1}: SHG_{n-1} \rightarrow HG_n$ als Inklusionsabbildung. Im Fall $n = 1$ wählen wir $\text{pt} = SHG_0$ als 0-Skelett. Als Indexmenge J_1^1 wählen wir eine Erzeugermenge von G und erhalten

$$HG_1^1 = \bigvee_{j \in J_1^1} S^1 \quad \text{und} \quad \pi_1(HG_1^1) = \prod_{j \in J_1^1} \mathbb{Z}.$$

Als J_1^2 wählen wir eine Menge von Relationen, das sind Erzeuger von $\ker(\pi_1(HG_1^1) \rightarrow G)$ als Normalteiler in $\pi_1(HG_1^1)$, siehe Satz 2.52. Wir erhalten HG_1^2 durch entsprechendes Ankleben von 2-Zellen. Anschließend kleben wir induktiv k -Zellen für $k \geq 3$ so an, dass $\pi_{k-1}(HG_1) \cong \pi_{k-1}(HG_1^k) = 0$. Wegen Folgerung 4.44 existiert der in Definition 5.41 (1) verlangte Isomorphismus

$$\varphi: \pi_1(HG_1) \cong \pi_1(HG_1^2) \rightarrow G.$$

Im Fall $n = 2$ ist die Abbildung $S: \pi_1(HG_1) \rightarrow \pi_2(SHG_1)$ nach dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.74 surjektiv. Nach Folgerung 3.78 gilt

$$\pi_2(S(HG_1^1)) = \pi_2^s(S(HG_1^1)) \cong \bigoplus_{j \in J_1^1} \pi_2^s(S^2) \cong \bigoplus_{j \in J_1^1} \mathbb{Z},$$

und diese Gruppe bildet surjektiv auf G ab. Für jedes $j \in J_1^2$ realisiert $S\varphi_j^2: S^2 \rightarrow S(HG_1^1)$ dieselbe Relation in G wie bei der Konstruktion von HG_1^2 . Daher ist die Abbildung $\pi_2(SHG_1) \rightarrow \pi_2(HG_2)$ sogar ein Isomorphismus. Indem wir Zellen der Dimension ≥ 4 an SHG_1 ankleben, erhalten einen $K(G, 2)$ zusammen mit dem kommutativen Diagramm in Definition 5.41 (2) für $n = 1$.

Für $n \geq 3$ ist HG_{n-1} nach Voraussetzung ein $K(G, n-1)$ und daher $(n-2)$ -zusammenhängend. Daher ist die Abbildung $\pi_{k-1}(HG_{n-1}) \rightarrow \pi_k(SHG_{n-1})$ nach dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.74 ein Isomorphismus für $k \leq 2n-3 \geq n$ und surjektiv für $k = 2n-2$, so dass $\pi_k(SHG_{n-1}) = \pi_{k-1}(HG_{n-1}) = 0$ für alle $k \leq 2n-2$ mit Ausnahme von $k = n$. Wir erhalten also einen $K(G, n)$, indem wir Zellen der Dimension $\geq 2n$ ankleben. Der Isomorphismus $\varphi_n: \pi_n(SHG_{n-1}) \cong \pi_n(HG_n) \rightarrow G$ ist durch das Diagramm in Definition 5.41 (2) bereits bestimmt.

Seien jetzt Eilenberg-Mac Lane-Spektren $\mathbb{H}G = (HG_n, s_n)$ und $\mathbb{H}K = (HK_n, t_n)$ wie im Satz gegeben. Wir nehmen zunächst an, dass $\mathbb{H}G = (HG_n, s_n)$ wie oben konstruiert wurde. Dann setzen wir $Hf_n = 0: \text{pt} \rightarrow HK_n$ für $n \leq 0$. Für $n = 1$ wählen wir zu jeder 1-Zelle e_k^1 einen Repräsentanten $\gamma: S^1 \rightarrow HK_1$ des Bildes des entsprechenden Erzeugers von G unter f in $\pi_1(HK_1) = K$ und definieren dadurch

$$Hf_1^1: HG_1^1 = \bigvee_{j \in J^1} S^1 \rightarrow HK_1 .$$

Sei φ_j^2 die Anklebeabbildung einer 2-Zelle e_j^2 von HG . Da f ein Gruppenhomomorphismus ist, ist dann $Hf_1^1 \circ \varphi_j^2$ in HK_1 zusammenziehbar, und wir können Hf_1^1 zu $Hf_1^2: HG_1^2 \rightarrow HK_1$ ausdehnen. Da HK_1 ein $K(K, 1)$ ist, können wir Hf_1 induktiv auf allen höheren Skeletten definieren. Nach Konstruktion kommutiert das rechte Diagramm im Satz für $n = 1$.

Sei jetzt $n \geq 2$. Nach Konstruktion erhalten wir zunächst eine Abbildung

$$SHf_{n-1}: SHG_{n-1} \longrightarrow SHK_{n-1} \xrightarrow{t_{n-1}} HK_n ,$$

diese können wir wie oben Zelle für Zelle auf ganz HG_n ausdehnen, so dass das linke Diagramm im Satz kommutiert. Das rechte Diagramm kommutiert dann ebenfalls, denn nach Konstruktion und Definition 5.41 (2) kommutieren alle Seiten des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} \pi_n(SHG_{n-1}) & \xleftarrow{\cong} & \pi_{n-1}(HG_{n-1}) & & \\ \downarrow (s_{n-1})_* & \swarrow \cong & \downarrow \varphi & \searrow \cong & \\ \pi_n(HG_n) & \xrightarrow{(SHf_{n-1})_*} & G & \xrightarrow{\cong} & \pi_{n-1}(HG_{n-1}) \\ \downarrow (Hf_n)_* & \downarrow \cong & \downarrow f & \downarrow \cong & \downarrow (Hf_{n-1})_* \\ \pi_n(SHK_{n-1}) & \xleftarrow{\cong} & \pi_{n-1}(HK_{n-1}) & & \\ \downarrow (t_{n-1})_* & \swarrow \cong & \downarrow \varphi & \searrow \cong & \\ \pi_n(HK_n) & \xrightarrow{\cong} & K & \xrightarrow{\cong} & \pi_{n-1}(HK_{n-1}) \end{array}$$

mit Ausnahme der vorderen.

Falls das Spektrum $\mathbb{H}G$ nicht wie oben konstruiert wurde, sei \mathbb{E} zu G wie oben konstruiert. Wir erhalten kommutierende Abbildungen

$$\begin{array}{ccccc} SHG_n & \longleftarrow & SE_n & \longrightarrow & SHK_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ HG_{n+1} & \longleftarrow & E_{n+1} & \longrightarrow & HK_{n+1} . \end{array}$$

Nach dem Satz 4.46 von Whitehead sind die Abbildungen $E_n \rightarrow HG_n$ Homotopieäquivalenzen, so dass wir auch eine passende Abbildung $HG_n \rightarrow HK_n$ erhalten.

Seien schließlich eine weitere Folge von Abbildungen $g_n: HG_n \rightarrow HK_n$ mit $g_n|_{SHG_{n-1}} = Sg_{n-1}$ und $g_{n*} = f: \pi_n(HG_n) \rightarrow \pi_n(HK_n)$ gegeben. Da $\pi_k(HK_n) = 0$ für alle $k \neq n$, lässt sich induktiv eine Familie von Homotopien $h_n: HG_n \times I \rightarrow HK_n$ zwischen Hf_n und g_n konstruieren. \square

Mit den so konstruierten Eilenberg-Mac Lane-Spektren können wir jetzt gewöhnliche Homologiefunktoren konstruieren. Wir fassen unsere bisherigen Ergebnisse in einem Satz zusammen.

5.44. SATZ. *Es sei G eine abelsche Gruppe.*

(1) Es existiert ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor $\tilde{H}_\bullet(\cdot; G): \mathcal{T}_+ \rightarrow \text{Ab}$ mit

$$\tilde{H}_k(X; G) = \varinjlim \pi_{k+\ell}^s(HG_\ell \wedge X) \cong \varinjlim \pi_{k+\ell}(HG_\ell \wedge X),$$

der das Dimensionsaxiom 5.2 (4) mit $\tilde{H}_0(S^0; G) = G$ erfüllt.

(2) In der Quillen-Modellstruktur ist jeder andere gewöhnliche reduzierte Homologiefunktor mit den obigen Eigenschaften zu $\tilde{H}_\bullet(\cdot; G)$ natürlich isomorph.

(3) Zu jedem Gruppenhomomorphismus $f: G \rightarrow K$ existiert eine natürliche Transformation $\tau_{f,\bullet}: \tilde{H}_\bullet(\cdot; G) \rightarrow \tilde{H}_\bullet(\cdot; K)$, so dass $\tau_{f,0}(S^0) = f: \tilde{H}_0(S^0; G) = G \rightarrow K = \tilde{H}_0(S^0; K)$.

BEWEIS. Die Existenzaussage (1) folgt aus den Sätzen 5.38 und 5.43.

Zur Eindeutigkeit sei ein weiterer solcher Funktor \tilde{h}_\bullet und ein Raum Y in \mathcal{T} gegeben. Es sei $g: X \rightarrow Y$ eine CW-Approximation von Y , dann sind die Abbildungen $g_*: \tilde{h}_k(X) \rightarrow \tilde{h}_k(Y)$ und $g_*: \tilde{H}_k(X; G) \rightarrow \tilde{H}_k(Y; G)$ Isomorphismen und durch Satz 4.51 eindeutig festgelegt. Mit Satz 5.18 (2) erhalten wir den in (2) gesuchten natürlichen Isomorphismus.

Schließlich konstruieren wir die natürliche Transformation zu (3) durch

$$\tau_{f,k}(X) = \varinjlim ((Hf_\ell \wedge \text{id}_X)_*: \pi_{k+\ell}(HG_\ell \wedge X) \rightarrow \pi_{k+\ell}(HK_\ell \wedge X)). \quad \square$$

5.45. PROPOSITION. Sei HG_\bullet ein Eilenberg-Mac Lane-Spektrum zur abelschen Gruppe G . Für jeden topologischen Raum X gilt

$$\tilde{H}_k(X; G) = \pi_{k+\ell}(HG_\ell \wedge X) \quad \text{für alle } \ell \geq k + 2. \quad (1)$$

Falls X ein n -zusammenhängender Raum ist für ein $n \geq 0$, gilt sogar

$$\tilde{H}_k(X; G) = \begin{cases} 0 & \text{für alle } k \leq n, \text{ und} \\ \pi_{k+\ell}(HG_\ell \wedge X) & \text{für alle } k > n \text{ und alle } \ell \geq k - n. \end{cases} \quad (2)$$

BEWEIS. Da alle auftretenden Funktoren unter schwachen Äquivalenzen invariant sind, dürfen wir nach Satz 4.51 annehmen, dass X ein CW-Komplex ist. Wenn X ein n -zusammenhängender Raum ist, dürfen wir außerdem annehmen, dass das n -Skelett nur aus einem Punkt besteht. Andernfalls setzen wir $n = -1$ und $X^{-1} = \text{pt}$.

Wenn wir HG_ℓ wie im Beweis des Satzes 5.43 konstruieren, besteht HG_ℓ nur aus Zellen der Dimension $\geq \ell$. Also besteht $HG_\ell \wedge X$ nach der Konstruktion zu Proposition 4.54 (4) nur aus Zellen der Dimension $> n + \ell$. Es gilt

$$\pi_{k+\ell}(HG_\ell \wedge X) = 0 \quad \text{für alle } k \leq n,$$

also $\tilde{H}_k(X; G) = 0$ für alle $k \leq n$.

Es sei jetzt $k > n$. Da wir beim Übergang von SHG_ℓ zu $HG_{\ell+1}$ im Beweis von Satz 5.43 nur Zellen der Dimension $\geq 2(\ell + 1)$ ankleben, ist die Abbildung

$$SHG_\ell \wedge X \xrightarrow{s_\ell \wedge \text{id}_X} HG_{\ell+1} \wedge X$$

nach Folgerung 4.44 eine $(n + 2\ell + 2)$ -zusammenhängende Abbildung. Außerdem ist $HG_\ell \wedge X$ ein $(n + \ell)$ -zusammenhängender Raum. Nach dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.74 ist daher

$$\pi_{k+\ell}(HG_\ell \wedge X) \xrightarrow{\cong} \pi_{k+\ell}(SHG_\ell \wedge X) \xrightarrow{\cong} \pi_{k+\ell}(HG_{\ell+1} \wedge X) \quad \text{für alle } \ell \geq k - n > 0,$$

sofern $\ell \geq k - 2n$ und $\ell \geq k - n$. Mit Satz 5.44 (1) folgt (1) und der zweite Fall in (2). \square

5.46. BEMERKUNG. Somit brauchen wir einerseits die Räume HG_ℓ für beliebig große ℓ , um entsprechend hohe Homologiegruppen eines festen Raumes X zu beschreiben, andererseits brauchen wir nicht durch Einhängung zu stabilisieren. Schließlich hängt $\pi_{k+\ell}(HG_\ell \wedge X)$ wegen Folgerung 4.44 nur vom $(k+\ell-n)$ -Skelett von HG_ℓ ab, und da $\ell \geq k-n$, sogar nur vom 2ℓ -Skelett. Wir erhalten also einen isomorphen Homologiefunktor mit einem Spektrum \mathbb{E} , bei dem $E_n = \text{pt}$ für $n \leq 0$, bei dem $E_0 \setminus \text{pt}$ aus Erzeugern von G besteht, und bei dem E_n aus SE_{n-1} durch Ankleben von $2n$ -Zellen entsteht, so dass für $n \geq 1$ gilt

$$\pi_k(E_n) \cong \begin{cases} G & \text{für } k = n, \text{ und} \\ 0 & \text{für } k \neq n, k < 2n. \end{cases}$$

Sobald wir allerdings Kohomologiefunktoren konstruieren wollen, brauchen wir ein echtes ω -Spektrum wie in Definition 5.41.

Wegen Beispiel 5.42 (1) können wir $H\mathbb{Z}_1 = S^1$ wählen. Nach Proposition 5.45 hat $\tilde{H}_n(S^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ einen offensichtlichen Erzeuger

$$\varepsilon_n = [\text{id}_{S^{n+1}}] \in \pi_{n+1}(S^1 \wedge S^n) = \tilde{H}_n(S^n; \mathbb{Z}).$$

5.47. DEFINITION. Es sei X ein topologischer Raum und $n \geq 1$. Dann ist der *Hurewicz-Homomorphismus* $\eta_n: \pi_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z})$ definiert durch

$$\eta_n([f]) = f_*(\varepsilon_n) \in \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}).$$

Wegen der Homotopieinvarianz von $\tilde{H}_\bullet(\cdot; \mathbb{Z})$ ist η_n wohldefiniert. Seien $f, g: S^n \rightarrow X$ punktierte Abbildungen. Mit der Notation aus dem Beweis von Satz 5.11 gilt

$$\eta_n([f+g]) = (f+g)_*(\varepsilon_n) = (f \wedge g)_*(d_*\varepsilon_n) = f_*\varepsilon_n + g_*\varepsilon_n = \eta_n([f]) + \eta_n([g]),$$

also ist $\eta_n: \pi_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z})$ tatsächlich ein Homomorphismus.

Außerdem erinnern wir uns an die Abelisierung $G^{\text{ab}} = G/[G, G]$ aus Bemerkung 2.17 (2).

5.48. SATZ (Hurewicz). *Es sei X ein zusammenhängender topologischer Raum. Dann induziert η_1 einen Hurewicz-Isomorphismus*

$$\pi_1(X)^{\text{ab}} \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_1(X; \mathbb{Z}). \quad (1)$$

Wenn X ein n -zusammenhängender Raum ist mit $n \geq 1$, erhalten wir einen Isomorphismus

$$\eta_{n+1}: \pi_{n+1}(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{n+1}(X; \mathbb{Z}). \quad (2)$$

BEWEIS. Aussage (2) folgt aus dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.74 und Proposition 5.45 (2), da

$$\pi_{n+1}(X) \cong \pi_{n+2}(S^1 \wedge X) \cong \tilde{H}_{n+1}(X; \mathbb{Z}),$$

und η_{n+1} bildet $[f] \in \pi_{n+1}(X)$ auf

$$f_*[\varepsilon_{n+1}] = [(\text{id}_{S^1} \wedge f) \circ \text{id}_{S^{n+2}}] = [Sf] \in \pi_{n+2}(X \wedge S^1)$$

ab. Somit entspricht η_{n+1} gerade dem Einhängungsisomorphismus S aus dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.74.

In Aussage (1) erhalten wir wie oben den surjektiven Einhängungshomomorphismus

$$\eta_1 = S: \pi_1(X) \longrightarrow \pi_2(X \wedge S^1) \cong \tilde{H}_1(X; \mathbb{Z}).$$

Wir dürfen wieder annehmen, dass X ein CW-Komplex mit 0-Skelett $X^0 = \text{pt}$ ist. Indem wir Satz 2.52 wie im Beweis von Satz 5.43 benutzen, sehen wir, dass η_1 einen Isomorphismus $\pi_1(X)^{\text{ab}} \rightarrow \tilde{H}_1(X; \mathbb{Z})$ induziert. \square

5.49. BEMERKUNG. Den Satz von Hurewicz kann man auch „rückwärts“ anwenden: Wenn X zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist und $\tilde{H}_k(X; \mathbb{Z}) = 0$ für alle $k \leq n$ gilt, dann ist $\eta_{n+1}: \pi_{n+1}(X) \rightarrow \tilde{H}_{n+1}(X; \mathbb{Z})$ ein Isomorphismus. Dazu wenden wir den Satz von Hurewicz induktiv für alle $k \leq n + 1$ an.

Die Voraussetzung, dass X einfach zusammenhängend ist, ist dabei wichtig. Es gibt nämlich sogenannte *perfekte* Gruppen $G \neq 0$, was bedeutet, dass $[G, G] = G$ gilt und somit $G^{\text{ab}} = 0$. In diesem Fall ist $\tilde{H}_1(X; \mathbb{Z}) = 0$, aber $\eta_2: \pi_2(X) \rightarrow \tilde{H}_2(X; \mathbb{Z})$ ist im allgemeinen kein Isomorphismus.

5.50. BEMERKUNG. Sowohl der Satz von Hurewicz als auch die Tatsache, dass der zelluläre Randoperator allein durch die Inzidenzzahlen $d_{ij}^n \in \mathbb{Z}$ bestimmt ist, legen nahe, dass unter den gewöhnlichen Homologiefunktoren die *ganzzahlige Homologie* $\tilde{H}_\bullet(\cdot; \mathbb{Z})$ eine Sonderrolle annimmt. Man schreibt daher oft kurz $\tilde{H}_k(X)$ für $\tilde{H}_k(X; \mathbb{Z})$.

Zum Schluss formulieren wir den Satz 4.46 von Whitehead noch einmal mit Hilfe von Homologie um.

5.51. SATZ (Whitehead, homologische Fassung). *Es sei $f: Y \rightarrow X$ eine punktierte Abbildung von zusammenhängenden, einfach zusammenhängenden CW-Komplexen, so dass $f_*: \tilde{H}_k(Y) \rightarrow \tilde{H}_k(X)$ für alle $k \geq 1$ ein Isomorphismus ist. Dann ist f eine Homotopie-Äquivalenz.*

BEWEIS. Wir schreiben den Abbildungskegel Cf als $Zf \cup_Y CY$, dabei ist Zf zu X homotopieäquivalent. Indem wir den Durchschnitt Y etwas aufdicken, sehen wir mit dem Satz 2.42 von Seifert-van Kampen, dass Cf einfach zusammenhängend ist. Wegen der langen exakten Homologie-sequenz 5.2 (2) für das Paar (Zf, Y) gilt $\tilde{H}_k(Cf) = 0$ für alle k . Somit ist Cf nach Bemerkung 5.49 schwach zusammenziehbar.

Wir zeigen induktiv über n , dass dann auch $\pi_k(Zf, Y) = 0$ für alle $k \leq n$. Für $n = 1$ folgt das aus den Voraussetzungen. Sei die Behauptung für ein n richtig, dann ist $(Zf, Y) \rightarrow (Cf, *)$ eine $(n + 2)$ -zusammenhängende Abbildung nach Proposition 3.68. Also erhalten wir einen Isomorphismus $\pi_{n+1}(Zf, Y) \cong \pi_{n+1}(Cf) = 0$.

Aber dann sind $Y \hookrightarrow Zf$ und f schwache Äquivalenzen, somit ist f eine Homotopieäquivalenz nach dem Satz 4.46 von Whitehead. \square

Hätten wir anstelle von $\pi_1(X) = \pi_1(Y) = 0$ nur einen Isomorphismus $f_*: \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$ vorausgesetzt, so hätten wir zwar immer noch folgern können, dass Cf schwach zusammenziehbar ist, aber nicht, dass alle $\pi_k(Zf, Y)$ verschwinden.

5.e. Die abgeleiteten Funktoren Tor und Ext

Für den nächsten Abschnitt benötigen wir einige Konstruktion aus der homologischen Algebra, unter anderem Tensor- und Hom-Funktor und die daraus abgeleiteten Torsions- und Erweiterungsprodukte. Dabei beschränken wir uns der Einfachheit halber auf Moduln über Hauptidealringen, wobei wir speziell an $\mathcal{A}b = \text{Mod}_{\mathbb{Z}}$ denken.

Als erstes beschreiben wir das Tensorprodukt in der Kategorie Mod_R der Moduln über einem kommutativen Ring R mit Eins. Wir erinnern uns zunächst an den internen hom-Funktor

$$\text{hom}(M, N) = \text{hom}_R(M, N) = \{ f: M \rightarrow N \mid f \text{ ist linear.} \}$$

mit der Modulstruktur

$$(f + g)(m) = f(m) + g(m) \quad \text{und} \quad (rf)(m) = r f(m) = f(rm)$$

für alle $f, g \in \text{hom}(M, N)$, alle $m \in M$ und alle $r \in R$. Dann halten wir uns an die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes aus Bemerkung 4.28. Sie ist äquivalent zur charakteristischen Eigenschaft aus Beispiel 4.27 (2), wonach es zu jeder bilinearen Abbildung $B: L \times M \rightarrow N$ von

R -Moduln genau eine lineare Abbildung $b: L \otimes M \rightarrow N$ mit $B = b \circ \otimes$ gibt. Das motiviert die folgende Konstruktion.

5.52. DEFINITION. Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und es seien M und N Moduln über R . Dann definieren wir das *Tensorprodukt* $M \otimes_R N$ als den Quotient des Erzeugnisses der Elemente von $M \times N$ unter der Relation \sim , die erzeugt wird von

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2, n) &\sim (m_1, n) + (m_2, n), \\ (m, n_1 + n_2) &\sim (m, n_1) + (m, n_2) \\ \text{und} \quad (mr, n) &\sim (m, n)r \sim (m, nr) \end{aligned}$$

für alle $r \in R$, $m, m_1, m_2 \in M$ und $n, n_1, n_2 \in N$. Für die Äquivalenzklasse von (m, n) schreiben wir kurz $m \otimes n \in M \otimes N$. Dann erhalten wir eine Abbildung

$$\otimes: M \times N \longrightarrow M \otimes_R N \quad \text{mit} \quad (m, n) \longmapsto m \otimes n.$$

Wir lassen den Index R beim Tensorprodukt und beim Homomorphismenmodul weg, wenn klar ist, über welchem Ring wir arbeiten.

5.53. BEMERKUNG. Man überprüft jetzt, dass das Tensorprodukt alle Eigenschaften aus Definition 4.26 erfüllt, siehe Übung 5.100. Dazu sei $\text{hom}(M, N)$ der Raum der R -linearen Abbildungen von M nach N , betrachtet als R -Modul unter punktwiser Addition und Multiplikation mit Elementen aus R . Dann erfüllen Tensorprodukt und interner hom -Funktor die universellen Eigenschaften aus Bemerkung 4.28, was äquivalent ist zur Adjunktion $\cdot \otimes M \dashv \text{hom}(M, \cdot)$.

Das Tensorprodukt wird von Elementen der Form $m \otimes n$ erzeugt, diese heißen auch *zerlegbar*. Ein typisches Element von $M \otimes N$ ist somit eine Linearkombination solcher Elemente. Als Beispiel sei $R = \mathbb{k}$ ein Körper und V, W seien endlich dimensionale \mathbb{k} -Vektorräume. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus $\text{hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$. Elemente der Form $\alpha \otimes w$ entsprechen genau den Abbildungen $f: V \rightarrow W$ vom Rang ≤ 1 . Abbildungen von höherem Rang lassen sich nur als Linearkombinationen zerlegbarer Elemente von $V^* \otimes W$ darstellen.

5.54. BEMERKUNG. Aufgrund der universellen Eigenschaft von Produkt und Koprodukt gibt es natürliche Isomorphismen

$$\begin{aligned} M \otimes \bigoplus_{i \in J} N_i &\cong \bigoplus_{i \in J} M \otimes N_i, & \left(\bigoplus_{i \in J} M_i \right) \otimes M &\cong \bigoplus_{i \in J} M_i \otimes M, \\ \text{hom} \left(M, \prod_{i \in J} N_i \right) &\cong \prod_{i \in J} \text{hom}(M, N_i) & \text{und} \quad \text{hom} \left(\bigoplus_{i \in J} M_i, N \right) &\cong \prod_{i \in J} \text{hom}(M_i, N). \end{aligned}$$

Man beachte, dass Produkt und Koprodukt für endliche Indexmengen übereinstimmen.

Man nennt einen Funktor zwischen abelschen Kategorien *exakt*, wenn er exakte Sequenzen auf exakte Sequenzen abbildet. Äquivalent dazu erhält (vertauscht) ein ko- (kontra-) varianter exakter Funktor Kerne und Kokerne beliebiger Morphismen. Im allgemeinen sind weder Tensor- noch Hom-Funktoren exakt.

5.55. DEFINITION. Es seien \mathcal{C}, \mathcal{D} abelsche Kategorien. Ein kovarianter Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt *rechtsexakt*, wenn für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0 \tag{*}$$

in \mathcal{C} die Sequenz

$$FA' \longrightarrow FA \longrightarrow FA'' \longrightarrow 0$$

in \mathcal{D} exakt ist.

Ein kontravarianter Funktor $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt *linksexakt*, wenn

$$0 \longrightarrow GA'' \longrightarrow GA \longrightarrow GA'$$

für jede kurze exakte Sequenz (*) exakt ist.

Von den vier möglichen Kombinationen haben wir nur die zwei eingeführt, die wir im Folgenden benutzen wollen.

5.56. PROPOSITION. *Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und es sei M ein R -Modul. Dann ist Tensorieren mit M ein rechtsexakter kovarianter Funktor $\otimes M: \text{Mod}_R \rightarrow \text{Mod}_R$, und der Hom-Funktor $\text{hom}(\cdot, M): \text{Mod}_R \rightarrow \text{Mod}_R$ ist ein linksexakter kontravarianter Funktor.*

5.57. BEISPIEL. Betrachte die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0.$$

(1) Tensorieren mit $\mathbb{Z}/2$ liefert eine exakte Sequenz

$$\underbrace{\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2}_{\cong \mathbb{Z}/2} \xrightarrow{0\cdot} \underbrace{\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2}_{\cong \mathbb{Z}/2} \xrightarrow{\cong} \underbrace{\mathbb{Z}/2 \otimes \mathbb{Z}/2}_{\cong \mathbb{Z}/2} \longrightarrow 0,$$

und der linke Morphismus hat Kern $\mathbb{Z}/2 \neq 0$.

(2) Die Funktoren $\text{hom}(\mathbb{Z}/2, \cdot)$ und $\text{hom}(\cdot, \mathbb{Z})$ liefern exakte Sequenzen mit Kokern $\mathbb{Z}/2$:

$$0 \longrightarrow \underbrace{\text{hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z})}_{\cong 0} \longrightarrow \underbrace{\text{hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z})}_{\cong 0} \xrightarrow{0\cdot} \underbrace{\text{hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)}_{\cong \mathbb{Z}/2}$$

und

$$0 \longrightarrow \underbrace{\text{hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z})}_{\cong 0} \longrightarrow \underbrace{\text{hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})}_{\cong \mathbb{Z}} \xrightarrow{2\cdot} \underbrace{\text{hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})}_{\cong \mathbb{Z}}.$$

Man kann die obigen Sequenzen in natürlicher Weise zu langen exakten Sequenzen fortsetzen. Dazu benötigt man die folgenden Begriffe, von denen wir wieder nur zwei explizit einführen wollen.

5.58. DEFINITION. Ein *kovarianter homologischer δ -Funktor* $(F_\bullet, \partial_\bullet): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ besteht aus einer Folge $(F_k)_{k \geq 0}$ von Funktoren $F_k: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und einer Folge von natürlicher Transformationen ∂_k , so dass für jede kurze exakte Sequenz (*) die natürliche Sequenz

$$\dots \longrightarrow F_1 A' \longrightarrow F_1 A \longrightarrow F_1 A'' \xrightarrow{\partial_1} F_0 A' \longrightarrow F_0 A \longrightarrow F_0 A'' \longrightarrow 0$$

in \mathcal{D} exakt ist.

Analog ordnet ein *kontravarianter kohomologischer δ -Funktor* $(G^\bullet, \delta^\bullet): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ jeder kurzen exakten Sequenz (*) in \mathcal{C} eine natürliche lange exakte Sequenz zu:

$$0 \longrightarrow G_0 A'' \longrightarrow G_0 A \longrightarrow G_0 A' \xrightarrow{\delta^0} G_1 A'' \longrightarrow G_1 A \longrightarrow G_1 A' \longrightarrow \dots$$

Somit ist ∂_k also eine natürliche Transformation zwischen zwei Funktoren von der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen in \mathcal{C} in die Kategorie \mathcal{D} ; in diesem Sinne ist auch die Natürlichkeit der Sequenz zu verstehen. Man beachte die Ähnlichkeit zwischen der obigen Definition und der Homologiesequenz aus Definition 5.2 (2). In der Konstruktion werden wir — wie in der CW-Homologie — Kettenkomplexe verwenden. Die folgende Definition geht analog für jede der vier möglichen Varianten von δ -Funktoren.

5.59. DEFINITION. Ein *Morphismus* $\tau_\bullet: (F_\bullet, \partial_\bullet) \rightarrow (G_\bullet, \partial_\bullet)$ zwischen kovarianten homologischen δ -Funktoren von \mathcal{C} nach \mathcal{D} ist eine Folge natürlicher Transformationen $\tau_k: F_k \rightarrow G_k$, so dass für jede kurze exakte Sequenz $(*)$ in \mathcal{C} und für alle $k \geq 1$ das folgende Diagramm in \mathcal{D} kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F_k A'' & \xrightarrow{\partial_k} & F_{k-1} A' \\ \tau_k \downarrow & & \downarrow \tau_{k-1} \\ G_k A'' & \xrightarrow{\partial_k} & G_{k-1} A' . \end{array}$$

Morphismen zwischen kontravarianten kohomologischen δ -Funktoren werden entsprechend definiert.

Ein kovarianter homologischer δ -Funktorkomplex $(F_\bullet, \partial_\bullet): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt *universell*, wenn es zu jedem kovarianten homologischen δ -Funktorkomplex $(G_\bullet, \partial_\bullet): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und jeder natürlichen Transformation $\tau_0: G_0 \rightarrow F_0$ einen eindeutigen Morphismus $\tau_\bullet: (G_\bullet, \partial_\bullet) \rightarrow (F_\bullet, \partial_\bullet)$ gibt, der τ_0 fortsetzt. Ein kontravarianter kohomologischer δ -Funktorkomplex $(G^\bullet, \delta^\bullet): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt *universell*, wenn es zu jedem kontravarianten kohomologischen δ -Funktorkomplex $(K^\bullet, \delta^\bullet): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und jeder natürlichen Transformation $\tau_0: G^0 \rightarrow K^0$ einen eindeutigen Morphismus $\tau_\bullet: (G^\bullet, \delta^\bullet) \rightarrow (K^\bullet, \delta^\bullet)$ gibt, der τ_0 fortsetzt.

Sei $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein rechtsexakter kovarianter Funktor. Ein *linksderivierter Funktor* zu F ist ein universeller kovarianter homologischer δ -Funktorkomplex $(F_\bullet, \partial_\bullet)$ mit $F_0 = F$. Sei $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein linksexakter kontravarianter Funktor. Ein *rechtsderivierter Funktor* zu G ist ein universeller kontravarianter kohomologischer δ -Funktorkomplex $(G^\bullet, \delta^\bullet)$ mit $G^0 = G$.

5.60. BEMERKUNG. Aufgrund der Universalität sind derivierte Funktoren bis auf natürliche Isomorphie eindeutig bestimmt. Die Notation (Indizes für „homologische“ Funktoren stehen unten, für „kohomologische“ Funktoren oben) und Bezeichnungen (alle Pfeile zeigen nach rechts, woraus sich die Bezeichnungen links-/rechtsexakt und links-/rechtsderiviert ableiten) stimmen mit dem allgemeinen Sprachgebrauch überein, und daher nicht immer mit unseren bisherigen Konventionen. In Zukunft werden wir die „Verbindungshomomorphismen“ ∂_\bullet beziehungsweise δ^\bullet in der Notation oft weglassen.

Den Begriff der freien Auflösung führen wir in Proposition 5.63 (1) ein.

5.61. SATZ UND DEFINITION. *Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Dann besitzt jeder rechtsexakte kovariante Funktor $F: \text{Mod}_R \rightarrow \text{Mod}_R$ einen linksderivierten Funktor $(F_\bullet, \partial_\bullet)$, und jeder linksexakte kontravariante Funktor $G: \text{Mod}_R \rightarrow \text{Mod}_R$ besitzt einen rechtsderivierten Funktor $(G^\bullet, \delta^\bullet)$. Für freie R -Moduln A gilt $F_k(A) = G^k(A) = 0$ für alle $k \geq 1$.*

Wenn R ein Hauptidealring ist, gilt $F_k = G^k = 0$ für alle $k \geq 2$. Sei $a: A_1 \rightarrow A_0$ eine freie Auflösung von A , dann existieren natürliche Isomorphismen

$$\begin{array}{ll} F_0 A \cong \text{coker}(Fa: FA_1 \rightarrow FA_0) , & F_1 A \cong \ker(Fa: FA_1 \rightarrow FA_0) , \\ G^0 A \cong \ker(Ga: GA_0 \rightarrow GA_1) , & \text{und} \quad G^1 A \cong \text{coker}(Ga: GA_0 \rightarrow GA_1) . \end{array}$$

Wenn $R = \mathbb{k}$ ein Körper ist, gilt $F_k = G^k = 0$ für alle $k \geq 1$, folglich sind F und G exakt.

5.62. DEFINITION. Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Der linksderivierte Funktor zu $\otimes_R M$ heißt das *Torsionsprodukt* $\text{Tor}_\bullet^R(\cdot, M)$. Der rechtsderivierte Funktor zu $\text{hom}_R(\cdot, M)$ heißt das *Erweiterungsprodukt* $\text{Ext}_R^\bullet(\cdot, M)$.

Wir werden nur den Spezialfall eines Hauptidealringes betrachten, wobei wir an $R = \mathbb{Z}$ und $\mathcal{C} = \text{Mod}_\mathbb{Z} = \text{Ab}$ denken. In diesem Fall schreiben wir Tor_R für Tor_1^R und Ext_R für Ext_R^1 ; für Tor_0^R und Ext_R^0 schreiben wir natürlich $\otimes_R M$ beziehungsweise $\text{hom}_R(\cdot, M)$. Für beliebige R dürfen wir jeden R -Modul M als abelsche Gruppe, also als \mathbb{Z} -Modul auffassen. Das liefert uns Funktoren $\otimes_\mathbb{Z} M, \text{hom}_\mathbb{Z}(\cdot, M), \text{Tor}_\mathbb{Z}(\cdot, M), \text{Ext}_\mathbb{Z}(\cdot, M): \text{Ab} \rightarrow \text{Mod}_R$.

5.63. PROPOSITION. *Es sei R ein Hauptidealring. Dann gilt*

- (1) *Jeder Untermodul eines freien Moduls ist frei. Sei insbesondere M ein R -Modul, dann existiert eine freie Auflösung a von M , das heißt, eine kurze exakte Sequenz der Form*

$$0 \longleftarrow M \xleftarrow{p} R^{\oplus E} \xleftarrow{a} R^{\oplus F} \longleftarrow 0.$$

- (2) *Sei $f: M \rightarrow N$ linear, sei $a: M_1 \rightarrow M_0$ eine freie Auflösung von M , und sei die untere Zeile im folgenden Diagramm exakt. Dann gibt es Abbildungen $f_i: M_i \rightarrow N_i$ für $i = 0, 1$, so dass das Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longleftarrow & M & \xleftarrow{p} & M_0 & \xleftarrow{a} & M_1 & \longleftarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \\ 0 & \longleftarrow & N & \xleftarrow{q} & N_0 & \xleftarrow{b} & N_1 & \longleftarrow & N_2 \longleftarrow \dots \end{array}$$

kommutiert.

- (3) *Je zwei Kettenabbildungen $f_\bullet: M_\bullet \rightarrow N_\bullet$ in (2) sind kettenhomotop.*

BEWEIS. Sei M ein R -Modul. Wir wählen eine Erzeugermenge E von M und erhalten eine kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \longleftarrow M \xleftarrow{f} R^{\oplus E} \longleftarrow \ker(f) \longleftarrow 0.$$

Wenn der Untermodul $\ker(f)$ von $R^{\oplus E}$ wieder frei ist, wählen wir eine Erzeugermenge F von $\ker(f)$ und haben somit eine freie Auflösung von M konstruiert. Die Elemente von E und F nennt man daher auch Erzeuger und Relationen

Sei also $U \subset R^{\oplus E}$ ein beliebiger Untermodul. Wir bezeichnen Potenzmengen mit \mathcal{P} und betrachten die Menge

$$\mathcal{F} = \{ (A, B) \mid A \subset E, B \text{ Basis von } U \cap R^{\oplus A} \} \subset \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(R^{\oplus E}).$$

Auf der Menge \mathcal{F} definieren wir eine Halbordnung \prec durch

$$(A, B) \prec (C, D) \quad \text{genau dann, wenn} \quad A \subset C \text{ und } B \subset D.$$

Um mit Zorns Lemma ein Element der Form $(E, F) \in \mathcal{F}$ zu finden, reicht es, die folgenden drei Behauptungen zu prüfen.

- Die Menge \mathcal{F} ist nicht leer, denn es gilt $(\emptyset, \emptyset) \in \mathcal{F}$.
- Es sei $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ eine *Kette*, das heißt, für (A, B) und $(C, D) \in \mathcal{K}$ gilt $(A, B) \prec (C, D)$ oder $(C, D) \prec (A, B)$. Dann setzen wir

$$I = \bigcup_{(A,B) \in \mathcal{K}} A \quad \text{und} \quad J = \bigcup_{(A,B) \in \mathcal{K}} B.$$

Man kann zeigen, dass J eine Basis von $U \cap R^{\oplus I}$ ist, und somit $(I, J) \in \mathcal{F}$. Außerdem gilt $(A, B) \prec (I, J)$ für alle $(A, B) \in \mathcal{K}$. Also ist (I, J) eine obere Schranke von \mathcal{K} .

- Sei schließlich $(A, B) \in \mathcal{F}$ mit $A \neq E$, dann suchen wir ein Element $(A', B') \in \mathcal{F}$, das unter „ \prec “ echt größer als (A, B) ist. Wir wählen einen Erzeuger $e \in E \setminus A$, und setzen $A' = A \cup \{e\}$. Falls $U \cap R^{\oplus A'} \subset R^{\oplus A}$, setzen wir $B' = B$ und sind fertig.

Ansonsten betrachten wir die Teilmenge

$$S = \{ s \in R \mid \text{es gibt } m \in R^{\oplus A} \text{ mit } m + es \in U \}.$$

Dann ist $\{0\} \neq S \subset R$ ein Ideal. Da R ein Hauptidealring ist, folgt $S = (s_0)$ für einen Erzeuger $0 \neq s_0 \in S$, also existiert $b_0 = m_0 + es_0 \in U$ mit $m_0 \in R^{\oplus A}$. Man kann zeigen, dass $B' = B \cup \{b_0\}$ eine Basis von $U \cap R^{\oplus A'}$ ist, also gilt $(A', B') \in \mathcal{F}$.

Damit ist (1) bewiesen.

Zu (2) seien E, F Basen von M_0 beziehungsweise M_1 . Da die Abbildung $N_0 \rightarrow N$ surjektiv ist, können wir zu jedem $e \in E$ ein Element $f_0(e) \in N_0$ mit $q(f_0(e)) = f(p(e))$ wählen. Da E eine Basis ist, haben wir auf dieser ein f_0 so definiert, dass das linke Quadrat im Diagramm in (2) kommutiert. Sei jetzt $v \in F$, dann folgt $f_0(a(v)) \in \ker q$, also existiert wegen Exaktheit ein $f_1(v) \in N_1$ mit $b(f_1(v)) = f_0(a(v))$. Somit haben wir f_1 so bestimmt, dass auch das rechte Quadrat im Diagramm in (2) kommutiert.

Zu (3) seien f_\bullet und f'_\bullet wie oben gegeben. Für jedes $e \in E$ gilt $f'_0(e) - f_0(e) \in \ker q$, also können wir $h_0(e) \in N_1$ so wählen, dass $f'_0(e) - f_0(e) = b(h_0(e))$. Für jedes $v \in N_1$ gilt dann

$$b(f'_1(v) - f_1(v) - h_0(a(v))) = (f'_0(a(v)) - f_0(a(v))) - (f'_0(a(v)) - f_0(a(v))) = 0,$$

also finden wir $h_1(v) \in N_2$, so dass

$$f'_1(v) - f_1(v) = h_0(a(v)) + b(h_1(v)). \quad \square$$

BEWEIS VON SATZ 5.61. Wir beschränken uns — wie schon gesagt — auf den Fall eines Hauptidealringes.

Sei F ein rechtsexakter Funktor und A ein R -Modul. Nach Proposition 5.63 (1) existiert eine freie Auflösung $a: A_1 \rightarrow A_0$. Wir betrachten den Komplex

$$0 \longleftarrow FA_0 \xleftarrow{Fa} FA_1 \longleftarrow 0,$$

und für $i = 0, 1$ setzen wir

$$F_i A = H_i(FA_\bullet, Fa).$$

Wegen Proposition 5.63 (2), (3), angewandt auf $f = \text{id}_A$, erhalten wir zu jeder anderen freien Auflösung eine eindeutige Abbildung zwischen den zugehörigen Homologien. Daher ist $F_i A$ bis auf eindeutige Isomorphismen wohldefiniert.

Angewandt auf $f: A \rightarrow B$ liefert Proposition 5.63 (2) eine Folge von Abbildungen $f_i: A_i \rightarrow B_i$, und daher

$$F_i f = f_{i*}: H_i(FA_\bullet, Fa) \rightarrow H_i(FB_\bullet, Fb).$$

Da die f_i nach Proposition 5.63 (3) bis auf Kettenhomotopie eindeutig bestimmt sind, ist $F_i f$ nach Bemerkung 5.24 wohldefiniert. Genauso beweist man auch die Funktorialität der F_i .

Da F rechtsexakt ist (beachte, dass unsere Pfeile gerade falsch herum zeigen), ist die Sequenz

$$0 \longleftarrow FA \longleftarrow FA_0 \xleftarrow{Fa} FA_1$$

exakt, und es folgt

$$FA = FA_0 / \text{im}(Fa) = H_0(FA_\bullet, \partial_\bullet) = F_0 A,$$

somit setzt die Folge F_\bullet den Funktor $F = F_0$ fort. Außerdem gilt

$$F_1(A) = \ker(Fa) \subset F(A_1).$$

Um zu zeigen, dass F_\bullet ein δ -Funktorkomplex ist, betrachte die kurze exakte Sequenz (*). Ähnlich wie im Beweis von Proposition 5.63 findet man freie Auflösungen von A' , A und A'' , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A'_1 & \hookrightarrow & A_1 & \twoheadrightarrow & A''_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow a' & & \downarrow a & & \downarrow a'' \\
 0 & \longrightarrow & A'_0 & \hookrightarrow & A_0 & \twoheadrightarrow & A''_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A' & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

exakte Zeilen hat. Da die oberen zwei Zeilen aus freien Modulen bestehen, spalten sie, und bleiben bei Anwendung von F exakt. Wir wenden F auf die oberen zwei Zeilen an und erhalten eine kurze exakte Sequenz von Komplexen. Das Schlangenlemma 5.25 liefert den Verbindungshomomorphismus

$$\partial: F_1 A'' = H_1(F A''_\bullet, F a'') \longrightarrow H_0(F A'_\bullet, F a') = F_0 A'.$$

Zur Natürlichkeit von ∂ sei ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A' & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' \\
 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

exakter Sequenzen gegeben. Wir wiederholen die obige Konstruktion für beide Sequenzen. Dann kann man zwischen den beiden Diagrammen von Auflösungen Morphismen so bestimmen, dass das gesamte Diagramm kommutiert. Die Natürlichkeit von ∂ folgt jetzt aus der Natürlichkeit des Verbindungshomomorphismus im Schlangenlemma.

Wenn A frei ist, wählen wir $A_0 = A$ und $A_1 = 0$, und erhalten $F_1(A) = 0$. Da jeder Vektorraum eine Basis hat, folgt insbesondere $F_1 = 0$, falls $R = \mathbb{k}$ ein Körper ist. Aber dann ist $F = F_0$ exakt.

Wir müssen noch Universalität beweisen. Das passiert in zwei Schritten. Sei zunächst $(F'_\bullet, \partial'_\bullet)$ ein weiterer δ -Funktorkomplex mit $F'_0 = F$. Wir wählen eine freie Auflösung $a: A_1 \rightarrow A_0$ von A . Anwenden von F_\bullet und F'_\bullet auf die zugehörige kurze exakte Sequenz liefert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \dots & \longrightarrow & F'_1(A_0) & \longrightarrow & F'_1(A) & \xrightarrow{\partial'_1} & F(A_1) & \xrightarrow{F a} & F(A_0) & \longrightarrow & F(A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \tau_A & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & F_1(A) & \xrightarrow{\partial} & F(A_1) & \xrightarrow{F a} & F(A_0) & \longrightarrow & F(A) & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$

Hierbei haben wir $F_1(A_0) = F_1(A_1) = 0$ benutzt. Da $F_1(A) = \ker(Fa)$, existiert ein eindeutiger Morphismus τ_A , so dass das obige Diagramm kommutiert. Indem wir Proposition 5.63 (2), (3) zum einen auf verschiedene freie Auflösungen von A , und zum anderen auf Morphismen $A \rightarrow B$ anwenden, sehen wir, dass $\tau: F_1 \rightarrow F'_1$ wohldefiniert und natürlich ist.

Wir betrachten wieder die kurze exakte Sequenz *. Nach Proposition 5.63 (2) erhalten wir eine Sequenzabbildung von einer beliebigen freien Auflösung von A'' nach *. Wir wenden $(F'_\bullet, \partial'_\bullet)$

und $(F_\bullet, \partial_\bullet)$ auf das resultierende kommutierende Diagramm kurzer exakter Sequenzen an und erhalten

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & F'_1(A''_0) & \longrightarrow & F'_1(A'') & \xrightarrow{\partial'_1} & F(A'_1) & \xrightarrow{Fa''} & F(A''_0) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & \searrow & \downarrow & \parallel & \downarrow & \searrow & \downarrow & \parallel & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & F'_1(A) & \xrightarrow{\tau_{A''}} & F'_1(A'') & \xrightarrow{\partial'_1} & F(A'_1) & \xrightarrow{Fa''} & F(A''_0) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \parallel & \downarrow & \parallel & \downarrow & \parallel & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & F_1(A'') & \xrightarrow{\partial} & F(A'_1) & \xrightarrow{Fa''} & F(A''_0) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \parallel & \downarrow & \parallel & \downarrow & \parallel & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & F_1(A'') & \xrightarrow{\partial} & F(A'_1) & \xrightarrow{Fa''} & F(A''_0) & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Zu zeigen ist die Kommutativität des vorderen mittleren Quadrats. Sie ergibt sich, da im mittleren Würfel alle anderen Seiten nach Konstruktion kommutieren. Daher liefert τ einen Morphismus von δ -Funktoren.

Sei schließlich $(G'_\bullet, \partial'_\bullet)$ ein beliebiger kovarianter homologischer δ -Funktoren. Die obige Konstruktion liefert einen Morphismus zum universellen kovarianten homologischen δ -Funktoren $(G_\bullet, \partial_\bullet)$ zu $G = G'_0$, den wir wie oben konstruieren. Eine natürliche Transformation $\tau: G \rightarrow F$, angewandt auf freie Auflösungen, liefert $\tau_\bullet: (G_\bullet, \partial_\bullet) \rightarrow (F_\bullet, \partial_\bullet)$, und zusammensetzen dieser Morphismen liefert den gesuchten Morphismus von δ -Funktoren $(G'_\bullet, \partial'_\bullet) \rightarrow (F_\bullet, \partial_\bullet)$. Damit ist alles über $(F_\bullet, \partial_\bullet)$ gezeigt, was wir beweisen wollten.

Sei jetzt $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein linksexakter kontravarianter Funktoren. Sei $a: A_1 \rightarrow A_0$ eine freie Auflösung von A . Wir wenden G an und erhalten G^\bullet als Kohomologie des entstehenden Komplexes. Die gleichen Argumente wie oben liefern eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow G(A) \rightarrow G(A_0) \xrightarrow{Ga} G(A_1) \rightarrow G^1(A) \rightarrow 0,$$

und für jede kurze exakte Sequenz (*) eine lange exakte Sequenz

$$0 \rightarrow G(A'') \rightarrow G(A) \rightarrow G(A') \xrightarrow{\delta} G^1(A'') \rightarrow G^1(A) \rightarrow G^1(A') \rightarrow 0.$$

Mit genau den gleichen kommutativen Diagrammen von kurzen exakten Sequenzen in \mathcal{C} wie oben beweisen wir analog alle gewünschten Eigenschaften von $(G^\bullet, \delta^\bullet)$. Aufgrund der Kontravarianz von G ergibt sich, dass $(G^\bullet, \delta^\bullet)$ ein universeller kontravarianter kohomologischer δ -Funktoren ist. \square

Nachdem wir die Existenz von Torsions- und Erweiterungsprodukt sichergestellt haben, geben wir noch einige Eigenschaften an. Beispiele werden in Übung 5.103 betrachtet.

5.64. PROPOSITION. Sei R ein Hauptidealring, und A, B seien R -Moduln.

- (1) Es gilt $\text{Tor}(A, B) = 0$, wenn A oder B frei ist.
- (2) Sei $0 \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz, dann existiert eine natürliche lange exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Tor}(A, B) \rightarrow \text{Tor}(A, C) \rightarrow \text{Tor}(A, D) \rightarrow A \otimes B \rightarrow A \otimes C \rightarrow A \otimes D \rightarrow 0.$$

- (3) Es gibt einen natürlichen Isomorphismus $\text{Tor}_R(A, B) \cong \text{Tor}_R(B, A)$.

BEWEIS. Wir lassen diesen Beweis als Übung 5.105. \square

5.65. BEMERKUNG. Es sei R wieder ein Hauptidealring und A ein R -Modul. Wir definieren den Torsionsuntermodul von A als

$$\text{Tor}_R A = \{ a \in A \mid ra = 0 \text{ für ein } r \in R \setminus \{0\} \}.$$

Ein Modul heißt A heißt Torsionsmodul, wenn $A = \text{Tor}_R A$. Der Name „Torsionsprodukt“ rührt daher, dass

$$\text{Tor}_R(A, B) = \text{Tor}_R(\text{Tor}_R A, \text{Tor}_R B),$$

das Torsionsprodukt „sieht“ also nur die Torsionsanteile der Faktoren. Für endlich erzeugte R -Moduln folgt das aus dem Elementarteilersatz und den expliziten Berechnungen einiger Torsionsprodukte in Übung 5.103. Den allgemeinen Fall wollen wir jetzt nicht untersuchen, siehe dazu aber Übung 5.106.

Ein R -Modul A heißt *divisibel*, wenn zu jedem $a \in A$ und jedem $r \in R \setminus \{0\}$ ein $b \in A$ mit $a = rb$ existiert. Beispielsweise sind \mathbb{Q} und \mathbb{Q}/\mathbb{Z} divisible \mathbb{Z} -Moduln, \mathbb{Z} und \mathbb{Z}/n jedoch nicht. Die folgenden Eigenschaften des Erweiterungsproduktes geben wir ohne Beweis an. Den rechtsderivierten Funktor in (3) definiert man analog zu Definition 5.59.

5.66. PROPOSITION. *Es sei R ein Hauptidealring, und A, B seien R -Moduln.*

- (1) *Es gilt $\text{Ext}_R(A, B) = 0$, wenn A frei oder B divisibel ist.*
- (2) *Es sei $0 \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz, dann existiert eine exakte Sequenz*

$$0 \rightarrow \text{hom}_R(A, B) \rightarrow \text{hom}_R(A, C) \rightarrow \text{hom}_R(A, D) \rightarrow \\ \rightarrow \text{Ext}_R(A, B) \rightarrow \text{Ext}_R(A, C) \rightarrow \text{Ext}_R(A, D) \rightarrow 0.$$

- (3) *Der rechtsderivierte kovariante Funktor zu $\text{hom}_R(A, \cdot)$ ist $\text{Ext}_R(A, \cdot)$.*

5.67. BEMERKUNG. Der Name „Erweiterungsprodukt“ rührt daher, dass $\text{Ext}_R(A, B)$ Erweiterungen von Moduln beschreibt. Eine Erweiterung von A durch B ist eine kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow 0$$

bis auf Isomorphie, wobei zwei solche Sequenzen isomorph heißen, wenn es eine Sequenzabbildung zwischen ihnen gibt, die auf A und B jeweils durch die Identität gegeben ist. Eine freie Auflösung von A liefert wegen Proposition 5.63 (2) eine bis auf Kettenhomotopie eindeutige Sequenzabbildung

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{a} & A_0 & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & A \longrightarrow 0. \end{array}$$

Insbesondere ist $f \in \text{hom}(A_1, B)$ bis auf ein Element $h \circ a$ mit $h \in \text{hom}(A_0, B)$ wohlbestimmt, wir erhalten also eine Klasse $[f] \in \text{coker}(\text{hom}(A_0, B) \rightarrow \text{hom}(A_1, B)) = \text{Ext}_R(A, B)$. Man kann zeigen, die obige Zuordnung eine Bijektion von der Menge der Erweiterungen nach $\text{Ext}_R(A, B)$ liefert.

5.f. Das Moore-Spektrum und ein universelles Koeffizienten-Theorem

Der Begriff „Koeffizienten“ hat in der Homologietheorie verschiedene Bedeutungen; eine, nämlich $(\tilde{h}_k(S^0))_{k \in \mathbb{Z}}$, haben wir in Abschnitt 5.a kennengelernt. In Abschnitt 5.b haben wir zelluläre Homologie betrachtet, hierbei handelte es sich um gewöhnliche Homologie mit Koeffizienten in einem Objekt M einer abelschen Kategorie \mathcal{C} . In diesem Abschnitt geht es darum, einen gegebenen Homologiefunktor zusätzlich mit Koeffizienten in einer gegebenen abelschen Gruppe A zu versehen. Im Falle der „gewöhnlichen“ Homologie mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen stimmen all diese Begriffe überein: wendet man die im Folgenden beschriebene Methode auf $\tilde{H}_\bullet = \tilde{H}_\bullet(\cdot; \mathbb{Z})$ und die Gruppe A an, so erhält man $\tilde{H}_\bullet(\cdot; A)$.

Mit den Methoden aus diesem Abschnitt können wir einen Zusammenhang zwischen den Funktoren $\tilde{h}_\bullet(\cdot; A)$ und \tilde{h}_\bullet mit und ohne Koeffizienten herstellen. Im nächsten Abschnitt sehen wir, dass dieses Resultat für gewöhnliche Homologie einen Spezialfall der Künneth-Formel für Produkte darstellt. Sei M ein R -Modul und X ein topologischer Raum. Man könnte vermuten, dass $H_k(X; M) \cong H_k(X) \otimes M$ gilt. Nach Beispiel 5.20 stimmt das beispielsweise für $X = \mathbb{C}P^n$ oder $X = \mathbb{H}P^n$. Für $X = \mathbb{R}P^n$, $R = \mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}/2$ liefert Beispiel 5.21 jedoch ein anderes Ergebnis.

5.68. DEFINITION. Ein *Moore-Raum* zur abelschen Gruppe A in Dimension $n \geq 1$ ist ein punktierter CW-Komplex $M(A, n)$ (oder kurz MA_n) in \mathcal{T}_+ mit abelscher Fundamentalgruppe, so dass $\tilde{H}_k(M(A, n)) = 0$ für alle $k \neq n$, zusammen mit einem Isomorphismus

$$\varphi: \tilde{H}_n(M(A, n)) \xrightarrow{\cong} A.$$

Ein *Moore-Spektrum* zur abelschen Gruppe A ist ein Spektrum $\mathbb{M}A = (MA_n, s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, für das ein n_0 existiert, so dass MA_n für alle $n \geq n_0$ ein Moore-Raum mit $\varphi_n: \tilde{H}_n(MA_n) \xrightarrow{\cong} A$ ist, so dass für alle $n \geq n_0$ das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_n(MA_n) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_{n+1}(SMA_n) \\ \varphi_n \downarrow & & \downarrow s_{n*} \\ A & \xleftarrow{\varphi_{n+1}} & \tilde{H}_{n+1}(MA_{n+1}). \end{array}$$

Der obere Pfeil im Diagramm bezeichnet den Isomorphismus aus Satz 5.10. Da $\pi_1(M(A, n))$ abelsch ist, folgt für $k \leq n$ aus dem Satz 5.48 von Hurewicz induktiv, dass

$$\pi_k(M(A, n)) \cong \tilde{H}_k(M(A, n)) \cong \begin{cases} M & \text{falls } k = n, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } k < n. \end{cases}$$

Insbesondere ist $M(A, n)$ stets $(n-1)$ -zusammenhängend nach Bemerkung 5.49.

Da die Räume MA_n CW-Komplexe sind, sind SMA_n und MA_{n+1} homotopieäquivalent für alle $n \geq 1$ nach dem homologischen Satz 5.51 von Whitehead. Insbesondere ist jedes Moore-Spektrum ein Suspensionsspektrum, und wir können $MA_{n_0+k} = S^k MA_{n_0}$ wählen.

5.69. BEISPIEL. Wir betrachten einfache Beispiele von Moore-Räumen.

- (1) Die Sphären S^k sind Moore-Räume für \mathbb{Z} in Dimension k , das Sphärenspektrum \mathbb{S} ist also ein Moore-Spektrum $\mathbb{M}\mathbb{Z}$.
- (2) Nach Beispiel 5.21 (1) ist die reelle projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$ ein Moore-Raum $M(\mathbb{Z}/2, 1)$.

5.70. PROPOSITION. *Es sei A eine abelsche Gruppe.*

- (1) *Dann existieren Moore-Räume MA_n für alle $n \geq 2$.*
- (2) *Sei $F: A \rightarrow B$ ein Gruppenhomomorphismus, sei $n \geq 2$, und seien MA_n, MB_n Moore-Räume mit Isomorphismen $\varphi_n: \tilde{H}_n(MA_n) \rightarrow A$ und $\psi_n: \tilde{H}_n(MB_n) \rightarrow B$, dann existiert eine Abbildung $f: MA_n \rightarrow MB_n$, so dass das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_n(MA_n) & \xrightarrow{f_*} & \tilde{H}_n(MB_n) \\ \varphi_n \downarrow & & \downarrow \psi_n \\ A & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

kommutiert.

- (3) *Die Moore-Räume MA_n sind für $n \geq 2$ bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig bestimmt.*

Diese Proposition ist das topologische Analogon zu Proposition 5.63 (1), (2). Man beachte, dass die Abbildung f im Allgemeinen nicht eindeutig durch F bestimmt ist; Proposition 5.63 (3) überträgt sich also nicht, siehe Übung 5.109. Insbesondere sind auch die Homotopieäquivalenzen zwischen zwei Moore-Räumen zur gleichen Gruppe A in der gleichen Dimension n nicht notwendigerweise bis auf Homotopie eindeutig. Es kommt noch schlimmer: es gibt keinen Funktor $\mathcal{A}b \rightarrow \mathcal{T}_+$, der jeder abelschen Gruppe A einen Moore-Raum MA_n zuordnet. Als Beispiel hat $\text{id}_{\mathbb{R}P^2}$ Ordnung 4 in $[\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}P^2]^s$, während 1 Ordnung 2 in $\text{hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ hat. Insbesondere erhalten wir kein Analogon zum Satz 5.43 über Eilenberg-MacLane-Räume.

BEWEIS. Sei A eine abelsche Gruppe. Es sei $a: \mathbb{Z}^{\oplus K} \rightarrow \mathbb{Z}^{\oplus J}$ eine freie Auflösung von A wie in Proposition 5.63 (1). Wir erhalten einen Moore-Raum MA_n zu A als CW-Komplex mit je einer n -Zelle e_j^n für jeden Erzeuger $j \in J$ von A , und je einer $(n+1)$ -Zelle e_k^{n+1} für jede Relation $k \in K$. Dabei ist die Verklebeabbildung φ_k so gewählt, dass

$$\varphi_{k*}: \tilde{H}^n(S^n) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow \tilde{H}^n\left(\bigvee_{j \in J} S^n\right) \cong \mathbb{Z}^{\oplus J}$$

den Erzeuger von \mathbb{Z} auf die entsprechende Relation in $\mathbb{Z}^{\oplus J}$ abbildet. Nach Satz 5.18 ist MA_n ein Moore-Raum mit $\tilde{H}_n(MA_n) \cong A$, und (1) ist bewiesen. Wir können MA_n auch als Abbildungskegel $C\varphi$ der Abbildung

$$\varphi: \bigvee_{k \in K} S^n \longrightarrow \bigvee_{j \in J} S^n$$

auffassen.

Zu (2) sei $F: A \rightarrow B$ gegeben, und sei a eine freie Auflösung von A wie oben. Sei $M(A, n)$ wie oben konstruiert, und sei $M(B, n)$ ein Moore-Raum zu B gemäß Definition 5.71. Mit Hilfe von F finden wir eine Abbildung

$$f_n: \bigvee_{j \in J} S^n \rightarrow M(B, n),$$

indem wir für jeden Erzeuger $j \in J$ von A die Abbildung f_n auf dem entsprechenden Summanden S^n durch einen Repräsentanten von $F(j) \in A \cong \pi_n M(B, n)$ vorgeben. Dann liegen alle Bilder von Relationen $k \in K$ unter a im Kern von $f_{n*}: \mathbb{Z}^{\oplus J} \cong \pi_n(\bigvee_{j \in J} S^n) \rightarrow \pi_n M(B, n)$, und wir können f_n zu $f: M(A, n) \rightarrow M(B, n)$ fortsetzen.

Sei insbesondere $F = \text{id}_A$, und sei $M(B, n)$ ein weiterer Moore-Raum zu $B = A$. Für $n \geq 2$ folgt (3) aus (2) und dem Satz 5.51 von Whitehead. \square

Als Beispiel schreiben wir

$$\mathbb{Q} = \langle e_1, e_2, \dots \rangle / \langle e_1 - 2e_2, e_2 - 3e_3, \dots \rangle,$$

wobei der Erzeuger e_k jeweils auf $\frac{1}{k!} \in \mathbb{Q}$ abgebildet wird. So erhalten wir einen Moore-Raum $M\mathbb{Q}_n$ mit je abzählbar vielen Zellen in den Dimensionen n und $n+1$.

Sei jetzt MA_n ein Moore-Raum zur abelschen Gruppe A in Dimension n . Nach Lemma 5.35 erhalten wir einen Homologiefunktor \tilde{h}_\bullet mit

$$\tilde{h}_k(X) = \tilde{H}_{k+n}(MA_n \wedge X)$$

für alle Räume X . Wir bestimmen die Koeffizienten von \tilde{h}_\bullet und erhalten

$$\tilde{h}_k(S^0) = \tilde{H}_{k+n}(MA_n) = \begin{cases} A & \text{falls } k = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 5.44 (2) liefert einen natürlichen Isomorphismus

$$\tilde{h}_\bullet \cong \tilde{H}_\bullet(\cdot; A).$$

Das heißt, sobald wir das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum zu \mathbb{Z} konstruiert haben, können wir alle weiteren gewöhnlichen Homologiefunktoren mit Werten in $\mathcal{A}b$ mit Hilfe von Moore-Räumen erhalten. Dazu reicht ein einzelner Moore-Raum aus; wir brauchen also nicht das gesamte Moore-Spektrum zu betrachten. Mit Beispiel 5.69 erhalten wir

$$\tilde{H}_k(X; \mathbb{Z}) = \tilde{H}_{k+n}(S^n \wedge X) \quad \text{und} \quad \tilde{H}_k(X; \mathbb{Z}/2) = \tilde{H}_{k+1}(\mathbb{R}P^2 \wedge X),$$

die erste Gleichung ist gerade Satz 5.10.

Die obige Konstruktion funktioniert wegen Lemma 5.35 für jeden allgemeinen Homologiefunktor. Das motiviert die folgende Definition, die wegen der Eindeutigkeitsaussage in Proposition 5.70 möglich ist. Da Abbildungen zwischen Moore-Räumen nicht bis auf Homotopie eindeutig durch ihre Wirkung auf der Homologie festgelegt sind, ist die folgende Definition für gewöhnliche Homologie $\tilde{H}_\bullet(\cdot; A)$ etwas schwächer als die bisherigen Konstruktionen.

5.71. DEFINITION. Es sei \tilde{h}_\bullet ein allgemeiner Homologiefunktor, und es sei MA_n ein Moore-Raum zur abelschen Gruppe A in Dimension n . Dann definieren wir \tilde{h}_\bullet -Homologie mit Koeffizienten in A für alle gut punktierten Räume X und alle k durch

$$\tilde{h}_k(X; A) = \tilde{h}_{k+n}(MA_n \wedge X) .$$

Beispielsweise können wir die stabilen Homotopiegruppen eines Raumes X mit $\mathbb{Z}/2$ -Koeffizienten definieren durch

$$\pi_k^s(X; \mathbb{Z}/2) = \pi_{k+1}^s(\mathbb{R}P^2 \wedge X) .$$

5.72. SATZ (Universelles Koeffiziententheorem für allgemeine Homologiefunktoren). *Es sei A eine abelsche Gruppe und $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$ ein allgemeiner reduzierter Homologiefunktor mit Werten in der Kategorie $\mathcal{A}b = \text{Mod}_{\mathbb{Z}}$. Dann existiert für alle k und alle X eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \tilde{h}_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow \tilde{h}_k(X; A) \longrightarrow \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(\tilde{h}_{k-1}(X), A) \longrightarrow 0 .$$

Nach Bemerkung 5.67 gibt es $\text{Ext}(\text{Tor}_{\mathbb{Z}}(\tilde{h}_{k-1}(X), A), \tilde{h}_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} A)$ -viele Erweiterungen der obigen Form. Dabei können die mittleren Terme verschiedener Erweiterungen isomorph sein, müssen es aber nicht. Wir können aus dem obigen Satz den Isomorphietyp von $\tilde{h}_k(X; A)$ also im Allgemeinen nicht ablesen. Dass es für gewöhnliche Homologie mit Einschränkungen doch geht, sehen wir im folgenden Abschnitt.

BEWEIS. Es bezeichne $a: \mathbb{Z}^{\oplus K} \rightarrow \mathbb{Z}^{\oplus J}$ eine freie Auflösung von A und $\varphi: \bigvee_K S^n \rightarrow \bigvee_J S^n$ die zugehörige Anklebeabbildung in der Konstruktion von $M(A, n)$ im Beweis von Proposition 5.70. Wir betrachten die Kofaserung

$$\bigvee_K S^n \wedge X \xrightarrow{\iota} Z\varphi \wedge X \xrightarrow{q} C\varphi \wedge X = MA_n \wedge X ,$$

siehe Übung 3.132, und erhalten die lange exakte Homologiesequenz

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \tilde{h}_{k+n}(\bigvee_K S^n \wedge X) &\xrightarrow{\tilde{h}_{k+n}\iota} \tilde{h}_{k+n}(Z\varphi \wedge X) \xrightarrow{\tilde{h}_{k+n}q} \tilde{h}_{k+n}(MA_n \wedge X) \xrightarrow{\partial_{k+n}} \\ &\longrightarrow \tilde{h}_{k+n-1}(\bigvee_K S^n \wedge X) \xrightarrow{\tilde{h}_{k+n-1}\iota} \tilde{h}_{k+n-1}(Z\varphi \wedge X) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Da diese Sequenz exakt und natürlich ist, erhalten wir eine natürliche kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{coker}(\tilde{h}_{n+k}\iota) \longrightarrow \tilde{h}_{k+n}(MA_n \wedge X) \longrightarrow \ker(\tilde{h}_{n+k-1}\iota) \longrightarrow 0 .$$

Der mittlere Term in dieser Sequenz ist $\tilde{h}_k(X; A)$ nach Definition 5.71.

Da $Z\varphi$ homotopieäquivalent zu $\bigvee_J S^n$ ist, erhalten wir mit dem Summenaxiom 5.2 (3) ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{h}_{k+n}(\bigvee_K S^n \wedge X) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_K \tilde{h}_{k+n}(S^n \wedge X) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{h}_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{\oplus K} \\ \tilde{h}_{k+n}\iota \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{id}_{\tilde{h}_k(X)} \otimes_{\mathbb{Z}} a \\ \tilde{h}_{k+n}(Z\varphi \wedge X) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_J \tilde{h}_{k+n}(S^n \wedge X) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{h}_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{\oplus J} . \end{array}$$

Aus dem Beweis von Satz 5.61 wissen wir, dass

$$\begin{aligned} \text{coker}(\tilde{h}_{n+k}\iota) &= \text{coker}(\text{id}_{\tilde{h}_k(X)} \otimes_{\mathbb{Z}} a) = \tilde{h}_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} A \\ \text{und} \quad \text{ker}(\tilde{h}_{n+k-1}\iota) &= \text{ker}(\text{id}_{\tilde{h}_{k-1}(X)} \otimes_{\mathbb{Z}} a) = \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(\tilde{h}_{k-1}(X), A). \end{aligned} \quad \square$$

5.73. BEISPIEL. Wir kennen die bereits die Homologie des reell projektiven Raumes aus Beispiel 5.21. Da

$$\text{Tor}(\mathbb{Z}, \cdot) = 0 \quad \text{und} \quad \mathbb{Z} \otimes (\mathbb{Z}/2) \cong \text{Tor}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) \cong (\mathbb{Z}/2) \otimes (\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$$

erhalten wir Beispiel 5.21 (2) aus 5.21 (1), genauer

$$\tilde{H}_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 \cong (\mathbb{Z}/2) \otimes (\mathbb{Z}/2) & \text{falls } k \text{ ungerade und } 0 < k < n, \\ \mathbb{Z}/2 \cong \text{Tor}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) & \text{falls } k \text{ gerade und } 0 < k \leq n, \\ \mathbb{Z}/2 \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2 & \text{falls } k = n \text{ ungerade ist,} \\ 0 \cong \text{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2) & \text{falls } k = n + 1 \text{ gerade ist, und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn andererseits Multiplikation mit 2 in A invertierbar ist, dann erhalten wir 5.21 (3), da dann

$$A \otimes (\mathbb{Z}/2) = \text{Tor}(A, \mathbb{Z}/2) = 0.$$

5.74. BEMERKUNG. In Folgerung 5.84 sehen wir, dass die Koeffizientensequenz in Satz 5.72 für gewöhnliche Homologie stets spaltet, so dass

$$\tilde{H}_k(X; A) \cong \tilde{H}_k(X) \otimes A \oplus \text{Tor}(\tilde{H}_{k-1}(X), A).$$

Man könnte daher denken, dass $\tilde{H}(\cdot, A)$ im Vergleich zur gewöhnlichen ganzzahligen Homologie keine zusätzliche Information enthält. In Übung 5.108 sehen wir ein Beispiel dafür, dass das nicht stimmt: es gibt Räume X, Y , Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ und eine Koeffizientengruppe A , so dass

$$\begin{aligned} f_* = g_*: \tilde{H}_k(X) &\longrightarrow \tilde{H}_k(Y) && \text{für alle } k, \text{ aber} \\ f_* \neq g_*: \tilde{H}_k(X; A) &\longrightarrow \tilde{H}_k(Y; A) && \text{für ein } k. \end{aligned}$$

Dieses Verhalten erklärt sich dadurch, dass die Spaltung in Folgerung 5.84 nicht natürlich ist.

5.g. Produkträume und die Künneth-Formel

In diesem Abschnitt betrachten wir die gewöhnliche Homologie von Produkten topologischer Räume. Dabei arbeiten wir in der Quillen-Modellstruktur, um alle beteiligten Räume durch CW-Komplexe zu ersetzen. Gleichzeitig nutzen wir aus, dass Produkte von CW-Komplexen in der Kategorie \mathcal{T} nach Proposition 4.54 (4) wieder CW-Komplexe sind. Wir bezeichnen die Kategorie der \mathbb{Z} -graduierten R -Moduln mit $\mathcal{G}rMod_R$, das ist gerade die volle Unterkategorie von $\mathcal{C}h_R$ der Kettenkomplexe mit trivialem Differential $d_{\bullet} = 0$.

5.75. DEFINITION. Es seien $(C_{\bullet}, d_{\bullet})$ und $(C'_{\bullet}, d'_{\bullet})$ zwei Kettenkomplexe über R , dann definieren wir ihr *Tensorprodukt* in $\mathcal{C}h_R$ und ihr *Torsionsprodukt* in $\mathcal{G}rMod_R$ durch

$$(C \otimes_R C')_k = \bigoplus_{a+b=k} C_a \otimes_R C_b \quad \text{und} \quad \text{Tor}_R(C, C')_k = \bigoplus_{a+b=k} \text{Tor}_R(C_a, C'_b).$$

Auf dem Tensorprodukt betrachten wir den Randoperator

$$d_{\otimes, k} = \sum_{a+b=k} (d_a \otimes \text{id}_{C'_b} + (-1)^a \text{id}_{C_a} \otimes d'_b).$$

Die Vorzeichen in d_{\otimes} sind so gewählt, dass

$$d_{\otimes, k} \circ d_{\otimes, k+1} = 0 .$$

Das Ziel dieses Abschnitts ist der folgende Satz. Dabei fassen wir $H_{\bullet}(X; R)$ und $H_{\bullet}(Y; R)$ wieder als Objekte von $\mathcal{G}rMod_R$ auf.

5.76. SATZ (Topologische Künneth-Formel). *Es seien X, Y gut punktierte topologische Räume und R ein Hauptidealring. Dann existiert eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow (\tilde{H}(X; R) \otimes_R \tilde{H}(Y; R))_k \longrightarrow \tilde{H}_k(X \wedge Y; R) \longrightarrow (\mathrm{Tor}_R(\tilde{H}(X; R), \tilde{H}(Y; R)))_{k-1} \longrightarrow 0$$

für alle k . Diese Sequenz spaltet, aber nicht auf natürliche Weise.

Wir erinnern uns an die unreduzierte Homologie $H_{\bullet}(X; R) = \tilde{H}_{\bullet}(X_+; R)$ aus Bemerkung 5.5.

5.77. FOLGERUNG. *Es seien X, Y topologische Räume und R ein Hauptidealring. Dann existiert eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow (H(X; R) \otimes_R H(Y; R))_k \longrightarrow H_k(X \times Y; R) \longrightarrow (\mathrm{Tor}_R(H(X; R), H(Y; R)))_{k-1} \longrightarrow 0 ,$$

für alle k . Diese Sequenz spaltet, aber nicht auf natürliche Weise.

Aufgrund der Bemerkungen 5.5 und 5.65 stimmen die Tor_R -Terme in den Sequenzen aus 5.76 und 5.77 überein.

BEWEIS. Wir ersetzen X und Y im obigen Satz durch X_+ und Y_+ und nutzen die Beziehung $(X \times Y)_+ = X_+ \wedge Y_+$, so dass

$$H_{\bullet}(X \times Y; R) = \tilde{H}_{\bullet}((X \times Y)_+; R) = \tilde{H}_{\bullet}(X_+ \wedge Y_+; R) . \quad \square$$

5.78. FOLGERUNG. *Es sei \mathbb{k} ein Körper, dann existieren natürliche Isomorphismen*

$$(H(X; \mathbb{k}) \otimes_{\mathbb{k}} H(Y; \mathbb{k}))_k \cong H_k(X \times Y; \mathbb{k}) , \quad \text{und} \quad (1)$$

$$(\tilde{H}(X; \mathbb{k}) \otimes_{\mathbb{k}} \tilde{H}(Y; \mathbb{k}))_k \cong \tilde{H}_k(X \wedge Y; \mathbb{k}) , \quad \text{falls } X, Y \text{ gut punktiert sind.} \quad (2)$$

BEWEIS. Nach Satz 5.61 verschwindet in diesem Falls das Torsionsprodukt. \square

Der Beweis besteht aus zwei Schritten. Zunächst konstruieren wir einen Isomorphismus zwischen dem zellulären Kettenkomplex eines Produktes von CW-Komplexen und dem Tensorprodukt der zellulären Kettenkomplexe der Faktoren. Anschließend zeigen wir, dass die Homologie eines Tensorproduktes von Komplexen in einer kurzen exakten Sequenz mit Tensor- und Torsionsprodukt der Homologien der Faktoren steht.

5.79. PROPOSITION. *Es seien X und Y CW-Komplexe und R ein Ring. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$(\tilde{C}_{\bullet}^{\mathrm{CW}}(X \wedge Y; R), d_{\bullet}^{\mathrm{CW}}) \xrightarrow{\cong} (\tilde{C}_{\bullet}^{\mathrm{CW}}(X; R), d_{\bullet}^{\mathrm{CW}}) \otimes (\tilde{C}_{\bullet}^{\mathrm{CW}}(Y; R), d_{\bullet}^{\mathrm{CW}}) .$$

Der analoge Satz für den singulären Kettenkomplex ist der Satz von Eilenberg-Zilber, und der obige Isomorphismus heißt dann auch Alexander-Whitney-Abbildung .

BEWEIS. Nach Proposition 4.54 (4) ist $X \wedge Y$ in \mathcal{T}_+ wieder ein CW-Komplex. Wir betrachten die charakteristischen Abbildungen $\Phi_j^m: D^m \rightarrow X$ und $\Psi_k^n: D^n \rightarrow Y$ der Zellen e_j^m und e_k^n von X beziehungsweise Y für $j \in J^m, k \in K^n$. Dann sind

$$\Xi_{j,k}^{m+n} = \Phi_j^m \times \Psi_k^n: D^{m+n} \cong D^m \times D^n \longrightarrow X \times Y$$

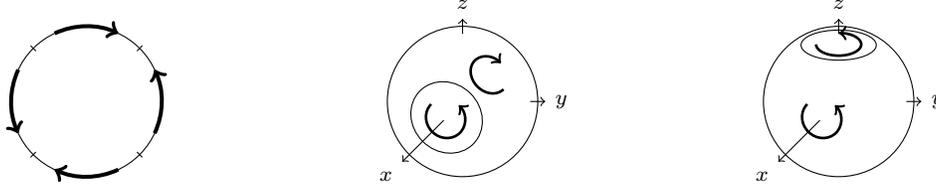


ABBILDUNG 5.2. Produkte von Zellen und ihre Ränder

die charakteristischen Abbildungen der Zellen $e_{j,k}^{m+n}$ von $X \times Y$. Wir erhalten den gesuchten Isomorphismus

$$\tilde{C}_p^{\text{CW}}(X \wedge Y; R) \cong R^{\oplus \bigcup_{m+n=p} (J^m \times K^n)} \cong \bigoplus_{m+n=p} R^{\oplus J^m} \otimes_R R^{\oplus K^n} \cong (\tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(X; R) \otimes \tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(Y; R))_p.$$

Wir zeigen Verträglichkeit mit d^{CW} . Die Verklebeabbildung $\xi_{j,k}^{m+n}$ ergibt sich als Pushout

$$\begin{array}{ccc} S^{m-1} \times D^n & \xrightarrow{\varphi_j^m \times \psi_k^n} & X^{m-1} \wedge Y^n \xrightarrow{\quad} (X \wedge Y)^{m+n-1} \\ & \xrightarrow{\quad} & \uparrow \xi_{j,k}^{m+n} \\ & \xrightarrow{\quad} & S^{m+n-1} \\ \uparrow & \nearrow \varphi_j^m \times \psi_k^n & \uparrow \\ S^{m-1} \times S^{n-1} & \xrightarrow{\quad} & D^m \times S^{n-1} \xrightarrow{\Phi_j^m \times \psi_k^n} X^m \wedge Y^{n-1} \end{array}$$

Insbesondere trifft $\xi_{j,k}^{m+n}$ nur zwei Typen von $(m+n-1)$ -Zellen von $X \wedge Y$, nämlich $e_{j',k}^{m+n-1}$ und $e_{j,k'}^{m+n-1}$, falls φ_j^m die Zelle $e_{j'}^{m-1}$ beziehungsweise ψ_k^n die Zelle e_k^{n-1} trifft. Seien $p_{j',k}^{m+n-1}, q_{j,k'}^{m+n-1}: (X \wedge Y)^{m+n-1} \rightarrow S^{m+n-1}$ die zugehörigen Kollaps-Abbildungen. Sei $p_{j'}^{m-1}: X^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ die Kollaps-Abbildung zu $e_{j'}^{m-1}$ und $q_k^n: Y^n \rightarrow S^n$ die Kollaps-Abbildung zu e_k^n , dann gilt

$$\begin{aligned} p_{j',k}^{m+n-1}|_{X^{m-1} \wedge Y^n} &= p_{j'}^{m-1} \wedge q_k^n, & p_{j',k}^{m+n-1}|_{X^m \wedge Y^{n-1}} &= 0, \\ q_{j,k'}^{m+n-1}|_{X^{m-1} \wedge Y^n} &= 0, & \text{und } q_{j,k'}^{m+n-1}|_{X^m \wedge Y^{n-1}} &= p_j^m \wedge q_{k'}^{n-1}. \end{aligned}$$

Die Abbildungen $p_{j',k}^{m+n-1} \circ \xi_{j,k}^{m+n}$ und $q_{j,k'}^{m+n-1} \circ \xi_{j,k}^{m+n}: S^{m+n-1} \rightarrow S^{m+n-1}$ aus Definition 5.17 entsprechen gerade den Verkettungen

$$\begin{aligned} S^{m+n-1} &\twoheadrightarrow S^{m+n-1}/(D^m \times S^{n-1}) \cong S_+^{m-1} \wedge S^n \xrightarrow{(p_{j'}^{m-1} \circ \varphi_j^m) \wedge \text{id}} S^{m-1} \wedge S^n \cong S^{m+n-1}, \\ S^{m+n-1} &\twoheadrightarrow S^{m+n-1}/(S^{m-1} \times D^n) \cong S^m \wedge S_+^{n-1} \xrightarrow{\text{id} \wedge (q_{k'}^{n-1} \circ \psi_k^n)} S^m \wedge S^{n-1} \cong S^{m+n-1}. \end{aligned}$$

Der Abbildungsgrad der rechten Abbildungen in der oberen Zeile ist gerade ein Koeffizient des Randoperators d_X^{CW} des Komplexes $C_\bullet^{\text{CW}}(X; R)$. In der unteren Zeile erhalten wir den analogen Koeffizienten von d_Y^{CW} . Es bleiben noch die Vorzeichen in Definition 5.75 zu erklären. Dazu betrachten wir die folgenden Verkettungen von Projektionen und überlegen uns wie in Abbildung 5.2, dass

$$\begin{aligned} \deg(S^{m+n-1} \twoheadrightarrow S_+^{m-1} \wedge S^n \twoheadrightarrow S^{m+n-1}) &= 1 \\ \text{und } \deg(S^{m+n-1} \twoheadrightarrow S^m \wedge S_+^{n-1} \twoheadrightarrow S^{m+n-1}) &= (-1)^m. \end{aligned}$$

Ähnlich beweist man Natürlichkeit, das heißt, Verträglichkeit mit zellulären Abbildungen. \square

5.80. SATZ (Algebraische Künneth-Formel). *Es seien (C_\bullet, d_\bullet) und (C'_\bullet, d'_\bullet) zwei Kettenkomplexe über einem Hauptidealring R , und C'_k sei frei für alle $k \in \mathbb{Z}$. Dann existiert eine natürliche kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow (H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R H(C'_\bullet, d'_\bullet))_n \xrightarrow{\mu} H_n((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (C'_\bullet, d'_\bullet)) \longrightarrow \\ \longrightarrow \text{Tor}_R(H(C_\bullet, d_\bullet), H(C'_\bullet, d'_\bullet))_{n-1} \longrightarrow 0$$

für alle n , mit $\mu([c] \otimes [c']) = [c \otimes c']$. Wenn auch C_ℓ für alle $\ell \in \mathbb{Z}$ frei ist, spaltet die obige Sequenz, aber nicht auf natürliche Weise.

Die obige Sequenz spaltet sogar, wenn nur einer der beiden Komplexe frei ist; das ist allerdings etwas schwerer zu zeigen.

BEWEIS. Es bezeichnen Z'_\bullet und B'_\bullet die Unterkomplexe der Zykel und Ränder von (C'_\bullet, d'_\bullet) , jeweils mit trivialem Randoperator. Nach Proposition 5.63 (1) sind alle Z'_k und $B'_k \subset C'_k$ frei. Wir erhalten spaltende kurze exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow Z'_k \longrightarrow C'_k \xrightarrow{d'_k} B'_{k-1} \longrightarrow 0 \quad (*)$$

$$\text{und} \quad 0 \longrightarrow (C_\bullet \otimes Z'_\bullet)_n \longrightarrow (C_\bullet \otimes C'_\bullet)_n \xrightarrow{\pm(\text{id}_C \otimes d')_n} (C_\bullet \otimes B'_\bullet)_{n-1} \longrightarrow 0,$$

etwa, indem wir für alle k ein Rechtsinverses $s_k: B'_{k-1} \rightarrow C'_k$ zu d'_k durch Wahl auf einer Basis von B'_{k-1} konstruieren. Das Vorzeichen von $(\text{id}_C \otimes d')_k$ hängt wie in Definition 5.75 vom Grad in C_\bullet ab. Die Komplexe Z'_\bullet und B'_\bullet haben keinen Randoperator und sind frei. Daher ist Tensorieren mit Z'_\bullet und B'_\bullet jeweils ein exakter Funktor, und es folgt

$$H_n((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (Z'_\bullet, 0)) \cong (H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R Z'_\bullet)_n \\ \text{und} \quad H_n((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (B'_\bullet, 0)) \cong (H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R B'_\bullet)_n.$$

Das Schlangenlemma 5.25 liefert die lange exakte Sequenz

$$\dots \longrightarrow (H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R Z'_\bullet)_n \longrightarrow H_n((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (C'_\bullet, d'_\bullet)) \longrightarrow \\ \longrightarrow (H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R B'_\bullet)_{n-1} \xrightarrow{\partial} (H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R Z'_\bullet)_{n-1} \longrightarrow \dots \quad (\dagger)$$

Wir betrachten $z \otimes b' \in (Z_\bullet \otimes B'_\bullet)_{n-1}$, um das Bild von $[z \otimes b'] = [z] \otimes b' \in H_{n-1}((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R B'_\bullet)$ unter ∂ zu bestimmen. Wie im Beweis von Lemma 5.25 wir finden ein Urbild $z \otimes c' \in (Z_\bullet \otimes C'_\bullet)_n$, da (*) spaltet, und erhalten anschließend

$$d_{\otimes, n}(z \otimes c') = \underbrace{(dz)}_{=0} \otimes c' \pm z \otimes (d'c') = z \otimes b' \in (Z_\bullet \otimes C'_\bullet)_{n-1}.$$

Da $b' \in B'_\bullet \subset Z'_\bullet$, ist $z \otimes b' \in Z_\bullet \otimes Z'_\bullet$ das gesuchte Urbild, und es folgt

$$\partial[z \otimes b'] = [z \otimes b'] = (\text{id}_{C_\bullet} \otimes j_{\bullet, n-1, *})[z \otimes b'] \in H_{n-1}((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R Z'_\bullet),$$

somit wird ∂ von der Inklusion $j_\bullet: B'_\bullet \rightarrow Z'_\bullet$ induziert.

Aus der langen exakten Sequenz (\dagger) erhalten wir also eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{coker}(\text{id}_{H(C_\bullet, d_\bullet)} \otimes j)_n \longrightarrow H_n((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (C'_\bullet, d'_\bullet)) \longrightarrow \ker(\text{id}_{H(C_\bullet, d_\bullet)} \otimes j)_{n-1} \longrightarrow 0.$$

Indem wir die freie Auflösung

$$0 \longleftarrow H_k(C'_\bullet, d'_\bullet) \longleftarrow Z'_k \xleftarrow{j_k} B'_k \longleftarrow 0$$

betrachten, schließen wir, dass

$$\begin{aligned} \text{coker}(\text{id}_{H(C_\bullet, d_\bullet)} \otimes j)_n &\cong (H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R H(C'_\bullet, d'_\bullet))_n \\ \text{und} \quad \text{ker}(\text{id}_{H(C_\bullet, d_\bullet)} \otimes j)_{n-1} &\cong \text{Tor}_R(H(C_\bullet, d_\bullet), H(C'_\bullet, d'_\bullet))_{n-1}. \end{aligned}$$

Damit ist die Exaktheit der Sequenz im Satz bewiesen. Da die Abbildung μ von der Inklusion

$$Z_n(C_\bullet \otimes Z'_\bullet) \cong (Z_\bullet \otimes Z'_\bullet)_n \longrightarrow Z_n(C_\bullet \otimes C'_\bullet)$$

induziert wird, hat sie die obige Gestalt.

Wenn C_\bullet und C'_\bullet frei sind, spaltet (*) und die analoge Sequenz für C_\bullet . Also finden wir Linksinverse $p_\bullet: C_\bullet \rightarrow Z_\bullet$ und $p'_\bullet: C'_\bullet \rightarrow Z'_\bullet$ zu den Inklusionen $Z_\bullet \rightarrow C_\bullet$ beziehungsweise $Z'_\bullet \rightarrow C'_\bullet$. Dann ist $(p \otimes p')_\bullet$ ein Linksinverses zu μ , falls wir zeigen können, dass μ auf $H_\bullet((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (C'_\bullet, d'_\bullet))$ wohldefiniert ist. Aber das ist der Fall, denn

$$(p \otimes p')(d_C \otimes C' \pm C \otimes d' C') \in B_\bullet \otimes Z'_\bullet + Z_\bullet \otimes B'_\bullet \subset \text{ker}(Z_\bullet \otimes Z'_\bullet \rightarrow H_\bullet \otimes H'_\bullet).$$

Also spaltet in die Sequenz in diesem Fall, und der Satz ist bewiesen. \square

BEWEIS VON SATZ 5.76. Es seien X, Y gut punktierte topologische Räume. Nach Satz 5.44 (1) ist gewöhnliche Homologie — so, wie wir sie dort konstruiert haben — unter schwachen Äquivalenzen invariant. Seien $X' \rightarrow X$ und $Y' \rightarrow Y$ CW-Approximationen, dann erhalten wir Isomorphismen

$$\tilde{H}_\bullet(X'; R) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_\bullet(X; R) \quad \text{und} \quad \tilde{H}_\bullet(Y'; R) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_\bullet(Y; R)$$

nach Bemerkung 5.33 (1). Nach Lemma 5.35 sind die Funktoren $\tilde{H}_\bullet(\cdot \wedge Y'; R)$ und $\tilde{H}_\bullet(X \wedge \cdot; R)$ ebenfalls unter schwachen Äquivalenzen invariant, und wir erhalten Isomorphismen

$$\tilde{H}_\bullet(X' \wedge Y'; R) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_\bullet(X \wedge Y'; R) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_\bullet(X \wedge Y; R).$$

Also reicht es, den Satz für CW-Komplexe zu beweisen.

Nach Satz 5.18 wird die gewöhnliche R -Homologie von X', Y' und $X' \times Y'$ durch deren zelluläre Kettenkomplexe berechnet, deren einzelne Moduln nach Konstruktion alle frei über R sind. Somit folgt die topologische Künneth-Formel jetzt aus dem „Eilenberg-Zilber“-Satz 5.79 und der algebraischen Künneth-Formel 5.80.

Zu Abbildungen $f: X \rightarrow Z$ und $g: Y \rightarrow W$ und CW-Approximationen $X' \rightarrow X, \dots, W' \rightarrow W$ erhalten wir nach Satz 4.51 zelluläre Abbildungen $f': X' \rightarrow Z'$ und $g': Y' \rightarrow W'$, so dass die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Z' & \longrightarrow & Z \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} Y' & \longrightarrow & Y \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ W' & \longrightarrow & W \end{array}$$

kommutieren. Wegen der Natürlichkeitsaussage in Proposition 5.79 kommutiert auch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(X' \wedge Y'; R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(X'; R) \otimes \tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(Y'; R) \\ (f' \wedge g')_\# \downarrow & & \downarrow f'_\# \otimes g'_\# \\ \tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(Z' \wedge W'; R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(Z'; R) \otimes \tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(W'; R) \end{array}$$

Wir betrachten zum Schluss das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
& & \cong \tilde{H}_\bullet(X; R) \otimes_R \tilde{H}_\bullet(Y; R) & \overset{\cong}{\dashrightarrow} & \tilde{H}_\bullet(X \wedge Y; R) \\
& & \cong \downarrow & & \downarrow (f \wedge g)_* \\
\tilde{H}_\bullet(X'; R) \otimes_R \tilde{H}_\bullet(Y'; R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_\bullet(X' \wedge Y'; R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_\bullet(X \wedge Y; R) \\
& & \downarrow f_* \otimes g_* & & \downarrow (f \wedge g)_* \\
& & \cong \tilde{H}_\bullet(Z; R) \otimes_R \tilde{H}_\bullet(W; R) & \overset{\cong}{\dashrightarrow} & \tilde{H}_\bullet(Z \wedge W; R) \\
& & \cong \downarrow & & \downarrow (f' \wedge g')_* \\
\tilde{H}_\bullet(X'; R) \otimes_R \tilde{H}_\bullet(Y'; R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_\bullet(X' \wedge Y'; R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_\bullet(X \wedge Y; R) \\
& & \downarrow f'_* \otimes g'_* & & \downarrow (f' \wedge g')_* \\
\tilde{H}_\bullet(Z'; R) \otimes_R \tilde{H}_\bullet(W'; R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_\bullet(Z' \wedge W'; R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_\bullet(Z \wedge W; R)
\end{array}$$

Die Quadrate rechts und links kommutieren wegen Satz 5.18, und da gewöhnliche Homologie von topologischen Räumen ein Funktor ist. Das vordere Quadrat kommutiert nach obiger Vorüberlegung, und da Homologie von Komplexen ein Funktor ist. Nach unserer Konstruktion der gestrichelten Pfeile kommutieren dann auch die restlichen Quadrate im Diagramm, und die Natürlichkeit der linken Abbildung in der Künneth-Sequenz ist gezeigt. Entsprechend beweist man auch die Natürlichkeit der rechten Abbildung. \square

5.81. BEMERKUNG. Da wir zelluläre Homologie hier zum ersten Mal benutzt haben, um neue Morphismen zu konstruieren, und nicht, um bereits bekannte Morphismen zu beschreiben, wollen wir uns kurz überlegen, dass die Abbildungen in der Künneth-Sequenz in Satz 5.76 nicht von der Wahl der CW-Struktur (also auch nicht von der CW-Approximation) abhängen. Hierbei ist entscheidend, dass alle benutzten Konstruktionen natürlich sind.

Seien also etwa zwei CW-Approximationen $f_i: X'_i \rightarrow X$ mit $i = 0, 1$, gegeben, dann existieren nach dem Satz 4.51 bis auf Homotopie eindeutige zelluläre Abbildungen $k: X'_0 \rightarrow X'_1$ und $\ell: X'_1 \rightarrow X'_0$, so dass die Abbildungen

$$f_0 \sim f_1 \circ k, \quad f_1 \sim f_0 \circ \ell, \quad \ell \circ k \sim \text{id}_{X'_0}, \quad \text{und} \quad k \circ \ell \sim \text{id}_{X'_1}$$

jeweils homotop sind. Mit ähnlichen Überlegungen wie im obigen Beweis kommutiert

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{H}_\bullet(X'_0; R) \otimes_R \tilde{H}_\bullet(Y'; R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_\bullet(X'_0 \wedge Y'; R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_\bullet(X \wedge Y; R) \\
& & \cong \downarrow & & \downarrow (k \wedge \text{id})_* \\
\tilde{H}_\bullet(X'_0; R) \otimes_R \tilde{H}_\bullet(Y'; R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_\bullet(X; R) \otimes_R \tilde{H}_\bullet(Y; R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_\bullet(X \wedge Y; R) \\
& & \downarrow k_* \otimes \text{id} & & \downarrow (k \wedge \text{id})_* \\
\tilde{H}_\bullet(X'_1; R) \otimes_R \tilde{H}_\bullet(Y'; R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_\bullet(X'_1 \wedge Y'; R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_\bullet(X \wedge Y; R) \\
& & \downarrow \ell_* \otimes \text{id} & & \downarrow (\ell \wedge \text{id})_*
\end{array}$$

Hieraus folgt, dass der hintere Pfeil unabhängig von der Wahl der CW-Approximation ist.

5.82. BEISPIEL. Wir betrachten den n -dimensionalen Torus $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$. Es gilt

$$H_k(S^n; R) \cong \begin{cases} R & \text{für } k = 0, n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

insbesondere sind die Homologiemoduln frei. Wegen Bemerkung 5.5, Proposition 5.64 (1) und Folgerung 5.77 gilt

$$H_k(T^n; R) \cong \begin{cases} R^{\binom{n}{k}} & \text{für } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{und} \quad \tilde{H}_k(T^n; R) \cong \begin{cases} R^{\binom{n}{k}} & \text{für } 1 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

5.83. BEISPIEL. Wir betrachten die Räume $S^2 \times S^4$ und $\mathbb{C}P^3$. Wegen Beispiel 5.20 und Folgerung 5.77 gilt

$$H_k(S^2 \times S^4; R) \cong H_k(\mathbb{C}P^3; R) \cong \begin{cases} R & \text{für } k = 0, 2, 4 \text{ oder } 6, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dennoch sind diese Räume nicht homotopieäquivalent, denn nach Beispiel 3.43 (1) gilt

$$\pi_3(\mathbb{C}P^3) \cong \pi_3(S^7) = 0,$$

aber mit Beispiel 3.43 (1) und Übung 3.104 gilt auch

$$\pi_3(S^2 \times S^4) \cong \pi_3(S^2) \times \pi_3(S^4) \cong \mathbb{Z}.$$

Wir sehen also

- (1) Homologie- und Homotopiegruppen enthalten verschiedene Information.
- (2) Trotz des homologischen Satzes 5.51 von Whitehead sind einfach zusammenhängende Räume mit isomorphen Homologiegruppen nicht notwendigerweise homotopieäquivalent.
- (3) Wegen dieses Satzes gibt es weder eine Abbildung $f: S^2 \times S^4 \rightarrow \mathbb{C}P^3$ noch eine Abbildung $g: \mathbb{C}P^3 \rightarrow S^2 \times S^4$, die auf $H_\bullet(\cdot; R)$ einen Isomorphismus induziert.

Als nächstes Beispiel betrachten wir X beliebig und $Y = MA_n$ einen Moore-Raum. Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass

$$\tilde{H}_{k+n}(MA_n \wedge X) \cong \tilde{H}_k(X; A).$$

Die kurze exakte Sequenz in der Künneth-Formel 5.76 ist die gleiche wie im universellen Koeffiziententheorem 5.72. Mit dem obigen Beweis erhalten wir den folgenden wichtigen Zusatz.

5.84. FOLGERUNG (Universelles Koeffiziententheorem, Zusatz). *Es sei A eine abelsche Gruppe und $\tilde{h} = \tilde{H}$ gewöhnliche Homologie mit Koeffizienten in \mathbb{Z} . Dann spaltet die kurze exakte Sequenz im universellen Koeffiziententheorem 5.72, allerdings nicht natürlich.*

Ein Beispiel folgt in Übung 5.112. Sei allgemeiner A ein R -Modul, dann existiert eine natürliche Sequenz

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_k(X; R) \otimes_R A \longrightarrow \tilde{H}_k(X; A) \longrightarrow \text{Tor}_R(\tilde{H}_{k-1}(X; R), A) \longrightarrow 0;$$

diese spaltet, aber nicht natürlich. Zum Beweis ersetzen wir X durch einen CW-Komplex und argumentieren ähnlich wie im Beweis der algebraischen Künneth-Formel 5.80, siehe Übung 6.60.

5.h. Übungen zu Kapitel 5

Übungen zu Abschnitt 5.a.

5.85. ÜBUNG. Gegeben sei eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longleftarrow A_{n-1} \xleftarrow{h_n} C_n \xleftarrow{g_n} B_n \xleftarrow{f_n} A_n \xleftarrow{h_{n+1}} C_{n+1} \longleftarrow \cdots$$

in $\mathcal{C} = \text{Mod}_R$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

- (1) Für alle n existiert $k_n: B_n \rightarrow A_n$ mit $k_n \circ f_n = \text{id}_{A_n}$.
- (2) Für alle n existiert $\ell_n: C_n \rightarrow B_n$ mit $g_n \circ \ell_n = \text{id}_{C_n}$.
- (3) Für alle n existiert ein Isomorphismus $\varphi_n: B_n \rightarrow A_n \oplus C_n$, so dass $\varphi_n \circ f_n$ die natürliche Inklusion und $g_n \circ \varphi_n^{-1}$ die natürliche Projektion ist.

Zeigen Sie außerdem, dass dann $h_n = 0$ gilt, und dass es natürliche Bijektionen zwischen den Mengen der möglichen Folgen $(k_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ in (1), $(\ell_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ in (2), sowie der $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ in (3) gibt.

5.86. ÜBUNG. Es sei $X = \{0, \dots, n\}$ versehen mit der diskreten Topologie, und $0 \in X$ sei der Basispunkt. Es sei \tilde{h}_\bullet ein reduzierter Homologiefunktor. Beschreiben Sie die Abbildung p_* aus Bemerkung 5.5 (1) in Termen von $\tilde{h}_n(S^0)$ mit Hilfe des Summenaxioms 5.2 (3), indem Sie X und X_+ darstellen als

$$X = \bigvee_{i=1}^n S^0 \quad \text{und} \quad X_+ = \bigvee_{i=0}^n S^0.$$

5.87. ÜBUNG. Beweisen Sie die Exaktheit der Mayer-Vietoris-Sequenz 5.6 an einer der beiden fehlenden Stellen, also bei $\tilde{h}_n(X)$ oder bei $\tilde{h}_n(A \cap B)$.

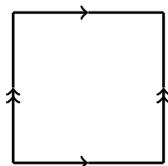
5.88. ÜBUNG. Es sei $X = A \cup B$, so dass $(A, A \cap B)$ und $(B, A \cap B)$ Kofaserungen seien, und es gelten Zusammenhangsvoraussetzungen wie in Folgerung 3.65. Konstruieren Sie ein Analogon zur Mayer-Vietoris-Sequenz 5.6 für die „unstabilen“ Homotopiegruppen π_\bullet wie in Bemerkung 5.9. Wie weit lässt sich diese Sequenz nach links beziehungsweise rechts fortsetzen? Für π_1 kennen wir bereits den Satz 2.42 von Seifert-van Kampen. Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen lässt er sich in diese Sequenz „einbauen“?

Übungen zu Abschnitt 5.b.

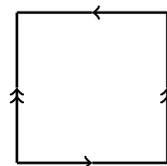
5.89. ÜBUNG. Es sei $n > 0$, und es sei A Objekt einer abelschen Kategorie \mathcal{C} . Bestimmen Sie $H_k(\mathbb{C}P^n; A)$ und $H_k(\mathbb{H}P^n; A)$ für alle $k \geq 0$.

5.90. ÜBUNG. Berechnen Sie $\tilde{H}_\bullet^{CW}(X; \mathbb{Z})$ und $\tilde{H}_\bullet^{CW}(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ für die folgenden Räume:

- (1) Fassen Sie den Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ als CW-Komplex auf, indem Sie in der linken Skizze gegenüberliegende Seiten identifizieren.
- (2) Betrachten Sie die Kleinsche Flasche X , die aus einem Quadrat durch Identifikation gegenüberliegender Seiten gemäß der rechten Skizze entsteht. Fassen Sie X für die Berechnung der Homologie als CW-Komplex mit Basispunkt, zwei 1-Zellen und einer 2-Zelle auf.



Torus



Kleinsche Flasche

5.91. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Kettenhomotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Kettenabbildungen zwischen zwei gegebenen Komplexen. Sie ist mit der Komposition von Kettenabbildungen verträglich.
- (2) Kettenhomotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Kategorie der Kettenkomplexe.

5.92. ÜBUNG. Es seien X, Y punktierte CW-Komplexe und M ein R -Modul. Eine zelluläre Homotopie zwischen zellulären Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ ist eine zelluläre Abbildung $h: I_+ \wedge X \rightarrow Y$, wobei I die CW-Struktur mit einer 1- und zwei 0-Zellen trage. Zeigen Sie: zelluläre Homotopien induzieren Kettenhomotopien zwischen den Abbildungen $f_\#$ und $g_\#: \tilde{C}_\bullet^{CW}(X; M) \rightarrow \tilde{C}_\bullet^{CW}(Y; M)$.

5.93. ÜBUNG. Sei h_\bullet eine Kettenhomotopie zwischen Kettenabbildungen f_\bullet und $g_\bullet: (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (E_\bullet, e_\bullet)$ über R . Konstruieren Sie mit Hilfe von h_\bullet eine Linkshomotopie zwischen f_\bullet und g_\bullet in Ch_R im Sinne von Definition 4.60, und zwar mit dem Zylingerobjekt (ZC_\bullet, zd_\bullet) , mit

$$ZC_k = C_k \oplus C_k \oplus C_{k-1} \quad \text{und} \quad zd_k = \begin{pmatrix} d_k & -\text{id}_{C_{k-1}} \\ & d_k & \text{id}_{C_{k-1}} \\ & & -d_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Dabei wollen wir unter einer schwachen Äquivalenz eine Kettenabbildung verstehen, die Isomorphismen auf allen Homologiemoduln induziert.

5.94. ÜBUNG. Seien $f_\bullet, g_\bullet, h_\bullet$ wie in der vorigen Aufgabe. Konstruieren Sie aus diesen Daten eine Rechtshomotopie zwischen f_\bullet und g_\bullet in Ch_R .

5.95. ÜBUNG. Beweisen Sie das Schlangenlemma 5.25.

- (1) Zeigen Sie: der Verbindungshomomorphismus ist wohldefiniert und natürlich als Transformation zwischen zwei Funktoren von der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen in der Kategorie $Ch_{\mathcal{C}}$ der Kettenkomplexe in \mathcal{C} in die Kategorie \mathcal{C} .
- (2) Beweisen Sie die Exaktheit der angegebenen Sequenz an mindestens einer Stelle.

5.96. ÜBUNG. Es sei R ein Ring mit Eins. Wir identifizieren R mit dem Kettenkomplex

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow R \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

wobei sich R in Grad 0 befinde.

- (1) Sei (C_\bullet, d_\bullet) ein Kettenkomplex in Ch_R und $c_k \in C_k$. Unter welchen Bedingungen existiert ein Morphismus $R \rightarrow C_\bullet$ vom Grad k , der $1 \in R$ auf c_k abbildet? Ist er eindeutig?
- (2) Sei c_k wie oben, und bezeichne $c_k: R \rightarrow C_\bullet$ den obigen Morphismus. Was beschreibt $c_{k*} = H_\bullet(c_k): H_\bullet(R, 0) \rightarrow H_\bullet(C_\bullet, d_\bullet)$?
- (3) Sei $f: (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet, d'_\bullet)$ eine Abbildung vom Grad a . Welchen Grad haben die Morphismen $f \circ c_k$ und $f_* \circ c_{k*}$, und was bezeichnen sie?

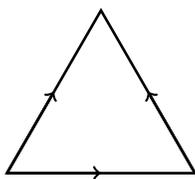
5.97. ÜBUNG. Beweisen Sie Satz 5.31.

5.98. ÜBUNG. Es sei Y Unterkomplex eines CW-Komplexes X , und es sei M Objekt einer abelschen Kategorie \mathcal{C} , wobei Sie wieder $\mathcal{C} = Mod_R$ annehmen dürfen. Nach Bemerkung 5.5 (2) definiert man relative Homologiemoduln $H_k(X, Y; A) = \tilde{H}_k(X//Y; A)$. Zeigen Sie

- (1) Es gilt $H_k(X, Y; A) \cong \tilde{H}_k(X/Y; A)$.
- (2) Wir betrachten $(\tilde{C}_\bullet^{CW}(Y; A), d^{CW})$ als Unterkomplex von $(\tilde{C}_\bullet^{CW}(X; A), d^{CW})$, dann existiert ein natürlicher Quotientenkomplex $(\tilde{C}_\bullet^{CW}(X; A)/\tilde{C}_\bullet^{CW}(Y; A), \bar{d}^{CW})$.
- (3) Der Komplex aus (2) ist natürlich isomorph zu $(\tilde{C}_\bullet^{CW}(X/Y; A), d^{CW})$.

Übungen zu Abschnitt 5.d.

5.99. ÜBUNG. Die „topologische Narrenkappe“ X entsteht, indem man bei einem Dreieck alle drei Seiten gemäß der Skizze identifiziert. Wir wissen aus der Vorlesung, dass $\tilde{H}_\bullet^{CW}(X; \mathbb{Z}) = 0$.



- (1) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von X .
- (2) Zeigen Sie, dass X schwach zusammenziehbar ist.
- (3) *Zusatz:* Geben Sie eine explizite Homotopie $X \times I \rightarrow X$ zwischen id_X und der Nullabbildung an.
- (4) *Zusatz:* Basteln Sie ein Modell.

Übungen zu Abschnitt 5.e.

5.100. ÜBUNG. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Überprüfen Sie, dass Tensorprodukt und Hom-Funktor über R mit $E = R$ alle Eigenschaften aus Definition 4.26 und Bemerkung 4.28 erfüllen. Somit ist die Kategorie (Mod_R, \otimes_R, R) monoidal und abgeschlossen. Wie lautet ihr Exponentialgesetz?

5.101. ÜBUNG. Beweisen Sie Proposition 5.56.

5.102. ÜBUNG. Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 5.61. Konstruieren Sie dazu insbesondere alle benötigten Diagramme in der Kategorie \mathcal{C} mit den jeweils geforderten Eigenschaften.

5.103. ÜBUNG. Es sei R ein Hauptidealring, $r, s \in R$, und B ein R -Modul. Zeigen Sie:

$$\operatorname{Tor}(R/r, B) \cong \operatorname{hom}(R/r, B) \cong \{b \in B \mid br = 0\} \subset B, \quad (1)$$

$$\operatorname{Ext}(R/r, B) \cong (R/r) \otimes B \cong B/rB, \quad (2)$$

$$\operatorname{Tor}(R/r, R/s) \cong \operatorname{Ext}(R/r, R/s) \cong (R/r) \otimes (R/s) \cong \operatorname{hom}(R/r, R/s) \cong R/(r, s), \quad (3)$$

wobei (r, s) das von r und s erzeugte Ideal in R bezeichne.

5.104. ÜBUNG. Zeigen Sie, dass sich Tor und Ext unter direkten Summen und Produkten analog zu \otimes und hom in Bemerkung 5.54 verhalten.

5.105. ÜBUNG. Beweisen Sie Proposition 5.64.

5.106. ÜBUNG. Es sei R ein Hauptidealring, A, B seien R -Moduln, und $\operatorname{Tor}_R A$ bezeichne den Torsionsuntermodul aus Bemerkung 5.65. Zeigen Sie:

- (1) Der Modul $A/\operatorname{Tor}_R A$ ist torsionsfrei.
- (2) Jeder endlich erzeugte Untermodul von $A/\operatorname{Tor}_R A$ ist frei.
- (3) Es gilt $\operatorname{Tor}_R(B, A/\operatorname{Tor}_R A) = 0$.
- (4) Es gilt $\operatorname{Tor}_R(B, \operatorname{Tor}_R A) = \operatorname{Tor}_R(B, A)$.

Hinweis: Jedes Element in einem Tensorprodukt $X \otimes Y$ kann als endliche Linearkombination von Elementen der Form $x \otimes y$ mit $x \in X, y \in Y$ geschrieben werden.

5.107. ÜBUNG. Beweisen Sie Bemerkung 5.67.

Übungen zu Abschnitt 5.f.

5.108. ÜBUNG. Wir betrachten $A = \mathbb{Z}/n$ und konstruieren den Moore-Raum MA_k , indem wir eine $(k+1)$ -Zelle mit einer Abbildung $\varphi: S^k \rightarrow S^k$ vom Grad n an S^k ankleben. Indem wir das k -Skelett S^k auf einen Punkt abbilden, erhalten wir die Kollaps-Abbildung $f: MA_k \rightarrow MA_k/S^k \cong S^{k+1}$. Außerdem sei $g: MA_k \rightarrow S^{k+1}$ eine konstante Abbildung. Zeigen Sie:

$$f_* = g_* = 0: \tilde{H}_\bullet(MA_k; \mathbb{Z}) \longrightarrow \tilde{H}_\bullet(S^{k+1}; \mathbb{Z}) \quad \text{für alle } k \geq 0, \quad (1)$$

$$g_* = 0: \tilde{H}_\bullet(MA_k; A) \longrightarrow \tilde{H}_\bullet(S^{k+1}; A) \quad \text{für alle } k \geq 0, \quad (2)$$

$$f_{k+1}: \tilde{H}_{k+1}(MA_k; A) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{k+1}(S^{k+1}; A) \cong A. \quad (3)$$

5.109. ÜBUNG. Seien A, B abelsche Gruppen. Wir betrachten den Raum $[MA_n, MB_n]$ der punktierten Abbildungen von MA_n nach MB_n bis auf Homotopie.

- (1) Zeigen Sie mit Hilfe des Freudenthalschen Einhängungssatzes 3.74 und der Puppe-Sequenz aus Satz 4.67 (3), dass Stabilisieren für $n \geq 3$ den folgenden Isomorphismus liefert:

$$[MA_n, MB_n] \xrightarrow{S} [MA_{n+1}, MB_{n+1}].$$

- (2) Konstruieren Sie mit Hilfe der Puppe-Sequenz eine kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}(A, \pi_{n+1} MB_n) \longrightarrow [MA_n, MB_n] \longrightarrow \operatorname{hom}(A, B) \longrightarrow 0.$$

- (3) Es sei $n \geq 3$. Zeigen Sie mit der Homotopiesequenz 3.70 für Kofaserungen, dass

$$\pi_{n+1}(MB_n) \cong B \otimes \mathbb{Z}/2 = B/2B.$$

- (4) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Ext}(A, B/2B) = 0$, wenn Multiplikation mit 2 in B surjektiv oder in A injektiv ist.

Man beachte, dass die Sequenz in (2) im allgemeinen nicht spaltet.

5.110. ÜBUNG. Bearbeiten Sie eine der folgenden Aufgaben.

- (1) Es sei A ein R -Modul, und es gelte $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}(A, A/2A) = 0$. Für $n \geq 3$ liefert die Modulstruktur auf A nach der vorangegangenen Aufgabe eine Abbildung

$$R \hookrightarrow \text{hom}_{\mathbb{Z}}(A, A) \cong [MA_n, MA_n].$$

Zeigen Sie, dass man für jeden Homologiefunktor \tilde{h}_{\bullet} , jeden Raum X und jedes k die Gruppe $\tilde{h}_k(X; A)$ als R -Modul auffassen kann. Man erhält also einen Mod_R -wertigen Homologiefunktor.

- (2) Es sei A ein R -Modul und HA_{\bullet} das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum zu A . Dann kann man den in Proposition 5.45 konstruierten Funktor $\tilde{H}_{\bullet}(X; A)$ als Mod_R -wertigen Funktor auffassen.

5.111. ÜBUNG. Es sei $f: MA_n \rightarrow MB_n$ eine stetige punktierte Abbildung zwischen Moore-Räumen, so dass die induzierte Abbildung $f_*: A \cong \tilde{H}_n(MA_n) \rightarrow B \cong \tilde{H}_n(MB_n)$ injektiv ist. Zeigen Sie

- (1) Dann ist der reduzierte Abbildungskegel Cf ein Moore-Raum zu $C = B/f_*A$.
(2) Für jeden Homologiefunktor $(\tilde{h}_{\bullet}, \partial_{\bullet})$ und jeden Raum X erhalten wir die natürliche lange exakte *Bockstein-Sequenz*

$$\dots \longleftarrow \tilde{H}_k(X; C) \longleftarrow H_k(X; B) \longleftarrow H_k(X; A) \xleftarrow{\partial} H_{k+1}(X; C) \longleftarrow \dots$$

5.112. ÜBUNG. Wir fassen $A = \mathbb{Z}/n$ als \mathbb{Z} -Modul auf. Es sei $f: MA_k \rightarrow S^{k+1}$ die Kollaps-Abbildung aus Übung 5.108.

- (1) Geben Sie die Koeffizientensequenzen für $\tilde{H}_{k+1}(MA_k; A)$ und $\tilde{H}_{k+1}(S^{k+1}; A)$ aus Satz 5.72 an, und stellen Sie die von f induzierte Sequenzabbildung in einem kommutativen Diagramm dar.
(2) Überprüfen Sie, dass beide Koeffizientensequenzen spalten, und dass die Spaltungen nicht natürlich sind.

Übungen zu Abschnitt 5.g.

5.113. ÜBUNG. Präzisieren Sie die Aussage, dass der in Proposition 5.79 konstruierte Isomorphismus

$$(\tilde{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(X \wedge Y; R), d_{\bullet}^{\text{CW}}) \xrightarrow{\cong} (\tilde{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(X; R), d_{\bullet}^{\text{CW}}) \otimes (\tilde{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(Y; R), d_{\bullet}^{\text{CW}})$$

natürlich ist, und beweisen Sie sie.

5.114. ÜBUNG. Wir wollen I^n als CW-Komplex mit $\binom{n}{k} 2^{n-k}$ Zellen der Dimension k darstellen. Wir orientieren $I^n \subset \mathbb{R}^n$ mit der Standardbasis, und wir orientieren die Rand-Hyperflächen von I^n durch solche Basen des tangentialen $(n-1)$ -dimensionalen Vektorraums, dass Voranstellen des äußeren Normalenvektors wieder eine positiv orientierte Basis des \mathbb{R}^n liefert.

- (1) Beschreiben Sie den zellulären Rand der n -Zelle von I^n .
(2) Betrachten Sie jetzt $I^m \times I^n = I^{m+n}$ und überprüfen Sie, dass sich der Rand der $(m+n)$ -Zelle wie in Proposition 5.79 verhält.

5.115. ÜBUNG. Es sei $A = \mathbb{Z}/n$ und $B = \mathbb{Z}/m$ und $k, \ell \geq 2$.

- (1) Berechnen Sie $\tilde{H}_{\bullet}(MB_{\ell} \wedge MA_k)$ und $\tilde{H}_{\bullet}(MB_{\ell} \wedge S^{k+1})$.
(2) Sei $f: MA_k \rightarrow S^{k+1}$ die obige Kollaps-Abbildung. Bestimmen Sie

$$(\text{id}_{MB_{\ell}} \wedge f)_*: \tilde{H}_{\bullet}(MB_{\ell} \wedge MA_k) \longrightarrow \tilde{H}_{\bullet}(MB_{\ell} \wedge S^{k+1}).$$

- (3) Konstruieren Sie wie in Übung 5.112 ein Beispiel dafür, dass die Künneth-Sequenz nicht natürlich spaltet.

5.116. ÜBUNG. Es seien X, Y gut punktierte, $(n-1)$ - beziehungsweise $(m-1)$ -zusammenhängende Räume.

- (1) Zeigen Sie, dass $X \wedge Y$ ein $(m+n-1)$ -zusammenhängender Raum ist.
- (2) Bestimmen Sie $\pi_{m+n}(X \wedge Y)$, falls $m, n \geq 2$.
- (3) Zusatz: was können Sie über die restlichen Fälle aussagen?

Kohomologie

Kohomologie ist ein dualer Begriff zur Homologie, und wird ebenfalls durch Eilenberg-Steenrod-Axiome charakterisiert. Daher übertragen sich viele technische Resultate fast automatisch, beispielsweise existiert ein zellulärer Kokettenkomplex, der die gewöhnliche Kohomologie von CW-Komplexen ausrechnet.

Ausgehend von der zellulären Kohomologie beweisen wir ein universelles Koeffiziententheorem, das Kohomologie mit Homologie in Verbindung bringt. Auch können wir einen Spezialfall der Künneth-Formel leicht beweisen. Schließlich konstruieren wir noch Produkte auf der zellulären Kohomologie, sowie eine Wirkung auf zellulärer Homologie.

In der zweiten Hälfte konstruieren wir Kohomologiefunktoren aus ω -Spektra. Eilenberg-Mac Lane-Spektra liefern gewöhnliche Kohomologiefunktoren. Als wichtige Beispiele allgemeiner Kohomologiefunktoren betrachten wir K -Theorie und Bordismustheorie. Da die Thom-Spektra für Bordismen keine ω -Spektra sind, führen wir am Ende des Kapitels die Kategorie von CW-Spektra ein; insbesondere überlegen wir uns einen sinnvollen Begriff für Morphismen von Spektra.

6.a. Axiome für Kohomologiefunktoren

Wir beginnen mit den Eilenberg-Steenrod-Axiomen und geben einige Konsequenzen an. Da vieles genauso wie in Kapitel 5 funktioniert, lassen wir die Beweise weg.

Die folgende Definition ist dual zu Definition 5.2. Aus technischen Gründen benötigen wir hier eine abelsche Kategorie mit beliebigen Produkten. Wie immer denken wir in erster Linie an die Kategorie Mod_R , und $R = \mathbb{Z}$ ist ein wichtiger Spezialfall.

6.1. DEFINITION. Ein (*allgemeiner*) *reduzierter Kohomologiefunktor* $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet)$ mit Werten in einer abelschen Kategorie \mathcal{C} mit beliebigen Produkten besteht aus einer Familie kontravarianter Funktoren

$$\tilde{h}^\bullet = (\tilde{h}^n: \mathcal{H}k\mathcal{W}\mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{C})_{n \in \mathbb{Z}},$$

und einer Familie natürlicher Transformationen $\delta_\bullet = (\delta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit $\delta_n(X, A): \tilde{h}^n(A) \rightarrow \tilde{h}^{n+1}(X/A)$ für alle gut punktierten Kofaserungen (X, A) , die die folgenden *Eilenberg-Steenrod-Axiome* erfüllen.

- (1) *Homotopieinvarianz.* Für jede schwache Äquivalenz $f: X \rightarrow Y$ ist $\tilde{h}^n: \tilde{h}^n Y \rightarrow \tilde{h}^n X$ ein Isomorphismus.
- (2) *Kohomologiesequenz.* Für jedes gute Paar (X, A) ist die folgende Sequenz exakt:

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} \tilde{h}^n(X/A) \xrightarrow{\tilde{h}^{np}} \tilde{h}^n(X) \xrightarrow{\tilde{h}^{n\iota}} \tilde{h}^n(A) \xrightarrow{\delta_n} \tilde{h}^{n+1}(X/A) \xrightarrow{\tilde{h}^{n+1}p} \dots$$

- (3) *Summenaxiom.* Sei $(X_i, x_i)_{i \in I}$ eine Familie gut punktierter Räume, dann ist die von den Inklusionsabbildungen $\iota_i: X_i \rightarrow \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i)$ induzierte Abbildung

$$\prod_{i \in I} \tilde{h}^n \iota_i: \tilde{h}^n \left(\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i) \right) \xrightarrow{\cong} \prod_{i \in I} \tilde{h}^n (X_i)$$

ein Isomorphismus.

Man nennt $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet)$ einen (*gewöhnlichen*) *reduzierten Kohomologiefunktor* mit *Koeffizienten* M in \mathcal{C} , wenn zusätzlich das folgende Axiom gilt.

(3) *Dimensionsaxiom.*

$$\tilde{h}^n(S^0) = \begin{cases} M & \text{für } n = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In (3) brauchen wir das Produkt anstelle des Koproduktes in 5.2 (3), um einen Pfeil in die richtige Richtung definieren zu können. Das sieht auf den ersten Blick harmlos aus, macht aber später bei „großen“ Räumen Probleme. Zum ersten Mal erleben wir diesen Effekt bei der Künneth-Formel, siehe Satz 6.20. Für $\tilde{h}^n f$ schreiben wir auch kurz f^* .

6.2. BEMERKUNG. Wir sammeln einige elementare Eigenschaften.

(1) Wie in Lemma 5.3 gilt

$$\tilde{h}^\bullet(\text{pt}) = 0 .$$

für jeden reduzierten Kohomologiefunktor $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet)$.

(2) Das Summenaxiom folgt im Falle eines endlichen Bouquets aus den anderen Axiomen, siehe Bemerkung 5.7.

(3) Wie in Bemerkung 5.5 definieren wir einen unreduzierten Kohomologiefunktoren $(h^\bullet, \delta_\bullet)$ zu $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet)$ durch

$$h^k(X) = \tilde{h}^k(X_+)$$

und erhält die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \tilde{h}(S^0) \longrightarrow h(X) \longrightarrow \tilde{h}(X) \longrightarrow 0 .$$

Sobald man einen Basispunkt in X auszeichnet, erhält man eine Spaltung dieser Sequenz.

Für Paare (X, Y) definieren wir die relative Kohomologie $h^k(X, Y) = \tilde{h}^k(X//Y)$.

(4) Für je zwei im Sinne von Definition 4.60 homotope Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ gilt

$$f^* = g^*: \tilde{h}^n(Y) \longrightarrow \tilde{h}^n(X) .$$

Im Folgenden meinen wir stets reduzierte Kohomologiefunktoren, solange wir nichts anderes sagen. In der Notation werden wir den Verbindungshomomorphismus δ_\bullet oft weglassen. Das folgende Resultat wird genauso bewiesen wie der analoge Satz 5.6.

6.3. SATZ (Mayer-Vietoris-Sequenz). *Es sei $X = A \cup B$, so dass $(A, A \cap B)$ und $(B, A \cap B)$ Kofaserungen sind, und es sei \tilde{h}^\bullet ein allgemeiner Kohomologiefunktor. Bezeichne die natürlichen Inklusionen mit*

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \xrightarrow{a} & A \\ \downarrow b & & \downarrow i \\ B & \xrightarrow{j} & X \end{array} .$$

Dann existiert ein natürlicher Verbindungshomomorphismus $\delta: \tilde{h}^n(A \cap B) \rightarrow \tilde{h}^{n+1}(X)$, so dass die Sequenz

$$\dots \longrightarrow \tilde{h}^{n-1}(A \cap B) \xrightarrow{\delta} \tilde{h}^n(X) \xrightarrow{(i^*, j^*)} \tilde{h}^n(A) \oplus \tilde{h}^n(B) \xrightarrow{a^* - b^*} \tilde{h}^n(A \cap B) \longrightarrow \dots$$

exakt ist.

BEWEIS. Wir drehen im Beweis von Satz 5.6 alle Pfeile um. □

6.4. FOLGERUNG. Es sei \tilde{h}^\bullet ein allgemeiner reduzierter Kohomologiefunktor und $k, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq 1$. Dann existiert für jeden gut punktierten Raum X ein natürlicher Isomorphismus

$$\tilde{h}^k(S^n X) \cong \tilde{h}^{k-n}(X). \quad (1)$$

Falls \tilde{h}_\bullet ein gewöhnlicher reduzierter Kohomologiefunktor mit Koeffizienten M in \mathcal{C} ist, gilt insbesondere

$$\tilde{h}^k(S^n) \cong \begin{cases} M & \text{falls } k = n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2)$$

Auch über Abbildungen zwischen Sphären können wir Aussagen machen, analog zu Satz 5.11.

6.5. FOLGERUNG. Es sei \tilde{h}^\bullet ein Kohomologiefunktor, es seien $k \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N}$, und $f: S^m \rightarrow S^n$ sei stetig.

- (1) Falls $m < n$, gilt $f^* = 0: \tilde{h}^k(S^n) \rightarrow \tilde{h}^k(S^m)$.
- (2) Falls $m = n$, gilt $f^* = \deg f: \tilde{h}^k(S^n) \rightarrow \tilde{h}^k(S^n)$.
- (3) Falls $m > n$ und \tilde{h}^\bullet das Dimensionsaxiom 6.1 (3) erfüllt, gilt $f^* = 0: \tilde{h}^k(S^n) \rightarrow \tilde{h}^k(S^m)$.

Aussage (3) muss für allgemeine Kohomologiefunktoren nicht gelten.

6.b. Der abgeleitete inverse Limes

Bei der Konstruktion der zellulären Homologie haben wir benutzt, dass Homologiefunktoren, die das Summenaxiom 5.2 (3) erfüllen, mit Kolimiten aufsteigender Folgen von Unterkomplexen eines CW-Komplexes vertauschen. Für Kohomologiefunktoren stimmt das nicht mehr. In Abschnitt 5.e hatten wir bereits die Ableitungen Tor und Ext von Tensorprodukt und internem Hom-Funktor kennengelernt. Hier führen wir eine Ableitung des inversen Limes ein, die wir brauchen, um ein Analogon von Proposition 5.13 für Kohomologiefunktoren zu formulieren.

Unter einem *inversen System* (A_i, f_{ij}) in einer Kategorie \mathcal{C} verstehen wir Objekte A_i von \mathcal{C} für $i \in \mathbb{N}$ und Morphismen $f_{ij}: A_j \rightarrow A_i$ für $i \leq j$, so dass $f_{ii} = \text{id}_{A_i}$ und $f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}$ für alle $i \leq j \leq k$. Den (*inversen*) *Limes* $\varprojlim A_i$ haben wir in Beispiel 4.9 (3) kennengelernt.

6.6. BEMERKUNG. Nach Proposition 4.10 lässt sich der inverse Limes als Pullback von Produkten schreiben; in vielen Kategorien wie *Set*, *Top*, *Ab*, *Mod_R* sogar als Unterobjekt eines Produktes:

$$\varprojlim A_i = \left\{ a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \prod_{i \in \mathbb{N}} A_i \mid a_i = f_{ij}(a_j) \text{ für alle } i \leq j \right\} \quad \text{mit } f_j((a_i)_i) = a_j \in A_j \text{ für alle } j.$$

In einer Kategorie \mathcal{C} können wir die Kategorie der inversen Systeme (A_i, f_{ij}) und kommutativen Diagramme zwischen ihnen betrachten. Wenn \mathcal{C} eine abelsche Kategorie ist, ist eine kurze exakte Sequenz inverser Systeme ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A'_{i+1} & \xrightarrow{\iota_{i+1}} & A_{i+1} & \xrightarrow{p_{i+1}} & A''_{i+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f'_{i,i+1} & & \downarrow f_{i,i+1} & & \downarrow f''_{i,i+1} \\ 0 & \longrightarrow & A'_i & \xrightarrow{\iota_i} & A_i & \xrightarrow{p_i} & A''_i \longrightarrow 0, \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array} \quad (6.1)$$

bei dem alle Zeilen exakt sind.

Wir wollen daher zeigen, dass es in der Kategorie Mod_R der R -Moduln einen abgeleiteten Funktor \varprojlim^1 gibt, der die obige Sequenz nach rechts exakt fortsetzt. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\delta: \prod_{i \in \mathbb{N}} A_i \longrightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} A_i \quad \text{mit} \quad (a_i)_i \longmapsto (f_{i,i+1}(a_{i+1}) - a_i)_i.$$

Offensichtlich gilt $\ker \delta = \varprojlim A_i$.

6.9. DEFINITION. Es sei R ein Ring und (A_i, f_{ij}) ein inverses System in Mod_R . Betrachte die Abbildung $\delta: \prod_{i \in \mathbb{N}} A_i \longrightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} A_i$ wie oben. Dann definieren wir den *abgeleiteten (inversen) Limes* durch

$$\varprojlim^1 A_i = \text{coker } \delta.$$

6.10. SATZ. Es sei R ein Ring, und es sei eine kurze exakte Sequenz inverser Systeme in Mod_R wie in (6.1) gegeben. Dann ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \varprojlim A'_i \longrightarrow \varprojlim A_i \longrightarrow \varprojlim A''_i \longrightarrow \varprojlim^1 A'_i \longrightarrow \varprojlim^1 A_i \longrightarrow \varprojlim^1 A''_i \longrightarrow 0$$

natürlich und exakt.

BEWEIS. Wir betrachten die natürliche kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \square \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \prod_{i \in \mathbb{N}} A'_i & \longrightarrow & \prod_{i \in \mathbb{N}} A_i & \longrightarrow & \prod_{i \in \mathbb{N}} A''_i & \longrightarrow & 0 \\ & & \delta \downarrow & & \delta \downarrow & & \delta \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \prod_{i \in \mathbb{N}} A'_i & \longrightarrow & \prod_{i \in \mathbb{N}} A_i & \longrightarrow & \prod_{i \in \mathbb{N}} A''_i & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Die Aussage des Satzes folgt jetzt aus dem Schlangenlemma 5.25.

Das folgende Analogon von Proposition 5.13 sieht formal ähnlich aus wie das universelle Koeffiziententheorem 5.72, siehe auch Satz 6.16 unten.

6.11. PROPOSITION. Es sei \tilde{h}_\bullet ein Kohomologiefunktor, der das Summenaxiom 6.1 (3) erfüllt, und es sei X ein CW-Komplex mit einer aufsteigenden Folge $X_0 \subset X_1 \subset \dots$ von Unterkomplexen, so dass $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$. Für alle k existiert eine natürliche exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \varprojlim^1 \tilde{h}^{k-1}(X_i) \longrightarrow \tilde{h}^k(X) \longrightarrow \varprojlim \tilde{h}^k(X_i) \longrightarrow 0.$$

BEWEIS. Wie im Beweis von Proposition 5.13 betrachten wir das zu X homotopieäquivalente Teleskop

$$Y = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} ([i, i+1]_+ \wedge X_i) \subset [0, \infty)_+ \wedge X,$$

und den Unterraum

$$Z = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\{i\}_+ \wedge X_i) \cong \bigvee_{i \in \mathbb{N}} X_i \quad \text{mit} \quad Y/Z \cong \bigvee_{i \in \mathbb{N}} SX_i.$$

Dann hat die lange exakte Sequenz des Paares (Y, Z) die Form

$$\cdots \longrightarrow \underbrace{\tilde{h}^{k-1}(Z)}_{\cong \prod_{i \in \mathbb{N}} \tilde{h}^{k-1}(X_i)} \xrightarrow{\delta_{k-1}} \underbrace{\tilde{h}^k(Y/Z)}_{\cong \prod_{i \in \mathbb{N}} \tilde{h}^{k-1}(X_i)} \xrightarrow{q^*} \tilde{h}^k(Y) \xrightarrow{\iota^*} \underbrace{\tilde{h}^k(Z)}_{\cong \prod_{i \in \mathbb{N}} \tilde{h}^k(X_i)} \xrightarrow{\delta_k} \underbrace{\tilde{h}^{k+1}(Y/Z)}_{\cong \prod_{i \in \mathbb{N}} \tilde{h}^k(X_i)} \longrightarrow \cdots$$

Analog zum Beweis von Proposition 5.13 zeigt man, dass δ_k dann die Gestalt

$$\delta^k((x_i)_i) = (\iota_i^*(x_{i+1}) - x_i)_i$$

hat, genau wie die Abbildung δ in der Konstruktion von \varprojlim^1 . Die Behauptung folgt jetzt direkt aus der obigen langen exakten Sequenz. \square

6.12. BEMERKUNG. Wir geben ein Kriterium dafür an, dass \varprojlim^1 verschwindet. Dazu überlegen wir uns, dass es in einem inversen System (A_i, f_{ij}) für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine absteigende Folge

$$A_i = \text{im}(f_{ii}) \supset \text{im}(f_{i,i+1}) \supset \cdots$$

gibt. Wenn diese Folge für jedes i stationär wird, sagen wir, dass (A_i, f_{ij}) die *Mittag-Leffler-Bedingung* erfüllt.

Wir betrachten das inverse System (A'_i, f'_{ij}) mit

$$A'_i = \bigcap_{j \geq i} \text{im}(f_{ij}) \subset A_i \quad \text{und} \quad f'_{ij} = f_{ij}|_{A'_j} : A'_j \longrightarrow A'_i.$$

Sei $A''_i = A_i/A'_i$, dann induzieren die Abbildungen f_{ij} Morphismen $f''_{ij} : A''_j \rightarrow A''_i$, und wir erhalten eine kurze exakte Sequenz inverser Systeme wie in (6.1).

In Übung 6.55 zeigen wir $\varprojlim^1 A'_i = \varprojlim^1 A''_i = 0$ mit der Mittag-Leffler-Bedingung für (A_i, f_{ij}) . Aus Satz 6.10 folgt dann auch $\varprojlim^1 A_i = 0$.

6.c. Zelluläre Kohomologie und ein universelles Koeffiziententheorem

In diesem Abschnitt führen wir den zellulären Kokettenkomplex ein, der die gewöhnliche Kohomologie eines CW-Komplexes ausrechnet. Mit Hilfe dieses Komplexes stellen wir einen Zusammenhang zwischen gewöhnlicher Homologie und Kohomologie her. Man beachte wie in Abschnitt 5.b, dass alle Resultate in diesem Abschnitt Konsequenzen der Eilenberg-Steenrod-Axiome sind.

Im Folgenden sei R stets ein kommutativer Ring mit Eins, und A sei ein R -Modul. Mit A^I bezeichnen wir das Produkt über Kopien von A mit Indexmenge I . Wir nehmen in diesem Abschnitt an, dass ein gewöhnlicher Kohomologiefunktor \tilde{H}^\bullet mit Koeffizienten A existiert. Wir benutzen die Isomorphismen aus Folgerung 6.4 und identifizieren

$$\tilde{H}^n(D^n/S^{n-1}; A) \cong \tilde{H}^n(S^n; A) \cong A.$$

Alternativ könnten wir ein beliebiges Objekt M einer abelschen Kategorie \mathcal{C} als Koeffizienten wählen, und erhielten völlig analog zu Satz 5.18 einen zellulären Kokettenkomplex. Allerdings können wir das universelle Koeffiziententheorem und die Künneth-Formel nicht in einem so allgemeinen Kontext formulieren.

Es sei X ein CW-Komplex, und $\Phi_j^n : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$ seien die charakteristischen Abbildungen der Zellen von X für $j \in J^n$, aufgefasst als Abbildungen von Paaren. Wir bezeichnen die induzierte punktierte Abbildung auf den Quotienten mit $\bar{\Phi}_j^n : S^n \rightarrow X^n/X^{n-1}$. Für $n = 0$ fixieren wir einen Punkt von S^0 als Basispunkt. Für $j \in J^0$ bezeichne $\bar{\Phi}_j^0 : S^0 \rightarrow X^0 = X^0/X^{-1}$ die punktierte Abbildung, die den anderen Punkt von S^0 auf $e_j^0 \in X^0 \setminus \{x_0\}$ abbildet.

6.15. SATZ (Zelluläre Kohomologie). *Es sei $\tilde{H}^\bullet(\cdot; A)$ ein gewöhnlicher Kohomologiefunktor mit Koeffizienten A in Mod_R . Für alle n definiere*

$$\tilde{C}_{\text{CW}}^n(X; A) = \text{hom}_R(\tilde{C}_n^{\text{CW}}(X; R), A), \quad (1)$$

$$\delta_{\text{CW}}^n = \text{hom}_R(d_{n+1}^{\text{CW}}, A): \tilde{C}_{\text{CW}}^n(X; A) \longrightarrow \tilde{C}_{\text{CW}}^{n+1}(X; A), \quad \text{und} \quad (2)$$

$$f^{\#n} = \text{hom}_R(f_{\#n}, A): \tilde{C}_{\text{CW}}^n(Y; A) \longrightarrow \tilde{C}_{\text{CW}}^n(X; A) \quad (3)$$

für alle zellulären Abbildungen $f: X \rightarrow Y$. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\tilde{H}^n(X) \cong H^n(\tilde{C}_{\text{CW}}^\bullet(X; A), \delta_{\text{CW}}^\bullet). \quad (4)$$

Man sagt dazu auch, der zelluläre Kokettenkomplex $(\tilde{C}_{\text{CW}}^\bullet(X; A), \delta_{\text{CW}}^\bullet)$ entstehe durch Dualisieren aus dem zellulären Kettenkomplex. Wichtig ist dabei, dass wir den zellulären Kettenkomplex mit Koeffizienten im zugrundeliegenden Ring R bilden und die Koeffizienten A für die Kohomologie erst durch den Funktor $\text{hom}_R(\cdot, A)$ einführen.

BEWEIS. Es gilt $\text{hom}_R(R, A) \cong A$. Mit Definition 5.17 und Lemma 6.13 (1) identifizieren wir

$$\tilde{H}^n(X^n/X^{n-1}; A) \cong A^{J^n} \cong \text{hom}_R(R, A)^{J^n} \quad \text{und} \quad \tilde{C}_n^{\text{CW}}(X; R) \cong R^{\oplus J^n}.$$

Für die in (1) definierten Moduln existieren nach Bemerkung 5.54 natürliche Isomorphismen

$$\tilde{C}_{\text{CW}}^n(X; A) \cong \text{hom}_R(R^{\oplus J^n}, A) \cong \text{hom}_R(R, A)^{J^n} \cong \tilde{H}^n(X^n/X^{n-1}; A).$$

Wie in Definition 5.17 betrachte

$$d_{ji}^{n+1} = \text{deg } f_{ji}^{n+1} \quad \text{mit} \quad f_{ji}^{n+1} = q_j^n \circ p_n \circ \varphi_i^{n+1}: S^n \longrightarrow S^n,$$

hierbei sei $\varphi_i^{n+1}: S^n \rightarrow X^n$ die Anklebeabbildung der Zelle e_i^{n+1} , und $q_j^n: X^n/X^{n-1} \rightarrow S^n$ die Kollapsabbildung zur Zelle e_j^n . Für jedes $i \in J^{n+1}$ gibt es dann nur endlich viele $j \in J^n$, für die $d_{ij}^{n+1} \neq 0$. Um den Korandoperator $\delta_{\text{CW}}^n = \delta_n \circ p_n^*$ zu bestimmen, betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}^n(S^n; A) & \xrightarrow{(f_{ji}^{n+1})^*} & \tilde{H}^n(S^n; A) & \xrightarrow[\cong]{\delta_n} & \tilde{H}^{n+1}(S^{n+1}; A) \\ (q_j^n)^* \downarrow & & (\varphi_i^{n+1})^* \uparrow & & \uparrow (\bar{\Phi}_i^{n+1})^* \\ \tilde{H}^n(X^n/X^{n-1}; A) & \xrightarrow{p_n^*} & \tilde{H}^n(X^n; A) & \xrightarrow{\delta_n} & \tilde{H}^{n+1}(X^{n+1}/X^n; A) \end{array}$$

für $i \in J^{n+1}$, $j \in J^n$. Nach Folgerung 6.5 (2) operiert $(f_{ji}^{n+1})^*$ auf $A \cong \tilde{H}^n(S^n; A)$ durch Multiplikation mit dem Abbildungsgrad d_{ji}^{n+1} .

Seien $\alpha = (a_j)_{j \in J^n} \in A^{J^n} \cong \tilde{C}_{\text{CW}}^n(X; A)$ und $c = \sum_{i \in J^{n+1}} r_i \in R^{\oplus J^{n+1}}$ gegeben. Aus Definition 5.17 und der obigen Überlegung folgt

$$(\delta_{\text{CW}}^n(\alpha))(c) = \left(\sum_{j \in J^n} d_{ji}^{n+1} a_j \right)_{i \in J^{n+1}} \quad (c) = \sum_{j \in J^n} \sum_{i \in J^{n+1}} r_i d_{ji}^{n+1} a_j = \alpha(d_{n+1}^{\text{CW}}(c)).$$

Jetzt haben wir die mittlere Zeile im obigen kommutativen Diagramm mit dem in (1)–(2) beschriebenen Komplex identifiziert. Der Beweis von (3) verläuft analog, und wir zeigen (4) durch Diagrammjagd, analog zum Beweis von Satz 5.18. \square

Aufgrund von Satz 6.15 könnte man wieder erwarten, dass $\tilde{H}^n(X; A) \cong \text{hom}(\tilde{H}_n(X; R), A)$ gilt. Für die Räume $\mathbb{C}P^n$ und $\mathbb{H}P^n$ stimmt das tatsächlich, siehe dazu Beispiel 5.20. Ähnlich wie beim universellen Koeffiziententheorem 5.72 und bei der Künneth-Formel 5.76 gilt die allgemeine Aussage auch hier nur bis auf einen derivierten Funktor.

6.16. SATZ (Universelles Koeffiziententheorem für gewöhnliche Kohomologie). *Es sei R ein Hauptidealring und $\tilde{H}^\bullet(\cdot; A)$ ein gewöhnlicher Kohomologiefunktor mit Koeffizienten A in der Kategorie Mod_R . Dann existiert für alle n und alle CW-Komplexe X eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_R(\tilde{H}_{n-1}(X; R), A) \longrightarrow \tilde{H}^n(X; A) \longrightarrow \text{hom}_R(\tilde{H}_n(X; R), A) \longrightarrow 0.$$

Diese Sequenz spaltet, allerdings nicht natürlich.

6.17. BEMERKUNG. Die Abbildung $\tilde{H}^n(X; A) \rightarrow \text{hom}_R(\tilde{H}_n(X; R), A)$ induziert durch Auswerten die sogenannte *Kronecker-Paarung* oder das *Kronecker-Produkt*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \tilde{H}^n(X; A) \times \tilde{H}_n(X; R) \longrightarrow \text{hom}_R(\tilde{H}_n(X; R), A) \times \tilde{H}_n(X; R) \xrightarrow{\text{ev}} A.$$

Für $\alpha \in \tilde{H}^n(X; A)$ und $c \in \tilde{H}_n(X; R)$ schreiben wir $\langle c, \alpha \rangle$ oder $\alpha(c) \in A$.

6.18. FOLGERUNG. *Es sei \mathbb{k} ein Körper und $\tilde{H}^\bullet(\cdot; V)$ ein gewöhnlicher Kohomologiefunktor mit Koeffizienten V in der Kategorie $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$. Dann existiert für alle n und alle CW-Komplexe X ein natürlicher Isomorphismus*

$$\tilde{H}^n(X; V) \cong \text{hom}_{\mathbb{k}}(\tilde{H}_n(X; \mathbb{k}), V).$$

BEWEIS. Nach Satz 5.61 verschwindet das Erweiterungsprodukt über Körpern. \square

BEWEIS VON SATZ 6.16. Der Einfachheit halber schreiben wir C_n, Z_n, B_n und H_n für die Moduln der Ketten, Zykel, Ränder und die Homologie des Komplexes $(\tilde{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(X; R), d_{\bullet}^{\text{CW}})$, und C^n, H^n für die Koketten und die Kohomologie des Komplexes $(\tilde{C}_{\text{CW}}^{\bullet}(X; A), \delta_{\bullet}^{\text{CW}})$. Außerdem kürzen wir $\text{hom}(f, A)$ mit f^* ab.

Es bezeichne $\iota_n: B_n \rightarrow Z_n$ die natürliche Inklusion. Nach Definition der Homologie erhalten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \longleftarrow H_n \longleftarrow Z_n \xleftarrow{\iota} B_n \longleftarrow 0.$$

Da B_n und Z_n als Untermoduln von C_n nach Proposition 5.63 (1) frei sind, ist das eine freie Auflösung von H_n . Nach Satz 5.61 gilt

$$\text{hom}_R(H_n, A) = \ker(\iota_n^*) \quad \text{und} \quad \text{Ext}_R(H_n, A) = \text{coker}(\iota_n^*).$$

Wir betrachten eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & B_n & \xleftarrow{d_{n+1}} & C_{n+1} & \longleftarrow & Z_{n+1} \longleftarrow 0 \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow d_{n+1} & & \downarrow 0 \\ 0 & \longleftarrow & B_{n-1} & \xleftarrow{d_n} & C_n & \longleftarrow & Z_n \longleftarrow 0, \end{array} \quad (*)$$

wobei die äußeren Komplexe triviales Differential haben. Da die Zeilen aus freien Moduln bestehen, liefert der Funktor $\text{hom}_R(\cdot, A)$ eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{hom}_R(B_n, A) & \longrightarrow & C^{n+1} & \longrightarrow & \text{hom}_R(Z_{n+1}, A) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow 0 & & \uparrow \delta_n & & \uparrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & \text{hom}_R(B_{n-1}, A) & \longrightarrow & C^n & \longrightarrow & \text{hom}_R(Z_n, A) \longrightarrow 0, \end{array}$$

wobei wir die mittlere Spalte nach Satz 6.15 mit dem Komplex $(\tilde{C}_{\text{CW}}^{\bullet}(X; A), \delta_{\bullet}^{\text{CW}})$ identifizieren.

Wir wenden das Schlangenlemma 5.25 an. Da die äußeren Komplexe triviales Differential haben, ändert sich nichts beim Übergang zur Kohomologie. Eine kurze Diagrammjagd zeigt, dass der Verbindungshomomorphismus gerade ι_n^* ist, also erhalten wir die lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \text{hom}_R(Z_{n-1}, A) \xrightarrow{\iota_{n-1}^*} \text{hom}_R(B_{n-1}, A) \longrightarrow H^n \longrightarrow \text{hom}_R(Z_n, A) \xrightarrow{\iota_n^*} \text{hom}_R(B_n, A) \longrightarrow \cdots$$

Hieraus ergibt sich die kurze exakte Sequenz im Satz.

Da die Ränder B_n frei sind, spalten die Zeilen in (*), und wir erhalten Abbildungen $p_n: C_n \rightarrow Z_n$ mit $p_n|_{Z_n} = \text{id}_{Z_n}$. Wir wenden auf das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & B_n \\ d_{n+1} \downarrow & \swarrow & \downarrow \iota_n \\ C_n & \xrightarrow{p_n} & Z_n . \end{array}$$

den Funktor $\text{hom}_R(\cdot, A)$ an und erhalten

$$\begin{array}{ccc} C^{n+1} & \xleftarrow{d_{n+1}^*} & \text{hom}_R(B_n; A) \\ \delta_n \uparrow & \swarrow & \uparrow \iota_n^* \\ C^n & \xleftarrow{p_n^*} & \text{hom}_R(Z_n; A) . \end{array}$$

Wir sehen, dass die Einschränkung von p_n^* auf $\ker \iota_n^* = \text{hom}_R(H_n, A)$ nach $\ker \delta_n \subset C^n$ abbildet, also induziert p_n^* die gesuchte Spaltungsabbildung

$$p_n^*|_{\ker \iota_n^*}: \text{hom}_R(H_n, A) \longrightarrow \ker \delta_n \longrightarrow H^n(X; A) . \quad \square$$

Mit ähnlichen Methoden zeigt man auch das am Ende von Abschnitt 5.g erwähnte universelle Koeffiziententheorem für die Homologie, siehe Übung 6.60.

6.19. BEISPIEL. Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}P^2$ aus Beispiel 5.21 und $R = A = \mathbb{Z}$. Es gilt

$$\text{hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} , \quad \text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0 = \text{hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad \text{Ext}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2 .$$

Somit erhalten wir

$$\tilde{H}^k(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} 0 \cong \text{hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) & \text{falls } k \text{ ungerade und } 0 < k < n, \\ \mathbb{Z}/2 \cong \text{Ext}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) & \text{falls } k \text{ gerade und } 0 < k \leq n, \\ \mathbb{Z} \cong \text{hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) & \text{falls } k = n \text{ ungerade,} \\ 0 \cong \text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) & \text{falls } k = n + 1 \text{ gerade, und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1)$$

Im Vergleich zu Beispiel 5.21 (1) treten die Torsionsanteile jetzt jeweils im um 1 höheren Grad auf, während die freien Gruppen ihren Platz beibehalten. Dieses Verhalten erklärt sich aus Übung 5.103.

Sei jetzt $R = A = \mathbb{Z}/2$. Da R ein Körper ist, verschwinden alle Erweiterungsprodukte, und es gilt $\text{hom}_{\mathbb{Z}/2}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$. Mit Beispiel 5.21 (2) erhalten wir

$$\tilde{H}^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 \cong \text{hom}_{\mathbb{Z}/2}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) & \text{falls } 0 < k \leq n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2)$$

Das gleiche Ergebnis hätten wir für $R = \mathbb{Z}$ und $A = \mathbb{Z}/2$ aus Beispiel 5.21 (1) erhalten, allerdings mit etwas mehr Rechenarbeit, ähnlich wie in Beispiel 5.73.

Sei schließlich \mathbb{k} ein Körper der Charakteristik $\neq 2$. Aus Beispiel 5.21 (3) folgt

$$\tilde{H}^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{k}) \cong \begin{cases} \mathbb{k} & \text{falls } k = n \text{ ungerade ist, und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3)$$

Als nächstes betrachten wir eine Künnethformel für Kohomologie. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf Koeffizienten in einem Körper \mathbb{k} .

6.20. SATZ (Kohomologische Künneth-Formel). *Es seien X, Y topologische Räume, und es sei \mathbb{k} ein Körper. Wir nehmen an, dass $\tilde{H}^k(X; \mathbb{k})$ für alle $k \geq 0$ endlich-dimensional ist. Dann gibt es natürliche Isomorphismen*

$$H^n(X \times Y; \mathbb{k}) \cong (H^\bullet(X; \mathbb{k}) \otimes_{\mathbb{k}} H^\bullet(Y; \mathbb{k}))_n, \quad \text{und} \quad (1)$$

$$\tilde{H}^n(X \wedge Y; \mathbb{k}) \cong (\tilde{H}^\bullet(X; \mathbb{k}) \otimes_{\mathbb{k}} \tilde{H}^\bullet(Y; \mathbb{k}))_n, \quad \text{falls } X \text{ und } Y \text{ gut punktiert sind.} \quad (2)$$

Allgemeinere Formulierungen, zum Beispiel über Hauptidealringen, sind möglich; allerdings benötigt man stets eine „Endlichkeitsbedingung“ für einen der beiden Räume, siehe Übung 6.61.

BEWEIS. Seien V, W zwei \mathbb{k} -Vektorräume. Zu zwei Elementen $\alpha \in V^* = \text{hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k})$ und $\beta \in W^* = \text{hom}_{\mathbb{k}}(W, \mathbb{k})$ existiert eine bilineare Abbildung

$$V \times W \longrightarrow \mathbb{k} \quad \text{mit} \quad (v, w) \longmapsto \alpha(v) \beta(w).$$

Nach der charakteristischen Eigenschaft 4.27 (2) des Tensorproduktes existiert daher eine Abbildung

$$\alpha \otimes \beta: V \otimes W \rightarrow \mathbb{k} \quad \text{mit} \quad v \otimes w \longmapsto \alpha(v) \beta(w).$$

Die Zuordnung $(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha \otimes \beta \in (V \otimes W)^*$ ist ebenfalls bilinear, also erhalten wir eine natürliche Abbildung

$$V^* \otimes W^* \longrightarrow (V \otimes W)^*. \quad (*)$$

Sei jetzt einer der beiden Vektorräume endlich-dimensional, etwa V , mit Basis (v_1, \dots, v_p) . Dann erhalten wir eine duale Basis (v^1, \dots, v^p) von V^* mit $v^i(v_j) = \delta_{ij}$. Jedes Element von $V^* \otimes W^*$ lässt sich dann darstellen als

$$\sum_{i=1}^p v^i \otimes \beta^i,$$

mit $\beta^1, \dots, \beta^p \in W^*$ beliebig. Sei umgekehrt $\gamma \in (V \otimes W)^*$, dann ist nach Bemerkung 4.28 die Abbildung

$$\gamma \circ (\otimes_{V, W}(v_i)): W \longrightarrow \mathbb{k} \quad \text{mit} \quad w \longmapsto \gamma(v_i \otimes w)$$

linear, und wir setzen $\beta_i = \gamma \circ (\otimes_{V, W}(v_i)) \in W^*$. Jedes Element $u \in V \otimes W$ lässt sich schreiben als

$$u = \sum_{i=1}^p v_i \otimes w_i$$

mit $w_1, \dots, w_p \in W$ beliebig. Einsetzen in γ liefert

$$\gamma(u) = \sum_{i=1}^p \gamma(v_i \otimes w_i) = \sum_{i=1}^p \beta^i(w_i) = \sum_{i,j=1}^p (v^j \otimes \beta^j)(v_i \otimes w_i) = \left(\sum_{i=1}^p v^i \otimes \beta^i \right) (u).$$

Daher ist die Abbildung (*) in diesem Fall ein Isomorphismus.

Wir beweisen die Aussage (2); der Beweis von (1) ist analog. Nach den Folgerungen 5.78 (2), 6.18 und der obigen Vorarbeit gilt

$$\begin{aligned} \tilde{H}^n(X \wedge Y; \mathbb{k}) &\cong \tilde{H}_n(X \wedge Y; \mathbb{k})^* \cong \left(\bigoplus_{k=0}^n \tilde{H}_k(X; \mathbb{k}) \otimes_{\mathbb{k}} \tilde{H}_{n-k}(Y; \mathbb{k}) \right)^* \\ &\cong \bigoplus_{k=0}^n \tilde{H}_k(X; \mathbb{k})^* \otimes_{\mathbb{k}} \tilde{H}_{n-k}(Y; \mathbb{k})^* \cong (\tilde{H}_\bullet(X; \mathbb{k})^* \otimes \tilde{H}_\bullet(Y; \mathbb{k})^*)_n \\ &\cong (\tilde{H}^\bullet(X; \mathbb{k}) \otimes \tilde{H}^\bullet(Y; \mathbb{k}))_n. \quad \square \end{aligned}$$

Wenn beide Vektorräume unendlich-dimensional sind, ist die Abbildung (*) kein Isomorphismus mehr. Denn jedes Element von $V^* \otimes W^*$ hat „endlichen Rang“, das heißt, lässt sich als endliche Linearkombination zerlegbarer Elemente $\alpha^i \otimes \beta^i$ schreiben. Wenn wir unendlich viele linear unabhängige $\alpha^i \in V^*$ und $\beta^i \in W^*$ für $i \in I$ finden können, erhalten wir ein Element von „unendlichem Rang“

$$\sum_{i \in I} \alpha^i \otimes \beta^i \in (V \otimes W)^* \setminus V^* \otimes W^* .$$

6.d. Produkte

In diesem Abschnitt zeigen wir, wie man zumindest für CW-Komplexe Produkte zwischen Kohomologiegruppen definieren kann. Im nächsten Kapitel lernen wir einen abstrakten Zugang kennen, der Produkte auch für verallgemeinerten Kohomologiefunktoren konstruiert. Da wir im Moment nur zellulär arbeiten, können wir das Kürzel „CW“ in der Notation weglassen.

Es seien X, Y CW-Komplexe und R ein kommutativer Ring mit Eins. Es seien

$$\alpha \in \text{hom}_R(C_k(X; R), R) = \tilde{C}^k(X; R) \quad \text{und} \quad \beta \in \text{hom}_R(C_\ell(Y; R), R) = \tilde{C}^\ell(Y; R)$$

Koketten, dann erhalten wir wie im Beweis von Satz 6.20 eine Abbildung

$$\alpha \otimes \beta: \tilde{C}_k(X; R) \otimes_R \tilde{C}_\ell(Y; R) \longrightarrow R .$$

Da $\tilde{C}_k(X; R) \otimes_R \tilde{C}_\ell(Y; R)$ nach Definition 5.75 und Proposition 5.79 ein direkter Summand von

$$(\tilde{C}_\bullet(X; R) \otimes_R \tilde{C}_\bullet(Y; R))_{k+\ell} \cong \tilde{C}_{k+\ell}(X \wedge Y; R) \quad (*)$$

ist, können wir $\alpha \otimes \beta$ auf eindeutige Weise mit Satz 6.15 zu einer Kokette

$$\alpha \wedge \beta \in \text{hom}_R(\tilde{C}_{k+\ell}(X \wedge Y; R), R) \cong C^{k+\ell}(X \wedge Y; R)$$

fortsetzen, die auf allen anderen Summanden des Tensorproduktes verschwindet. Das liefert eine Abbildung

$$\wedge: \tilde{C}^\bullet(X; R) \times \tilde{C}^\bullet(Y; R) \longrightarrow C^\bullet(X \wedge Y; R)$$

Sei jetzt $\alpha \in \tilde{C}^k(X; R)$ wie oben, dann setzen wir

$$\tilde{C}_k(X; R) \otimes_R \tilde{C}_\ell(Y; R) \xrightarrow{\alpha \otimes \text{id}} R \otimes_R \tilde{C}_\ell(Y; R) \cong \tilde{C}_\ell(Y; R)$$

durch 0 auf alle anderen Summanden des Tensorproduktes (*) fort. Das liefert eine Abbildung

$$/: \tilde{C}_{k+\ell}(X \wedge Y; R) \otimes_R C^k(X; R) \longrightarrow C_\ell(Y; R) .$$

6.21. PROPOSITION UND DEFINITION. *Die obigen Abbildungen \wedge und $/$ induzieren für CW-Komplexe X, Y natürliche äußere Produkte*

$$\begin{aligned} \wedge: \tilde{H}^\bullet(X; R) \otimes_R \tilde{H}^\bullet(Y; R) &\longrightarrow \tilde{H}^\bullet(X \wedge Y; R) , \\ \text{und} \quad /: \tilde{H}_\bullet(X \wedge Y; R) \otimes_R \tilde{H}^\bullet(X; R) &\longrightarrow \tilde{H}_\bullet(Y; R) , \end{aligned}$$

das Smash-Produkt, sowie das Schräg- oder Slant-Produkt. Diese haben für alle $\alpha \in \tilde{H}^k(X; R)$, $\beta \in \tilde{H}^\ell(Y; R)$, $\gamma \in \tilde{H}^m(Z; R)$ und $a \in \tilde{H}_k(X; R)$, $b \in \tilde{H}_{k+\ell}(X \wedge Y; R)$, $c \in \tilde{H}_{k+\ell+m}(X \wedge Y \wedge Z; R)$ die folgenden Eigenschaften.

(1) Assoziativität. Es gilt

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma &= \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \in \tilde{H}^{k+\ell+m}(X \wedge Y \wedge Z; R) \\ \text{und} \quad (c/\alpha)/\beta &= c/(\alpha \wedge \beta) \in \tilde{H}_m(Z; R) . \end{aligned}$$

(2) Einselement. Für das Element $1 \in R \cong \tilde{H}^0(S^0; R)$ gilt

$$1 \wedge \alpha = \alpha \wedge 1 = \alpha \in \tilde{H}^k(X; R) \quad \text{und} \quad a/1 = a \in \tilde{H}_k(X; R) .$$

(3) Stabilität. Für die Stabilisierungs-Isomorphismen σ gilt

$$\begin{aligned} (\sigma\alpha) \wedge \beta &= \sigma(\alpha \wedge \beta) = (-1)^k \alpha \wedge (\sigma\beta) \in \tilde{H}^{k+\ell+1}(S(X \wedge Y); R), \\ (\sigma b)/(\sigma\alpha) &= b/\alpha \in \tilde{H}_\ell(Y; R) \quad \text{und} \quad (\sigma b)/\alpha = (-1)^k \sigma(b/\alpha) \in \tilde{H}_{\ell+1}(Y; R). \end{aligned}$$

(4) Adjunktion. Für das Kronecker-Produkt gilt

$$\langle b/\alpha, \beta \rangle = \langle b, \alpha \wedge \beta \rangle \quad \text{und} \quad a/\alpha = \langle a, \alpha \rangle \in R \cong \tilde{H}_0(S^0; R).$$

(5) Transposition. Die Transpositionsabbildung $t: X \wedge Y \rightarrow Y \wedge X$ sei gegeben durch $t(x \wedge y) = y \wedge x$, dann gilt

$$t^*(\beta \wedge \alpha) = (-1)^{k\ell} \alpha \wedge \beta.$$

„Natürlichkeit“ für das Schräg-Produkt bedeutet, dass

$$((f \wedge g)_* b)/\alpha = g_*(b/(f^* \alpha)) \in \tilde{H}_\ell(W; R) \quad (6.2)$$

für alle $f: X \rightarrow Z$, $g: Y \rightarrow W$, $\alpha \in \tilde{H}^k(Z; R)$ und $b \in \tilde{H}_{k+\ell}(X \wedge Y; R)$ gilt. Es ist kontraintuitiv, beim Schräg-Produkt von rechts auf den linken Faktor eines Produktes einzuwirken, aber so erhalten wir alle obigen Eigenschaften. In der Literatur finden sich auch andere Konventionen, die dann meist zu zusätzlichen Vorzeichenfaktoren führen.

Später werden wir sehen, dass Natürlichkeit und die Eigenschaften (1)–(3) die beiden äußeren Produkte bereits eindeutig festlegen. Die Notation „/“ ist etwas irreführend, da hier multipliziert und nicht dividiert wird. Immerhin gelten einzelne „Bruchrechenregeln“, und die Grade der beteiligten Klassen verhalten sich so wie erwartet.

BEWEIS. Zunächst zeigen wir Wohldefiniertheit des Smash-Produktes, das heißt, das Produkt von Kozykeln ist wieder ein Kozykel, und exakt, falls einer der Faktoren exakt ist. Beides folgt mit Proposition 5.79 und Satz 6.15, denn für α, β wie oben und $v \in \tilde{C}_\bullet(X; R)$, $w \in \tilde{C}_\bullet(Y; R)$ gilt

$$\begin{aligned} (\delta^{k+\ell}(\alpha \wedge \beta))(v \otimes w) &= (\alpha \wedge \beta)(d_{k+\ell+1}(v \otimes w)) = \alpha(dv) \cdot \beta(w) + (-1)^k \alpha(v) \cdot \beta(dw) \\ &= (\delta^k \alpha(v)) \cdot \beta(w) + (-1)^k \alpha(v) \cdot (\delta^\ell \beta(w)) = (\delta^k \alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \delta^\ell \beta)(v \otimes w). \end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass $\alpha(v) \neq 0$ nur dann, wenn $v \in C_k(X; R)$. Analog ist auch das Schrägprodukt wohldefiniert.

Assoziativität (1) folgt, da das Smashprodukt auf Koketten bereits assoziativ ist. Natürlichkeit lässt sich ebenfalls leicht überprüfen. Für das Schrägprodukt erhalten wir Assoziativität auf Ketten- und Kokettenniveau, indem wir Ketten der Form $c = x \otimes y \otimes z$ mit $x \in \tilde{C}_k(X; R)$, $y \in \tilde{C}_\ell(Y; R)$ und $z \in \tilde{C}_m(Z; R)$ betrachten:

$$((x \otimes y \otimes z)/\alpha)/\beta = (\alpha(x) y \otimes z)/\beta = \alpha(x) \beta(y) z = (x \otimes y \otimes z)/(\alpha \wedge \beta).$$

Es sei e^0 die nichttriviale Nullzelle von S^0 , dann ist $e = 1e^0$ ein Erzeuger von $\tilde{C}_0(S^0; R) \cong R$. Es gilt $S^0 \wedge X \cong X \cong X \wedge S^0$, und wir identifizieren $v \in \tilde{C}_k(X; R) \cong \tilde{C}_k(S^0 \wedge X; R)$ mit $e \otimes v \in \tilde{C}_0(S^0; R) \otimes_R \tilde{C}_k(X; R)$. Das Element $1 \in R \cong \tilde{H}^0(S^0; R)$ wird repräsentiert durch $\varepsilon \in \tilde{C}^0(S^0; R)$ mit $\varepsilon(e) = 1$. Es folgt

$$(\varepsilon \wedge \alpha)(v) = (\varepsilon \wedge \alpha)(e \otimes v) = \varepsilon(e) \cdot \alpha(v) = \alpha(v).$$

Genauso erhalten wir die andere Aussage in (2).

Die Aussagen (3)–(5) bleiben Übung 6.63. □

Da $(X \times Y)_+ = (X_+) \wedge (Y_+)$, lässt sich ein Kreuz-Produkt

$$\times = \wedge: \tilde{H}^\bullet(X_+; R) \otimes_R \tilde{H}^\bullet(Y_+; R) \rightarrow \tilde{H}^\bullet((X \times Y)_+; R)$$

für unreduzierte Kohomologie konstruieren. Falls $R = \mathbb{k}$ ein Körper ist und die Endlichkeitsvoraussetzungen aus Satz 6.20 gelten, entsprechen diese äußeren Produkte gerade den Komponenten der Isomorphismen aus der kohomologischen Künneth-Formel. Auch für Homologietheorien können wir die „linken“ Abbildungen in den Künneth-Sequenzen aus Satz 5.76 und Folgerung 5.77 als Smash-beziehungweise Kreuzprodukte auffassen, die dann ähnliche Eigenschaften haben.

6.22. BEISPIEL. Wir benutzen die Stabilisierungsisomorphismen und definieren induktiv Erzeuger

$$e_k = \sigma^k(1) \in \tilde{H}_k(S^k S^0; R) = \tilde{H}_k(S^k) \quad \text{und} \quad \varepsilon^k = \sigma^k(1) \in \tilde{H}^k(S^k) .$$

Dann folgt aus (2), (3) induktiv

$$\begin{aligned} \varepsilon^k \wedge \varepsilon^\ell &= (\sigma^k 1) \wedge (\sigma^\ell 1) = \sigma^k(1 \wedge (\sigma^\ell 1)) = \sigma^{k+\ell} 1 = \varepsilon^{k+\ell} \\ \text{und} \quad e_{k+\ell}/\varepsilon^k &= (\sigma^k e_\ell)/(\sigma^k 1) = e_\ell/1 = e_\ell . \end{aligned}$$

Wie in (4) gilt

$$\langle e_{k+\ell}/\varepsilon^k, \varepsilon^\ell \rangle = \langle e_\ell, \varepsilon^\ell \rangle = 1 = \langle e_{k+\ell}, \varepsilon^{k+\ell} \rangle = \langle e_{k+\ell}, \varepsilon^k \wedge \varepsilon^\ell \rangle .$$

Diese Relationen stehen nicht im Widerspruch zu den Vorzeichen in (3) und (5), denn die Transpositionsabbildung $t: S^{k+\ell} \rightarrow S^{k+\ell}$ hat Abbildungsgrad $(-1)^{k\ell}$, und für (3) ergibt sich daraus

$$\varepsilon^k \wedge (\sigma \varepsilon^\ell) = (-1)^{k(\ell+1)} (\sigma \varepsilon^\ell) \wedge \varepsilon^k = (-1)^{k(\ell+1)} \sigma(\varepsilon^\ell \wedge \varepsilon^k) = (-1)^k \sigma(\varepsilon^k \wedge \varepsilon^\ell) .$$

Wir benutzen das Kronecker-Produkt und nutzen aus, dass $\tilde{H}^\ell(S^\ell; R) \cong R$:

$$\langle (\sigma e_{k+\ell})/\varepsilon^k, \sigma \varepsilon^\ell \rangle = \langle \sigma e_{k+\ell}, \varepsilon^k \wedge \sigma \varepsilon^\ell \rangle = (-1)^k = (-1)^k \langle e_{k+\ell}/\varepsilon^k, \varepsilon^\ell \rangle = (-1)^k \langle \sigma(e_{k+\ell}/\varepsilon^k), \sigma \varepsilon^\ell \rangle .$$

Die folgende Konstruktion hingegen lässt sich in der Homologie nicht einfach nachmachen. Sei X ein topologischer Raum, dann bezeichne $\Delta_X: X \rightarrow X \wedge X$ die *Diagonalabbildung* mit $\Delta_X(x) = (x, x)$. Falls X ein CW-Komplex ist, ist Δ_X in der Regel nicht zellulär. Nach Satz 4.43 lässt sich Δ_X jedoch zellulär approximieren. Da alle zellulären Approximationen punktiert homotop sind, ist es für die folgenden Konstruktionen egal, welche wir jeweils wählen.

6.23. DEFINITION. Es sei X ein CW-Komplex, R ein Ring, und $k, \ell \geq 0$. Wir definieren *innere Produkte*, nämlich das *Cup-Produkt* $\smile: \tilde{H}^k(X; R) \times \tilde{H}^\ell(X; R) \rightarrow \tilde{H}^{k+\ell}(X; R)$ sowie das *Cap-Produkt* $\frown: \tilde{H}_{k+\ell}(X; R) \times \tilde{H}^k(X; R) \rightarrow \tilde{H}_\ell(X; R)$ durch

$$\alpha \smile \beta = \Delta_X^*(\alpha \wedge \beta) \in \tilde{H}^{k+\ell}(X; R) \quad \text{und} \quad c \frown \alpha = (\Delta_X' c)/\alpha \in \tilde{H}_\ell(X; R) .$$

für alle $\alpha \in \tilde{H}^k(X; R)$, $\beta \in \tilde{H}^\ell(X; R)$ und $c \in \tilde{H}_{k+\ell}(X; R)$, wobei Δ_X' eine zelluläre Approximation der Diagonalabbildung sei.

Um Verwechslungen mit dem Mengensymbolen „ \cup “ und „ \cap “ zu vermeiden, schreiben wir „ \smile “ und „ \frown “ für die inneren Produkte.

6.24. PROPOSITION. *Die inneren Produkte sind natürlich und haben folgende Eigenschaften.*

(1) Assoziativgesetz. *Es gilt*

$$(\alpha \smile \beta) \smile \gamma = \alpha \smile (\beta \smile \gamma) \quad \text{und} \quad (c \frown \alpha) \frown \beta = c \frown (\alpha \smile \beta) .$$

(2) Einselement. *Sei $p: X \rightarrow \text{pt}$ die konstante Abbildung, dann ist $1 = p_+^*(1) \in \tilde{H}^0(X_+; R) = H^0(X; R)$ neutrales Element für beide Produkte.*

(3) Adjunktion. *Es gilt*

$$\langle b \frown \alpha, \beta \rangle = \langle b, \alpha \smile \beta \rangle .$$

(4) *Das Cup-Produkt ist graduiert kommutativ, das heißt, für alle $\alpha \in \tilde{H}^k(X; R)$ und $\beta \in \tilde{H}^\ell(X; R)$ gilt*

$$\beta \smile \alpha = (-1)^{k\ell} \alpha \smile \beta .$$

Insbesondere bildet die reduzierte Kohomologie $(\tilde{H}^\bullet(X; R), \smile)$ einen graduiert kommutativen Ring, den *Kohomologiering* von X , und $(\tilde{H}_\bullet(X; R), \smile)$ ist ein Modul über diesem Ring. Dabei könnte man in der Homologie die Koeffizienten sogar durch einen beliebigen R -Modul A ersetzen.

BEWEIS. Natürlichkeit und Assoziativität folgen sofort aus Proposition 6.21 (1). Das Verhalten der Eins in (2) erhalten wir aus 6.21 (2), indem wir im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}^0(X_+; R) \times \tilde{H}^k(X_+; R) & \xrightarrow{\wedge} & \tilde{H}^k(X_+ \wedge X_+; R) & \xrightarrow{\Delta'_X} & \tilde{H}^k(X_+; R) \\ p_+^* \times \text{id}_X^* \uparrow & & (p_+ \wedge \text{id}_X)^* \uparrow & \nearrow \text{id} & \\ \tilde{H}^0(S^0; R) \times \tilde{H}^k(X_+; R) & \xrightarrow{\wedge} & \tilde{H}^k(S^0 \wedge X_+; R) & & \end{array}$$

unten links das Element $1 \in R = H^0(S^0; R)$ einsetzen.

Es sei $T: \tilde{H}^\bullet(X; R) \otimes_R \tilde{H}^\bullet(X; R) \rightarrow \tilde{H}^\bullet(X; R) \otimes_R \tilde{H}^\bullet(X; R)$ gegeben durch $T(\alpha \otimes \beta) = (-1)^{k\ell} \beta \otimes \alpha$ für $\alpha \in \tilde{H}^k(X; R)$ und $\beta \in \tilde{H}^\ell(X; R)$. Es sei Δ'_X eine zelluläre Approximation der Diagonalen Δ_X und t die Transpositionsabbildung, dann ist auch $\Delta''_X = t \circ \Delta'_X$ eine zelluläre Approximation der Diagonalen. Nach Proposition 6.21 (4) kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}^\bullet(X; R) \otimes_R \tilde{H}^\bullet(X; R) & \xrightarrow{\wedge} & \tilde{H}^\bullet(X \wedge X; R) & \xrightarrow{\Delta''_X} & \tilde{H}^\bullet(X; R) \\ T \downarrow & & t^* \downarrow & \nearrow \Delta'_X & \\ \tilde{H}^\bullet(X; R) \otimes_R \tilde{H}^\bullet(X; R) & \xrightarrow{\wedge} & \tilde{H}^\bullet(X \wedge X; R) & & \end{array}$$

Daraus folgt (3). □

6.25. BEMERKUNG. Zur Erinnerung: es sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Dann ist eine (assoziative) R -Algebra ein Ring $(A, +, *)$, der gleichzeitig ein unitärer R -Modul ist. Die Addition ist für beide Strukturen die gleiche, und die Algebren-Multiplikation „ $*$ “ in A ist R -bilinear. Da jede abelsche Gruppe ein \mathbb{Z} -Modul ist, ist ein Ring das gleiche wie eine (assoziative) \mathbb{Z} -Algebra. Insbesondere ist $(\tilde{H}^\bullet(X; R), \smile)$ eine R -Algebra, die *Kohomologiealgebra*.

Eine Algebra besitzt genau dann ein Einselement, wenn es einen Ringhomomorphismus $\varphi: R \rightarrow A$ gibt, so dass $\varphi(r) * a = a * \varphi(r) = ra$, denn dann gilt $1 = \varphi(1)$. Zu jeder R -Algebra A lässt sich ein Einselement hinzufügen. Dazu definieren wir $B = A \oplus R$ mit der Multiplikation

$$(a, r) * (b, s) = (a * b + sa + rb, rs)$$

und erhalten $1_B = (0, 1)$ als neues Einselement (wenn A bereits ein Einselement hatte, übernimmt 1_B jetzt diese Rolle). Für die Einbettung $\iota: A \rightarrow B$ gilt die folgende universelle Eigenschaft: zu jedem Algebren-Homomorphismus $f: A \rightarrow C$ in eine R -Algebra C mit Eins 1_C existiert genau ein Homomorphismus $F: B \rightarrow C$ mit $F \circ \iota = f$ und $F(1_B) = 1_C$. Wegen (2) macht diese Konstruktion aus der reduzierten die unreduzierte Kohomologiealgebra

$$H^\bullet(X; R) = \tilde{H}^\bullet(X; R) \oplus R \quad \text{mit} \quad (\alpha, r) \smile (\beta, s) = (\alpha \smile \beta + s\alpha + r\beta, rs).$$

Insbesondere ist die unreduzierte Kohomologie eine R -Algebra mit Eins, und die unreduzierte Homologie bildet einen unitären Modul.

Wenn $X = \coprod_{i \in I} X_i$ mehrere Zusammenhangskomponenten hat und der Basispunkt x_0 in X_0 mit $0 \in I$ liegt, dann folgt

$$\tilde{H}^\bullet(X; R) = \tilde{H}^\bullet(X_0; R) \oplus \prod_{i \in I \setminus \{0\}} H^\bullet(X_i; R) \quad \text{und} \quad H^\bullet(X; R) = \prod_{i \in I} H^\bullet(X_i; R).$$

Insbesondere hängt die reduzierte Kohomologiealgebra im Allgemeinen von der Wahl der Zusammenhangskomponente des Basispunktes ab, die unreduzierte jedoch nicht. Außerdem können wir die reduzierte Kohomologiealgebra aus der unreduzierten durch Einschränkung zurückerhalten.

Schließlich lässt sich das äußere Produkt aus dem unreduzierten Cup-Produkt rekonstruieren. Seien dazu $p: X \times Y \rightarrow X$ und $q: X \times Y \rightarrow Y$ die Projektionen, dann kann zeigen, dass

$$(p^* \alpha) \smile (q^* \beta) = \Delta_{X \times Y}^* ((p^* \alpha) \times (q^* \beta)) \in H^\bullet(X \times Y; R).$$

Wir erhalten auch das reduzierte äußere Produkt, da das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^k(X; R) \otimes_R H^\ell(Y; R) & \xrightarrow{\times} & H^{k+\ell}(X \times Y; R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{H}^k(X; R) \otimes_R \tilde{H}^\ell(Y; R) & \xrightarrow{\wedge} & \tilde{H}^{k+\ell}(X \wedge Y; R) \end{array}$$

kommutiert und die kurze exakte Sequenz in Bemerkung 6.2 (3) spaltet. Es ist also egal, in welchem der vier möglichen Settings (reduziert/unreduziert, innen/außen) wir zuerst Produkte definieren.

Da das Cup-Produkt eine Approximation der Diagonalen erfordert, ist es in Einzelfällen nicht immer einfach zu berechnen.

6.26. BEISPIEL. Es sei $k + \ell = n$. Wir arbeiten der Einfachheit halber mit \mathbb{Z} -Koeffizienten, die folgenden Überlegungen funktionieren aber für jeden Ring R . Wir stellen $\mathbb{C}P^n$ wie in Übung 1.130 als CW-Komplex dar mit je einer Zelle der Dimension $2k$ für alle $0 \leq k \leq n$ dar. Die Zellen bis zur Dimension $2k - 2$ bilden dabei einen zu $\mathbb{C}P^{k-1}$ homöomorphen Unterraum. Die $2k$ -Zelle „trägt“ eine Kohomologieklass α , die unter den natürlichen Abbildungen

$$\mathbb{C}P^n \xrightarrow{p_k} \mathbb{C}P^n / \mathbb{C}P^{k-1} \xleftarrow{t_k} S^{2k}$$

der Klasse ε^{2k} aus Beispiel 6.22 entspricht:

$$\alpha \in \tilde{H}^{2k}(\mathbb{C}P^n) \xleftarrow{\cong} \tilde{H}^{2k}(\mathbb{C}P^n / \mathbb{C}P^{k-1}) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}^{2k}(S^{2k}) \ni \varepsilon^{2k}.$$

Es seien $\beta \in \tilde{H}^{2\ell}(\mathbb{C}P^n)$ und $\gamma \in \tilde{H}^{2n}(\mathbb{C}P^n)$ entsprechend konstruiert. Dann gilt

$$\alpha \smile \beta = \gamma. \quad (*)$$

Die obigen Klassen verhalten sich natürlich unter Inklusionen $\mathbb{C}P^n \hookrightarrow \mathbb{C}P^m$ für $m \geq n$. Sei insbesondere $\omega \in \tilde{H}^2(\mathbb{C}P^n)$ ein Erzeuger, dann erhalten wir Ringisomorphismen

$$(\tilde{H}^\bullet(\mathbb{C}P^n; R), \smile) \cong (\omega R[\omega]) / \omega^{n+1} \quad \text{und} \quad (H^\bullet(\mathbb{C}P^n; R), \smile) \cong R[\omega] / \omega^{n+1}.$$

Um (*) zu beweisen, benötigen wir einige geometrische Vorüberlegungen. Dazu schreiben wir Punkte in $\mathbb{C}P^n$ als $[x : y : z]$ mit $x \in \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{C}^k$ und $z \in \mathbb{C}^\ell$, wobei $(x, y, z) \neq 0$, siehe Beispiel 3.33. Wir betrachten die Teilmengen

$$\begin{aligned} A &= \{ [x : y : z] \mid \|y\| \geq |x| \text{ und } \|y\| \geq \|z\| \} \\ \text{und} \quad B &= \{ [x : y : z] \mid \|z\| \geq |x| \text{ und } \|z\| \geq \|y\| \}, \end{aligned}$$

und wählen den Basispunkt $[0 : e_1 : e_1] \in A \cap B \neq \emptyset$. Diese Teilmengen enthalten jeweils als Deformationsretrakt

$$\begin{aligned} A &\supset \{ [0 : y : 0] \mid y \in \mathbb{C}^k \setminus \{0\} \} \cong \mathbb{C}P^{k-1}, \\ B &\supset \{ [0 : 0 : z] \mid z \in \mathbb{C}^\ell \setminus \{0\} \} \cong \mathbb{C}P^{\ell-1}, \\ \text{und} \quad A \cup B &\supset \{ [0 : y : z] \mid (y, z) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \} \cong \mathbb{C}P^{n-1}; \end{aligned}$$

man erhält die Deformation, indem man die entsprechenden Einträge von $(x : y : z)$ jeweils mit dem Homotopieparameter s multipliziert. Die Inklusionsabbildungen $A \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$, $B \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ und $A \cup B \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ sind jeweils Kofaserungen. Indem wir die jeweilige obige Homotopie auf ganz $\mathbb{C}P^n$ ausdehnen, erhalten wir Homotopieäquivalenzen

$$\mathbb{C}P^n/A \simeq \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1}, \quad \mathbb{C}P^n/B \simeq \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{\ell-1} \quad \text{und} \quad \mathbb{C}P^n/(A \cup B) \simeq \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{n-1}.$$

Die Diagonalabbildung $\Delta_{\mathbb{C}P^n}$ induziert eine Abbildung

$$\Delta: \mathbb{C}P^n/(A \cup B) \longrightarrow (\mathbb{C}P^n/A) \wedge (\mathbb{C}P^n/B).$$

Zusammen mit den obigen Homotopieäquivalenzen erhalten wir insbesondere eine Abbildung

$$\Delta': \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{n-1} \longrightarrow (\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1}) \wedge (\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{\ell-1}),$$

so dass das folgende Diagramm bis auf Homotopie kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}P^n & \xrightarrow{p_n} & \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{n-1} & \xleftarrow{l_n} & S^{2n} \\ \Delta_{\mathbb{C}P^n} \downarrow & & \Delta' \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathbb{C}P^n \wedge \mathbb{C}P^n & \xrightarrow{p_k \wedge p_\ell} & \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1} \wedge \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{\ell-1} & \xleftarrow{l_k \wedge l_\ell} & S^{2k} \wedge S^{2\ell}. \end{array}$$

Die Abbildungen rechts kommen daher, dass wir die Zellen der jeweils kleinsten positiven Dimension miteinander multiplizieren.

Wir zeigen (*) mit Hilfe des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}^{2k}(\mathbb{C}P^n) \otimes_R \tilde{H}^{2\ell}(\mathbb{C}P^n) & \xleftarrow{\cong} & \tilde{H}^{2k}(\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1}) \otimes_R \tilde{H}^{2\ell}(\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{\ell-1}) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}^{2k}(S^{2k}) \otimes_R \tilde{H}^{2\ell}(S^{2\ell}) \\ \wedge \downarrow & & \wedge \downarrow & & \wedge \downarrow \cong \\ \tilde{H}^{2n}(\mathbb{C}P^n \wedge \mathbb{C}P^n) & \xleftarrow{\cong} & \tilde{H}^{2n}(\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1} \wedge \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{\ell-1}) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}^{2n}(S^{2k} \wedge S^{2\ell}) \\ \Delta_{\mathbb{C}P^n}^* \downarrow & & \Delta'^* \downarrow & & \downarrow \cong \\ \tilde{H}^{2n}(\mathbb{C}P^n) & \xleftarrow{\cong} & \tilde{H}^{2n}(\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{n-1}) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}^{2n}(S^{2n}). \end{array}$$

Wir können die Klassen α und β von $\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1}$ beziehungsweise $\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{\ell-1}$ zurückholen, dabei spielt es wegen Homotopieinvarianz keine Rolle, welchen projektiven Unterraum wir jeweils herausteilen. Wenn wir links oben $\alpha \otimes \beta$ einsetzen, erhalten wir rechts oben $\varepsilon^{2k} \otimes \varepsilon^{2\ell}$, und wegen Beispiel 6.22 daher unten rechts ε^{2n} . Also steht unten links $\gamma = \alpha \smile \beta$.

6.e. Spektre und Kohomologiefunktoren

Ähnlich wie in Abschnitt 5.c wollen wir Kohomologietheorien durch Spektre — genauer, durch ω -Spektre — darstellen.

6.27. BEMERKUNG. In der Definition 5.36 eines ω -Spektrums haben wir verlangt, dass der Stabilisierungshomomorphismus $s_i: SE_i \rightarrow E_{i+1}$ für $i \geq n_0$ via Adjunktion $C(SE_i, E_{i+1}) \cong C(E_i, \Omega E_{i+1})$ eine Homotopieäquivalenz $E_i \cong \Omega E_{i+1}$ induziert.

Für jedes $i < n_0$ ersetzen wir den Raum E_i nach dem Satz 4.55 von Milnor durch einen zu $\Omega^{n_0-i} E_{n_0}$ homotopieäquivalenten CW-Komplex, der dann auch zu ΩE_{i+1} homotopieäquivalent ist. Als Stabilisierungsabbildung wählen wir die adjungierte Abbildung $s_i = \text{ev}_{S^1, \Omega E_{i+1}}: SE_i \rightarrow E_{i+1}$ zu $\text{id}_{E_{i+1}}$, siehe Bemerkung 4.28 (1). Für den Moment betrachten wir daher nur ω -Spektren, die die charakteristische Eigenschaft aus Definition 5.36 für alle $i \in \mathbb{Z}$ erfüllen.

Die folgende Konstruktion ist dual zu Satz 5.38.

6.28. SATZ UND DEFINITION. Zu jedem ω -Spektrum $\mathbb{E} = (E_i, s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ existiert ein reduzierter $\mathcal{A}b$ -wertiger Kohomologiefunktor $(\tilde{E}^\bullet, \delta_\bullet)$ mit

$$\tilde{E}^k(X) = [X, E_k].$$

Wir nennen \tilde{E}^\bullet den durch \mathbb{E} dargestellten Kohomologiefunktor.

BEWEIS. Für $f: Y \rightarrow X$ definieren wir $\tilde{E}^k f = f^*: \tilde{E}^k(X) \rightarrow \tilde{E}^k(Y)$ durch $f^*([a]) = [a \circ f]$ für alle $a: X \rightarrow E_k$, somit sind die \tilde{E}^k kontravariante Funktoren.

Da \mathbb{E} ein ω -Spektrum ist, liefert Stabilisieren bijektive Abbildungen

$$\tilde{E}^k(X) = [X, E_k] \xrightarrow{\cong} [X, \Omega E_{k+1}] \xrightarrow{\cong} [SX, E_{k+1}] \xrightarrow{\cong} [SX, \Omega E_{k+2}] \xrightarrow{\cong} [S^2 X, E_{k+2}].$$

Da $[S^2 X, E_{k+2}]$ nach Bemerkung 3.75 (2) eine abelsche Gruppe ist, nehmen die Funktoren \tilde{E}^k Werte in der Kategorie $\mathcal{A}b$ der abelschen Gruppen an.

Es sei (X, Y) eine Kofaserung. Wir betrachten die Puppe-Sequenz 4.67 (3) und erhalten die lange exakte Kohomologie-Sequenz 6.1 (2) mit Hilfe des Diagramms

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & [X, E_k] & \longrightarrow & [Y, E_k] & & \\ & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & \searrow \delta & \\ \cdots & \longrightarrow & [SX, E_{k+1}] & \longrightarrow & [SY, E_{k+1}] & \longrightarrow & [X/Y, E_{k+1}] \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Mit der universellen Eigenschaft des Bouquets erhalten wir das Summenaxiom 6.1 (3), da

$$\tilde{E}^k \left(\bigvee_{i \in I} X_i \right) = \left[\bigvee_{i \in I} X_i, E_k \right] \cong \prod_{i \in I} [X_i, E_k] = \prod_{i \in I} \tilde{E}^k(X_i). \quad \square$$

6.29. BEMERKUNG. Umgekehrt gilt der *Brownsche Darstellungssatz*: Sei \tilde{h}^\bullet ein $\mathcal{A}b$ -wertiger verallgemeinerter Kohomologiefunktor, dann gibt es ein ω -Spektrum E_\bullet und einen natürlichen Isomorphismus $\tilde{E}^\bullet \rightarrow \tilde{h}^\bullet$ auf der Kategorie der CW-Komplexe. Mit anderen Worten: schränkt man sich auf die Kategorie der zu CW-Komplexen homotopieäquivalenten Räume ein, dann ist jeder Kohomologiefunktor wie in Definition 6.28 durch ein Spektrum darstellbar.

Wir betrachten das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum $\mathbb{H}A$ aus Satz 5.43 zu einer abelschen Gruppe A . Nach Definition 5.41 (2) induziert die Abbildung $s_k: SHA_k \rightarrow HA_{k+1}$ eine schwache Äquivalenz $HA_k \rightarrow \Omega HA_{k+1}$. Daher ist jedes Eilenberg-Mac Lane-Spektrum ein ω -Spektrum. Wir fassen unsere bisherigen Erkenntnisse zusammen.

6.30. SATZ. Es sei A eine abelsche Gruppe.

- (1) Es existiert ein gewöhnlicher reduzierter Kohomologiefunktor $\tilde{H}^\bullet(\cdot; A): \mathcal{H}kw\mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{A}b$ mit

$$\tilde{H}^k(X; A) = \widetilde{HA}^k(X),$$

der das Dimensionsaxiom 5.2 (4) mit $\tilde{H}^0(S^0; A) \cong A$ erfüllt.

- (2) Jeder andere gewöhnliche reduzierte Homologiefunktor mit den obigen Eigenschaften ist auf der vollen Unterkategorie $\mathcal{H}CW_+ \subset \mathcal{H}kw\mathcal{H}_+$ der punktierten CW-Komplexe zu $\tilde{H}^\bullet(\cdot; A)$ natürlich isomorph.
- (3) Zu jedem Gruppenhomomorphismus $f: A \rightarrow B$ existiert eine natürliche Transformation $\tau_{f, \bullet}: \widetilde{HA}^\bullet \rightarrow \widetilde{HB}^\bullet$, so dass $\tau_{f, 0}(S^0) = f: A \cong \widetilde{HA}^0(S^0) \rightarrow \widetilde{HB}^0(S^0) \cong B$.

Man beachte, dass \tilde{H}^\bullet im Gegensatz zu \tilde{H}_\bullet nicht unter schwachen Äquivalenzen invariant ist, siehe Übung 6.67. Daher erhalten wir (2) und (3) nur auf der Kategorie $\mathcal{H}CW_+$.

BEWEIS. Nach Satz 6.28 ist $\tilde{H}^\bullet(\cdot; A)$ ein reduzierter Kohomologiefunktor. Aussage (1) folgt aus Definition 5.41, denn für alle j gilt

$$\tilde{H}^k(S^0; A) \cong [S^j, E_{j+k}] = \pi_j(E_{j+k}) \cong \begin{cases} A & \text{falls } k = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aussage (2) folgt aus Satz 6.15.

Sei schließlich f gegeben, dann liefert Satz 5.43 Abbildungen $Hf_n: HA_n \rightarrow HB_n$, die mit den Strukturabbildungen s_\bullet der Spektren verträglich sind, so dass $Hf_{n*} = f: A \cong \pi_n(HA_n) \rightarrow \pi_n(HB_n) \cong B$. Wir erhalten die gesuchten natürlichen Transformationen $\tau_{f,k}$ durch

$$\tau_{f,k}: \tilde{H}^k(X; A) = [X, HA_k] \xrightarrow{Hf_k \circ} [X, HB_k] = \tilde{H}^k(X; B). \quad \square$$

6.31. BEMERKUNG. Wir können jeden Kohomologiefunktor durch einen ersetzen, der zusätzlich invariant unter schwachen Äquivalenzen ist. Dazu ersetzen wir einen Raum X durch eine CW-Approximation $f: X' \rightarrow X$ wie in Satz 4.51 und definieren

$$\tilde{\mathcal{E}}^k(X) = \tilde{E}^k(X').$$

Sei $g: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, dann erhalten wir eine CW-Approximation $h: Y' \rightarrow Y$ und eine bis auf Homotopie eindeutige Abbildung $g': X' \rightarrow Y'$, so dass $g \circ f$ zu $h \circ g'$ homotop ist. Wir erhalten daher eine natürliche Transformation $\tilde{E}^\bullet \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^\bullet$ wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E}^k(X) & \xrightarrow{\tilde{E}^k f} & \tilde{E}^k(X') = \tilde{\mathcal{E}}^k(X) \\ \tilde{E}^k g \uparrow & & \tilde{E}^k g' \uparrow \tilde{\mathcal{E}}^k g \\ \tilde{E}^k(Y) & \xrightarrow{\tilde{E}^k h} & \tilde{E}^k(Y') = \tilde{\mathcal{E}}^k(Y). \end{array}$$

Wenn $g: X \rightarrow Y$ eine schwache Äquivalenz war, dann ist g' jetzt eine Homotopieäquivalenz, und somit ist $\tilde{\mathcal{E}}^k g = \tilde{E}^k g'$ ein Isomorphismus.

Mit dieser Methode erzwingen wir in Satz 6.30 nicht nur Invarianz unter schwachen Äquivalenzen, sondern wegen Satz 6.15 auch die Eindeutigkeit des so konstruierten Kohomologiefunktors $\mathcal{H}A^\bullet$ auf ganz $kw\mathcal{H}_+$. Insbesondere ist singuläre Kohomologie invariant unter schwachen Äquivalenzen, so dass $\mathcal{H}A^\bullet$ zur singulären Kohomologie natürlich isomorph ist. Wir werden uns mit dieser Frage im Folgenden aber nicht intensiver auseinandersetzen.

6.f. Vektorbündel

In diesem Abschnitt definieren wir Vektorbündel, das sind spezielle Faserbündel, deren Fasern eine lineare Struktur tragen. Ein Beispiel ist das Tangentialbündel einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. In Abschnitt 3.i hatten wir bereits das Normalenbündel kennengelernt. Aus diesem Grund spielen Vektorbündel in der Differentialgeometrie und -topologie eine Rolle. Wir wählen einen etwas vereinfachten Zugang, bei dem wir uns auf Vektorbündel über CW-Komplexen konzentrieren. Die Argumente für die größere Klasse der parakompakten Räume finden sich unter anderem in [At] und in [H2].

6.32. DEFINITION. Eine *topologische Gruppe* ist ein topologischer Raum G mit Basispunkt $e \in G$ und zwei stetigen Abbildungen $*$: $G \times G \rightarrow G$ und \cdot^{-1} : $G \rightarrow G$, so dass $(G, *, e, \cdot^{-1})$ die Gruppenaxiome erfüllt.

Eine *stetige (Links-) Operation* von G auf einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $G \times X \rightarrow X$ mit $(g, x) \mapsto g \cdot x$, so dass

$$g \cdot (h \cdot x) = (g * h) \cdot x \quad \text{und} \quad e \cdot x = x \quad \text{für alle } x \in X \text{ und } g, h \in G.$$

Entsprechend definieren wir stetige Rechts-Operationen $(x, g) \mapsto x.g$.

Beispiele sind zum einen beliebige Gruppen G , versehen mit der diskreten Topologie. Zum anderen sind alle Matrixgruppen $G \subset GL_n(\mathbb{k})$ mit der Unterraumtopologie zu $GL_n(\mathbb{k}) \subset \mathbb{k}^{n \times n}$ für $\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder \mathbb{H} und $n \in \mathbb{N}$ topologische Gruppen. Wir interessieren uns vor allem für die Gruppen

$$U(n, \mathbb{k}) = \{ A \in GL_n(\mathbb{k}) \mid A^* A = E_n \} = \begin{cases} O(n) & \text{für } \mathbb{k} = \mathbb{R}, \\ U(n) & \text{für } \mathbb{k} = \mathbb{C}, \text{ und} \\ Sp(n) & \text{für } \mathbb{k} = \mathbb{H}. \end{cases}$$

Die Matrizen mit Determinante 1 bilden Untergruppen $SO(n) \subset O(n)$ sowie $SU(n) \subset U(n)$. Über \mathbb{H} ist keine Determinante definiert.

Es sei jetzt $p: V \rightarrow X$ ein Faserbündel mit typischer Faser \mathbb{k}^r wie in Definition 3.30, es sei G eine topologische Gruppe und $\rho: G \hookrightarrow GL_r(\mathbb{k})$ ein stetiger Monomorphismus. Dann wirkt G von links auf \mathbb{k}^r durch $(g, x) \mapsto g \cdot x = \rho(g) \cdot x$.

6.33. DEFINITION. Eine (G, ρ) -Vektorbündelatlas auf $p: V \rightarrow X$ ist eine Menge lokaler Trivialisierungen

$$\mathcal{A} = \{ (U_i, \varphi_i) \mid i \in I \} \quad \text{mit} \quad p \times \varphi_i: p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{k}^r, \quad (1)$$

so dass $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X bildet und es für je zwei $i, j \in I$ eine stetige Abbildung $g_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow G$ mit

$$\varphi_i = (\rho \circ g_{ij}) \cdot \varphi_j: p^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow \mathbb{k}^r \quad (2)$$

für alle $i, j \in I$ gibt. Zwei (G, ρ) -Vektorbündelatlasen heißen *äquivalent*, wenn ihre Vereinigung wieder ein (G, ρ) -Vektorbündelatlas ist.

Ein (G, ρ) -Vektorbündel über einem Raum X ist ein Faserbündel $p: V \rightarrow X$ zusammen mit einer Äquivalenzklasse von (G, ρ) -Vektorbündelatlasen. In diesem Fall heißt G die *Strukturgruppe* und r der *Rang* von $p: V \rightarrow X$.

Eine (G, ρ) -Vektorbündelabbildung von $p: V \rightarrow X$ nach $q: W \rightarrow Y$ ist eine Abbildung $F: V \rightarrow W$, für die eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ mit $q \circ F = f \circ p$ existiert, so dass es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U' \subset Y$ von $y = f(x)$ und eine Umgebung $U \subset p^{-1}(U')$ von x , verträgliche lokale Trivialisierungen (U, φ) von V und (U', ψ) von W sowie eine Abbildung $h: U \rightarrow U'$ gibt mit

$$\psi \circ F = (\rho \circ h) \cdot \varphi: p^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{k}^r. \quad (3)$$

Man nennt F dann auch eine G -Vektorbündelabbildung über f . Eine G -Vektorbündelabbildung über der Identität heißt auch G -Vektorbündelisomorphismus. Die Menge der Isomorphieklassen von G -Vektorbündeln über X wird mit $\text{Bun}_G(X)$ bezeichnet.

Da ρ in den meisten Fällen klar sein wird, schreiben wir kurz G -Vektorbündel statt (G, ρ) -Vektorbündel.

6.34. BEISPIEL. Wir geben einige einfache Beispiele an.

- (1) Das *triviale Vektorbündel* $\underline{\mathbb{k}}^r = X \times \mathbb{k}^r \rightarrow X$ hat einen Vektorbündelatlas aus einer einzigen lokalen Trivialisierung $\Phi = \text{id}_{X \times \mathbb{k}^r}$. Falls wir $G = \{e\}$ wählen, ist es bis auf eindeutige Isomorphie das einzige G -Vektorbündel.
- (2) Das *Möbiusband* ist das einzige nichttriviale $O(1)$ -Vektorbündel über S^1 . Wir können S^1 beispielsweise mit drei Intervallen U_1, U_2, U_3 so überdecken, dass $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \emptyset$, und $g_{ij} = -1$ setzen für alle $i \neq j$.

- (3) Es sei M eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit mit einem Atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$. Für das Tangentialbündel $p: TM \rightarrow M$ definieren wir einen Atlas $\mathcal{A} = (U_i, d\varphi_i)_{i \in I}$. Da die Kartenwechsel $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ differenzierbar sind, gilt $g_{ij} = d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}): U_i \cap U_j \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$.
- (4) Eine Riemannsche Metrik g ist ein Skalarprodukt g_x auf $T_x M$, das differenzierbar von $x \in M$ abhängt. Indem wir auf den $GL_n(\mathbb{R})$ -Atlas \mathcal{A} das Gram-Schmidt-Verfahren anwenden, erhalten wir einen $O(n)$ -Vektorbündelatlant. Man beachte, dass der Atlas aus (3) nur dann selbst ein $O(n)$ -Atlas sein kann, wenn (M, g) flach ist, das heißt, wenn der Riemannsche Krümmungstensor verschwindet.
- (5) Für n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten erhalten wir das Tangentialbündel analog als $GL_n(\mathbb{C})$ -Vektorbündel.

Als weiteres Beispiel lernen wir im nächsten Abschnitt das Normalenbündel einer differenzierbaren Untermannigfaltigkeit kennen.

Man beachte, dass die Abbildungen g_{ij} in (2) eindeutig durch φ_i und φ_j bestimmt sind, falls sie existieren, da $\rho: G \rightarrow GL_r(\mathbb{k})$ als injektiv vorausgesetzt wurde. Man kann den Begriff noch verallgemeinern, indem man beliebige Homomorphismen ρ zulässt. Das ist beispielsweise dann nötig, wenn man Spin-Strukturen betrachten möchte. Aber dann muss zusätzlich zu (2) noch $g_{ik} = g_{ij} \cdot g_{jk}$ fordern, und zusätzlich zu (3) benötigt man ebenfalls eine weitere Bedingung. Vektorbündel sind bis auf Isomorphismen durch die g_{ij} festgelegt, daher ist $\text{Bun}_G(X)$ tatsächlich eine Menge.

6.35. BEMERKUNG. Sei $p: V \rightarrow X$ ein G -Vektorbündel und $x \in X$, dann heißt $V_x = p^{-1}(x)$ eine *Faser* des Vektorbündels V . Über die lokalen Trivialisierungen aus Definition 6.33 (1) lassen sich G -invariante Strukturen von \mathbb{k}^r auf alle Fasern übertragen, wegen (2) ist es dabei egal, welche Trivialisierung für eine bestimmte Faser gewählt wurde. Bedingung (3) garantiert, dass auch alle G -Vektorbündelabbildungen diese zusätzliche Struktur erhalten.

- (1) Die Trivialisierung φ_i induziert auf jeder Faser V_x für $x \in U_i$ die Struktur eines r -dimensionalen \mathbb{k} -Vektorraums, daher der Name „Vektorbündel“. Daher nennen wir $GL_r(\mathbb{k})$ -Vektorbündel auch einfach *Vektorbündel*. Diese linearen Strukturen sind beispielsweise in der Differentialgeometrie und in der Physik sehr wichtig.
- (2) Es sei $p: V \rightarrow X$ ein $SL_r(\mathbb{R})$ -Vektorbündel vom Rang $r \geq 1$. Der Raum \mathbb{R}^r trage die Standardorientierung. Dann induzieren die Trivialisierungen φ_i eine eindeutige Orientierung auf allen Fasern von V . Sei umgekehrt auf allen Fasern von V eine Orientierung so gegeben, dass $\text{sign det } \varphi_i: U_i \rightarrow \{\pm 1\}$ lokalkonstant ist, dann lassen sich die φ_i zu orientierungserhaltenden Trivialisierungen abändern, und wir erhalten eine eindeutige $SL_r(\mathbb{R})$ -Struktur auf V . Das Möbiusband aus Beispiel 6.34 (2) trägt keine Orientierung, also auch keine $SL_1(\mathbb{R})$ -Struktur.
- (3) Eine $O(r)$ -Struktur entspricht der Wahl eines Skalarproduktes auf jeder Faser. Eine $SO(r)$ -Struktur kodiert sowohl ein Skalarprodukt als auch eine Orientierung auf jeder Faser. Analog zu Beispiel 6.34 (4) kann man diese Skalarprodukte immer stetig wählen. Zu jeder $GL_r(\mathbb{R})$ - ($SL_r(\mathbb{R})$ -) Struktur erhält man also immer eine $O(r)$ - ($SO(r)$ -) Struktur; diese ist sogar bis auf Isomorphismen eindeutig.
- (4) Sei $r = 2k$. Eine $GL(k, \mathbb{C})$ -Struktur macht aus einem reellen Vektorbündel vom Rang $2k$ ein komplexes vom Rang k . Eine $U(k)$ -Struktur entspricht der zusätzlichen Wahl eines Hermiteschen Skalarproduktes auf jeder Faser.
- (5) Manchmal können wir für das Tangentialbündel einer $2n$ -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit einen $GL_n(\mathbb{C})$ -Vektorbündelatlant wählen. In diesem Fall sprechen wir von einer *fast komplexen* Struktur. Eine fast komplexe Struktur erlaubt im Allgemeinen nicht, einen komplexen Mannigfaltigkeitsatlant zu wählen, fast komplexe Strukturen auf TM sind somit schwächer als die komplexen Strukturen aus Beispiel 6.34 (5).

- (6) Wenn die Strukturgruppe G diskret ist, sind die Abbildungen g_{ij} aus Definition 6.33 (2) lokal konstant. In diesem Fall erhalten wir ein *flaches Vektorbündel*.

6.36. BEMERKUNG. Man kann G -Vektorbündel zurückziehen, siehe Übung 3.112 zu Faserbündeln. Sei $p: V \rightarrow X$ ein G -Vektorbündel und $f: Y \rightarrow X$ stetig, dann erhält man das zurückgezogene G -Vektorbündel $f^*p: f^*V \rightarrow Y$ und eine Abbildung $F: f^*V \rightarrow V$ mit

$$f^*E = \{ (y, v) \in Y \times V \mid p(v) = f(y) \}, \quad (f^*p)(y, v) = y \quad \text{und} \quad F(y, v) = v.$$

Sei (U_i, φ_i) eine lokale Trivialisierung von V , dann ist $(f^{-1}(U_i), \varphi_i \circ F)$ die zurückgeholte lokale Trivialisierung von f^*V ; insbesondere erhalten wir einen Atlas.

- (1) Für ein G -Vektorbündel $q: W \rightarrow Y$ entspricht eine G -Vektorbündelabbildung $F: W \rightarrow V$ über f genau einem G -Vektorbündelisomorphismus $W \cong f^*V$.
- (2) Falls $f: Y \rightarrow X$ eine Inklusion ist, gibt es einen offensichtlichen Isomorphismus $f^*V = p^{-1}(Y)$, und wir schreiben kurz $V|_Y = p^{-1}(Y)$.
- (3) Über dem einpunktigen Raum pt ist jedes G -Vektorbündel trivial. Also entspricht eine G -Vektorbündelisomorphismus $V \rightarrow \underline{\mathbb{k}}^r$ genau einer G -Vektorbündelabbildung $F: V \rightarrow \mathbb{k}^r$ über $X \rightarrow \text{pt}$.

6.37. LEMMA. *Es sei X ein CW-Komplex und $p: V \rightarrow X \times I$ ein G -Vektorbündel. Bezeichne $q: X \times I \rightarrow X$ die Projektion auf die erste Komponente, dann gibt es eine G -Vektorbündelabbildung $Q: V \rightarrow V|_{X \times \{0\}}$ über q mit $Q|_{X \times \{0\}} = \text{id}_{X \times \{0\}}$.*

Insbesondere liefern homotope Abbildungen $f, g: Y \rightarrow X$ isomorphe Bündel $f^*V \cong g^*V \rightarrow Y$, falls Y ein CW-Komplex ist. Denn sei $h: Y \times I \rightarrow X$ eine Homotopie, dann wende das obige Lemma auf $h^*V \rightarrow Y \times I$ an.

BEWEIS. Wir beweisen das Lemma zuerst unter der Annahme, dass für alle n jedes G -Vektorbündel über D^n trivial ist. Dazu konstruieren wir Q induktiv Zelle für Zelle. Sei $\Psi: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$ charakteristische Abbildung einer Zelle von X . Da $D^n \times I \cong D^{n+1}$, ist das zurückgeholte G -Vektorbündel trivial, wir erhalten also eine G -Vektorbündelabbildung $\Xi: \underline{\mathbb{k}}^r \rightarrow V$ über $\xi = \Psi \times \text{id}_I$.

Die G -Vektorbündelabbildung $Q': V|_{X^{n-1} \times I} \rightarrow V|_{X^{n-1} \times \{0\}}$ induziert daher eine stetige Abbildung $q': S^{n-1} \times I \rightarrow G$, so dass

$$q'(y, 0) = e \quad \text{und} \quad (Q' \circ \Xi)(y, t, v) = \Xi(y, 0, q'(y, t) \cdot v) \quad (*)$$

für alle $y \in S^{n-1}$, $t \in I$ und $v \in \mathbb{k}^r$. Wir können q' daher zunächst durch e auf $D^n \times \{0\}$ fortsetzen, und anschließend zu $q: D^n \times I \rightarrow G$, da (D^n, S^{n-1}) eine Kofaserung ist. Jetzt definieren wir Q auf $\text{im } \xi = \text{im } \Psi \times I$ wie in (*). Auf diese Weise konstruieren wir Q auf ganz V .

Es bleibt zu zeigen, dass jedes Vektorbündel über $D^n \cong I^n$ trivial ist. Wir führen den Beweis durch Induktion über n ; für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Es sei jetzt ein G -Vektorbündel $V \rightarrow I^{n+1}$ mit einem Atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung haben wir eine G -Vektorbündelabbildung $F_0: V|_{I^n \times \{0\}} \rightarrow \mathbb{k}^r$.

Wie im Beweis von Proposition 3.31 zerteilen wir I^{n+1} in kleinere Würfel der Kantenlänge $\frac{1}{N}$, so dass jeder der kleinen Würfel ganz in einer der offenen Mengen U_i enthalten ist. Somit ist V auf jedem der obigen Würfel trivial. Das obige Argument liefert uns daher Vektorbündelabbildungen

$$F_i: V|_{I^n \times [i-1, i]} \rightarrow V|_{I^n \times \{i-1\}}$$

über den Projektionen $I^n \times [i-1, i] \rightarrow I^n \times \{i-1\}$. Diese lassen sich zusammen mit F_0 zu einer Trivialisierung von V zusammensetzen. \square

Wir erinnern uns an die Verbund-Konstruktion aus Übung 3.114. Für eine topologische Gruppe G definieren wir

$$EG = \operatorname{colim}_{n \rightarrow \infty} G^{*n},$$

wobei G^{*n} den n -fachen Verbund mit sich selbst bezeichne. Es sei

$$\Delta^n = \{ (s_0, \dots, s_n) \in [0, 1]^{n+1} \mid s_0 + \dots + s_n = 1 \}$$

der Standardsimplex. Dann gilt

$$G^{*(n+1)} \cong G^{n+1} \times \Delta^n / \sim,$$

wobei die Relation \sim erzeugt wird durch

$$(g_0, \dots, g_n; s_0, \dots, s_n) \sim (g_0, \dots, g'_i, \dots, g_n; s_0, \dots, s_n) \quad \text{wenn } s_i = 0.$$

Wir erhalten natürliche Einbettungen $G^{*n} \hookrightarrow G^{*n} * G \cong G^{*(n+1)}$, bezüglich der wir den obigen Kolimes bilden. Tatsächlich ist EG die geometrische Realisierung eines sogenannten *simplicialen Raums*.

Sei G selbst k -zusammenhängend mit $k \geq -1$, dann folgt aus Übung 3.115 induktiv, dass G^{*n} ein $(n(k+2) - 2)$ -fach zusammenhängender Raum ist. Insbesondere ist EG schwach zusammenziehbar. Wenn wir EG als CW-Komplex schreiben können (zum Beispiel, wenn G eine diskrete Gruppe oder eine Matrixgruppe ist), ist EG nach dem Satz 4.46 von Whitehead sogar zusammenziehbar.

Die Gruppe G wirkt stetig von rechts auf EG durch

$$(g_0, \dots, g_n; s_0, \dots, s_n) \cdot g = (g_0g, \dots, g_ng; s_0, \dots, s_n).$$

Diese Operation ist frei und eigentlich. Für den Quotienten schreiben wir

$$BG = EG/G.$$

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Teilmenge

$$E_i = \operatorname{colim}_{n \geq i} \{ (g_0, \dots, g_n; s_0, \dots, s_n) \mid s_i \neq 0 \} \subset EG.$$

Da $E_i \cap G^{*(n+1)}$ für alle n offen ist, ist E_i in EG offen. Außerdem ist E_i invariant unter der obigen G -Wirkung, also sei $B_i = E_i/G \subset BG$ der Quotient. Dann ist $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von BG . Für Punkte $q = (g_0, \dots, g_n; s_0, \dots, s_n) \in EG$ ist die Koordinate $g_i \in G$ aufgrund der Verbund-Konstruktion wohldefiniert, wenn $q \in E_i$.

6.38. DEFINITION. Sei G eine topologische Gruppe und $\rho: G \hookrightarrow GL_r(\mathbb{k})$ ein stetiger Monomorphismus.

- (1) Der Raum BG heißt *klassifizierender Raum* von G .
- (2) Das *tautologische* G -Vektorbündel $\tau: V_\rho G \rightarrow BG$ ist definiert durch

$$V_\rho G = \{ [q, w] \mid (q, w) \in EG \times \mathbb{k}^r \},$$

wobei $[q, w] = \{ (q \cdot g^{-1}, \rho(g) \cdot w) \mid g \in G \},$

und $\tau([q, w]) = [q] = q \cdot G \in BG,$

mit lokalen Trivialisierungen ψ_i über B_i , gegeben durch

$$\psi_i([(g_0, \dots, g_n; s_0, \dots, s_n), w]) = \rho(g_i) \cdot w.$$

- (3) Sei $p: V \rightarrow X$ ein (G, ρ) -Vektorbündel. Eine Abbildung $\vartheta: X \rightarrow BG$ heißt *klassifizierende Abbildung* von V , wenn es eine G -Vektorbündelabbildung $\Theta: V \rightarrow V_\rho G$ über ϑ gibt.

Man überprüft leicht, dass die Elemente $[q, w]$ wohldefinierte Orbits einer diagonalen Operation von G auf $EG \times \mathbb{k}^r$ sind. Seien jetzt $i, j \in \mathbb{N}$, dann erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung $g_{ij}: B_i \cap B_j \rightarrow G$ durch

$$g_{ij}([(g_0, \dots, g_n; s_0, \dots, s_n)]) = g_i g_j^{-1} \in G. \quad (\dagger)$$

Es gilt $\psi_i = (\rho \circ g_{ij}) \cdot \psi_j$ wie in Definition 6.33 (2) auf $B_i \cap B_j$. Also ist $\tau: V_\rho G \rightarrow BG$ ein G -Vektorbündel. Wenn ρ klar ist, schreiben wir wieder nur VG . Die Beispiele $BO(1) = \mathbb{R}P^\infty$ und $BU(1) = \mathbb{C}P^\infty$ betrachten wir in den Übungen 6.72 und 6.73.

6.39. SATZ (Klassifikation von G -Vektorbündeln). *Sei G eine topologische Gruppe und $\rho: G \hookrightarrow GL_r(\mathbb{k})$ ein stetiger Monomorphismus. Dann gibt es für jeden CW-Komplex X eine natürliche Bijektion*

$$[X_+, BG] \xrightarrow{\cong} \text{Bun}_G(X) \quad \text{mit} \quad [\vartheta] \mapsto \vartheta^* V_\rho G.$$

Wenn $Y \subset X$ ein Unterkomplex ist und bereits eine klassifizierende Abbildung $\vartheta': Y \rightarrow BG$ für $V|_Y$ gegeben ist, kann man ϑ als Fortsetzung von ϑ' wählen, und diese Fortsetzung ist bis auf Homotopie relativ zu Y eindeutig.

Dieser Satz erklärt die Bezeichnungen aus Definition 6.38. Allgemeiner lässt er sich für parakompakte Räume X beweisen. Bevor wir den Satz beweisen, wollen wir die Konstruktion von $VG \rightarrow BG$ motivieren, indem wir zurückgeholte Vektorbündel $\vartheta^* VG$ genauer betrachten. Sei also $\vartheta: X \rightarrow BG$ und $p: V = \vartheta^* VG \rightarrow X$ gegeben, und sei $\Theta: V \rightarrow VG$ die zugehörige G -Vektorbündelabbildung. Wir überdecken X mit offenen Mengen $U_i = \vartheta^{-1}(B_i) \subset X$, dann trifft jede kompakte Teilmenge von X nur endlich viele dieser Mengen. Wir erhalten Trivialisierungen φ_i , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} VG \supset \tau^{-1}(B_i) & \xrightarrow{\psi_i} & B_i \times \mathbb{k}^r \\ \Theta \uparrow & & \uparrow \vartheta \times \text{id}_{\mathbb{k}^r} \\ V \supset p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\varphi_i} & U_i \times \mathbb{k}^r \end{array}$$

kommutiert. Es seien $g_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow G$ die zugehörigen Übergangsfunktionen. Wir erhalten sie, indem wir die Übergangsfunktionen von VG mit ϑ zurückziehen. Wegen (\dagger) folgt für $x \in U_i \cap U_j$, dass

$$g_{ij}(x) = (g_i \circ \vartheta)(g_j^{-1} \circ \vartheta).$$

Anhand der Übergangsfunktionen kennen wir vom Punkt $\vartheta(x) = [g_0, \dots, g_n; s_0, \dots, s_n] \in BG$ bereits den Anteil $[g_0, \dots, g_n] \in G^{n+1}/G$. Die Funktionen $s_i \circ \vartheta: X \rightarrow [0, 1]$ verschwinden außerhalb von U_i und addieren sich an jedem Punkt zu 1 auf, bilden also eine Art "Partition der Eins". Wir erhalten daher eine klassifizierende Abbildung ϑ zu einem Bündel V , indem wir Trivialisierungen über einer Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ wählen und dazu eine passende Partition der Eins festlegen. Diese Beweisskizze übertragen wir jetzt auf den Fall von CW-Komplexen.

BEWEIS. Die obige Abbildung $[X_+, BG] \rightarrow \text{Bun}_G(X)$ ist nach Lemma 6.37 wohldefiniert. Sie ist auch natürlich, denn sei $f: Y \rightarrow X$ stetig, und sei $p: V \rightarrow X$ isomorph zu $\vartheta^* VG$ vermöge einer G -Vektorbündelabbildung $\Theta: V \rightarrow VG$ über ϑ , dann wird $f^* V$ durch $\vartheta \circ f$ klassifiziert. Insbesondere kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} f^* V & \xrightarrow{F} & V & \xrightarrow{\Theta} & VG \\ f^* p \downarrow & & p \downarrow & & \downarrow \tau \\ Y & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{\vartheta} & BG. \end{array}$$

Zum Beweis der Surjektivität sei ein G -Vektorbündel $p: V \rightarrow X$ gegeben. Gesucht ist eine G -Vektorbündelabbildung $\Theta: V \rightarrow VG$. Wie im Beweis von Lemma 6.37 konstruieren wir Θ induktiv Skelett für Skelett. Sei also $\Theta': V|_{X^{n-1}} \rightarrow VG$ über $\vartheta': X^{n-1} \rightarrow BG$ bereits konstruiert, und sei $\Phi: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$ charakteristische Abbildung einer Zelle von X , und sei $\varphi = \Phi|_{S^{n-1}}$. Das zurückgeholte Bündel auf D^n ist nach Lemma 6.37 trivial, wir erhalten also eine G -Vektorbündelabbildung $\Xi: \underline{\mathbb{k}}^r \rightarrow V$ über Φ .

Da S^{n-1} kompakt ist, gilt $\text{im}(\vartheta' \circ \varphi) \subset G^{*N}/G \subset BG$ für ein geeignetes N . Für jedes $i < N$ setze

$$U_i = \{ ty \mid t > 0 \text{ und } y \in (\vartheta' \circ \varphi)^{-1}(B_i) \subset S^{n-1} \} \subset D^n .$$

Außerdem definieren wir $U_N = D^n \setminus S^{n-1}$.

Wir bestimmen $h_i: U_i \rightarrow G$ für $i < N$ wie in Definition 6.33 (3), so dass

$$\psi_i \circ \Theta' \circ \Xi = \rho \circ h_i|_{U_i \cap S^{n-1}}: \underline{\mathbb{k}}^r|_{U_i \cap S^{n-1}} \rightarrow \mathbb{k}^r ,$$

und setzen $h_i(sy) = h_i(y)$ für alle $y \in S^{n-1}$ und alle $t > 0$. Auf $B_i \cap B_j$ gilt $\psi_i = (\rho \circ g_{ij}) \cdot \psi_j$. Sei $q(y) = [(g_0, \dots, g_{N-1}; s_0, \dots, s_{N-1})] \in B_i \cap B_j$, dann folgt

$$h_i(y) = g_i g_j^{-1} \cdot h_j(y) \in G .$$

Außerdem setzen wir $h_N \equiv e$ auf ganz U_N .

Sei $y \in S^{n-1}$ und $(\vartheta' \circ \varphi)(y) = [q]$ mit $q = (g_0, \dots, s_0, \dots)$, dann sind die Funktionen χ_i auf $D^n \setminus \{0\}$ mit

$$\chi_i(ty) = ts_i \quad \text{für alle } t \geq 0$$

für $i < N$ stetig und lassen sich durch 0 auf 0 fortsetzen. Außerdem setzen wir $\chi_N(ty) = 1 - t$ für alle y und t wie oben. Dann gilt $\chi_i(x) = 0$ für alle $x \notin U_i$ und $\chi_0 + \dots + \chi_N = 1$ auf ganz D^n .

Auf U_i definieren wir $Q_i: \underline{\mathbb{k}}^r \rightarrow VG|_{B_i}$ durch

$$Q_i(x, v) = [(g_0^{(i)}(x), \dots, g_N^{(i)}(x); \chi_0(x), \dots, \chi_N(x)), \rho(h_i(x))(v)] \quad \text{für alle } x \in U_i' \text{ und alle } v \in V_x$$

mit
$$g_j^{(i)}(x) = \begin{cases} h_j(y)h_i(y)^{-1} & \text{falls } x \in U_i \cap U_j, \\ e & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man beachte, dass $\chi_j(x) = 0$ falls $x \notin U_j$, so dass es wegen der Verbund-Konstruktion in diesem Fall nicht auf den Wert von $g_j^{(i)}(x)$ ankommt. Da $g_i^{(i)} = e$, gilt

$$\psi_i(Q_i(v)) = \rho(h_i(x))(v); ,$$

so dass Q_i auf dem Rand $U_i \cap S^{n-1}$ mit $\Theta' \circ \Xi$ übereinstimmt.

Man überprüft leicht, dass die Abbildungen Q_i und Q_j auf $U_i \cap U_j$ übereinstimmen, und sich daher zu einer G -Vektorbündelabbildung $Q: \underline{\mathbb{k}}^r \rightarrow VG$ über einer Abbildung $q: D^n \rightarrow BG$ zusammensetzen. Da Q über S^{n-1} mit $\Theta' \circ \Xi$ übereinstimmt, können wir Θ' über $\text{im} \Phi$ so zu einer G -Vektorbündelabbildung Θ fortsetzen, dass $Q = \Theta \circ \Xi$. Am Ende haben wir die gesuchte klassifizierende Abbildung ϑ für $p: V \rightarrow X$ konstruiert.

Zur Injektivität seien $\vartheta_0, \vartheta_1: X \rightarrow BG$ zusammen mit einem G -Vektorbündelisomorphismus $\vartheta_0^*VG \cong \vartheta_1^*VG$ gegeben. Es bezeichne $q: X \times I \rightarrow X$ die Projektion, und es sei $V = (\vartheta_0 \circ q)^*VG \rightarrow X \times I$. Dann haben wir eine G -Vektorbündelabbildung $\Theta_0: V|_{X \times \{0\}} \rightarrow VG$ über $\vartheta_0: X \times \{0\} \rightarrow BG$. Mit Hilfe des obigen Isomorphismus erhalten wir auch eine G -Vektorbündelabbildung $\Theta_1: V|_{X \times \{1\}} \rightarrow VG$ über $\vartheta_1: X \times \{1\} \rightarrow BG$. Es trage $X \times I$ die übliche Zellstruktur, dann konstruieren wir der obigen Methode eine Fortsetzung $\bar{\Theta}: V \rightarrow VG$ über $\bar{\vartheta}: X \times I \rightarrow BG$. Somit ist $\bar{\vartheta}$ die gesuchte Homotopie zwischen ϑ_0 und ϑ_1 . \square

Mit Vektorbündeln sind ähnliche Konstruktionen wie mit Vektorräumen möglich. Wir schauen uns hier speziell zwei davon näher an.

6.40. PROPOSITION UND DEFINITION. Sei $p: V \rightarrow X$ ein G -Vektorbündel mit Atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ und es sei $q: W \rightarrow X$ ein H -Vektorbündel mit Atlas $(V_i, \psi_i)_{i \in I}$. Dann existieren zwei $G \times H$ -Vektorbündel über X , nämlich

- (1) die Whitney-Summe $V \oplus W$ mit Fasern $(V \oplus W)_x \cong V_x \oplus W_x$ und Atlas $(U_i, \varphi_i \oplus \psi_i)$, sowie
- (2) das Whitney-Produkt $V \otimes_{\mathbb{k}} W$ mit Fasern $(V \otimes_{\mathbb{k}} W)_x \cong V_x \otimes_{\mathbb{k}} W_x$ und Atlas $(U_i, \varphi_i \otimes \psi_i)$, falls $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} .

Beide sind bis auf eindeutige Isomorphismen eindeutig bestimmt.

Ein Tensorprodukt über \mathbb{H} existiert leider nicht; das Tensorprodukt zweier quaternionischer Vektorräume trägt nur eine natürliche reelle Vektorraumstruktur.

BEWEIS. Seien $\rho: G \rightarrow GL_r(\mathbb{k})$ und $\pi: H \rightarrow GL_s(\mathbb{k})$ die zugrundeliegenden injektiven Gruppenhomomorphismen, dann sind $(\rho \oplus \pi)(g, h) = \rho(g) \oplus \pi(h) \in GL_{r+s}(\mathbb{k})$ und $(\rho \otimes \pi)(g, h) = \rho(g) \otimes \pi(h) \in GL_{rs}(\mathbb{k})$ ebenfalls injektive Gruppenhomomorphismen; hierbei bezeichnet $A \otimes B$ für $A \in M_r(\mathbb{k})$ und $B \in M_s(\mathbb{k})$ das Kronecker-Produkt von Matrizen (was mit dem Kronecker-Produkt aus Abschnitt 6.c nur den Namen gemeinsam hat).

Wir haben stillschweigend vorausgesetzt, dass beiden Atlanten die gleiche Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ zugrundeliegt, was wir natürlich immer erreichen können. Die angegebenen Ansammlungen lokaler Trivialisierungen bilden tatsächlich $G \times H$ -Atlanten, und zwar in beiden Fällen mit den stetigen Trivialisierungswechseln $(g \times h)_{ij} = g_{ij} \times h_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow G \times H$.

Die Eindeutigkeitsaussage ergibt sich, da die Fasern $V_x \oplus W_x$ beziehungsweise $V_x \otimes_{\mathbb{k}} W_x$ bereits bis auf eindeutige Isomorphismen durch die jeweilige universelle Eigenschaft festgelegt sind. \square

6.g. Topologische K -Theorie

Wir benutzen Vektorbündel jetzt, um einen allgemeinen Kohomologiefunktor zu konstruieren und das zugehörige Spektrum anzugeben. Wir werden hier keinerlei Sätze beweisen. Bis jetzt hatten all unsere Vektorbündel konstante Dimension auf ganz X . Das werden wir in Zukunft nicht mehr fordern.

6.41. DEFINITION. Es sei X ein topologischer Raum. Ein \mathbb{k} -Vektorbündel $p: V \rightarrow X$ besteht aus einer lokalkonstanten Funktion $r: X \rightarrow \mathbb{N}$ und je einem $GL_n(\mathbb{k})$ -Vektorbündel $p: p^{-1}(r^{-1}(n)) \rightarrow r^{-1}(n)$. Wir nennen r den *lokalen Rang* von V . Ein \mathbb{k} -Vektorbündelisomorphismus $F: V \rightarrow W$ von \mathbb{k} -Vektorbündeln $p: V \rightarrow X$, $q: W \rightarrow X$ besteht aus je einer $GL_n(\mathbb{k})$ -Vektorbündelabbildung $F_n: p^{-1}(r^{-1}(n)) \rightarrow q^{-1}(r^{-1}(n))$.

Ein *virtuelles* \mathbb{k} -Vektorbündel auf X ist ein Paar $V \oplus W$ von \mathbb{k} -Vektorbündeln $p: V \rightarrow X$ und $q: W \rightarrow X$. Zwei *virtuelle* \mathbb{k} -Vektorbündel $V \oplus W$ und $T \oplus U$ über X heißen *äquivalent*, kurz $V \oplus W \sim T \oplus U$, wenn es virtuelle \mathbb{k} -Vektorbündel $R, S \rightarrow X$ gibt, so dass $V \oplus R \cong T \oplus S$ und $W \oplus R \cong U \oplus S$.

Die Gruppe der virtuellen \mathbb{k} -Vektorbündel auf X wird mit $K_{\mathbb{k}}^0(X)$ bezeichnet. Im Falle $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ schreibt man auch kurz $K^0(X)$, und im Fall $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ schreibt man $KO^0(X)$. Für punktierte Räume X bezeichne $\iota: \text{pt} \rightarrow X$ die Inklusion des Basispunktes, dann definieren wir $\tilde{K}_{\mathbb{k}}^0(X) = \ker(\iota^*: K_{\mathbb{k}}^0(X) \rightarrow K_{\mathbb{k}}^0(\text{pt}))$.

Sei schließlich $f: Y \rightarrow X$ stetig. Das Zurückziehen von Vektorbündeln induziert

$$f^*: K_{\mathbb{k}}^0(X) \longrightarrow K_{\mathbb{k}}^0(Y), \quad \text{und} \quad f^*: \tilde{K}_{\mathbb{k}}^0(X) \longrightarrow \tilde{K}_{\mathbb{k}}^0(Y)$$

falls f punktiert ist.

6.42. BEISPIEL. Nach dem Satz 3.48 vom Igel ist das Tangentialbündel TS^{2n} nicht trivial. Betrachten wir die übliche Einbettung $S^{2n} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$, dann ist das Normalenbündel νS^{2n} trivial, denn

für jeden Punkt $p \in S^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ bildet der Ortsvektor p zugleich eine Basis des eindimensionalen Normalenraums $\nu_p S^{2n}$, siehe Abschnitt 3.i. Indem wir $T_p S^{2n}$ und $\nu_p S^{2n}$ als Unterräume von \mathbb{R}^{2n+1} auffassen, erhalten wir \mathbb{R} -Vektorbündelisomorphismen

$$T_p S^{2n} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} T_p S^{2n} \oplus \nu_p S^{2n} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{2n+1} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{2n} \oplus \mathbb{R}.$$

Somit ist das Tangentialbündel äquivalent (aber nicht isomorph!) zu einem trivialen Vektorbündel. Man sagt daher, dass TS^{2n} *stabil trivial* ist. Außerdem sehen wir, dass die Kürzungsregel für die Whitney-Summe nicht gilt.

Der Übergang von \mathbb{k} -Vektorbündeln zu virtuellen \mathbb{k} -Vektorbündeln in Definition 6.41 entspricht dem Übergang von \mathbb{N} zu \mathbb{Z} . Da die Halbgruppe der \mathbb{k} -Vektorbündel jedoch keine Kürzungseigenschaft besitzt, mussten wir etwas sorgfältiger vorgehen.

6.43. BEMERKUNG. Wir sammeln ein paar nützliche Eigenschaften (ohne Beweise).

- (1) Jedes \mathbb{k} -Vektorbündel V über einem parakompakten Raum X lässt sich mit einem faserweisen Skalarprodukt ausstatten, das in den Trivialisierungen stetig vom Basispunkt abhängt. Daher dürfen wir annehmen, dass $p: p^{-1}(r^{-1}(n)) \rightarrow r^{-1}(n)$ in diesem Fall ein $U(n, \mathbb{k})$ -Vektorbündel ist. Auf der anderen Seite kann man auch zeigen, dass $U(n, \mathbb{k})$ ein Deformationsretrakt von $GL_n(\mathbb{k})$ und somit $BU(n, \mathbb{k})$ ein Deformationsretrakt von $BGL_n(\mathbb{k})$ ist.
- (2) Zu jedem \mathbb{k} -Vektorbündel W über einem kompakten Raum X existiert ein sogenanntes *komplementäres Vektorbündel* U , so dass $W \oplus U \cong \mathbb{k}^N$ für ein hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$. Insbesondere lässt sich jedes virtuelle \mathbb{k} -Vektorbündel $V \ominus W$ über X durch das äquivalente virtuelle \mathbb{k} -Vektorbündel $(V \oplus U) \ominus \mathbb{k}^N$ ersetzen. Für nicht kompakte Räume ist diese Aussage im Allgemeinen nicht richtig.
- (3) Whitney-Summe und Whitney-Produkt erfüllen die üblichen Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze jeweils bis auf eindeutige Isomorphismen. Dadurch wird $K_{\mathbb{k}}^0(X)$ für alle X zu einem kommutativen Ring mit Einselement $\underline{\mathbb{k}}$, falls $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} ; für $\mathbb{k} = \mathbb{H}$ erhalten wir nur eine abelsche Gruppe.
- (4) Alle obigen Konstruktionen sind mit Zurückziehen verträglich. Wir erhalten also einen kontravarianten Funktor $K_{\mathbb{k}}^0$ von der Kategorie \mathcal{Top} oder $kw\mathcal{H}$ in die Kategorie der kommutativen Ringe ($\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) beziehungsweise der abelschen Gruppen ($\mathbb{k} = \mathbb{H}$).
- (5) Ein \mathbb{k} -Vektorbündel über einem Punkt ist ein \mathbb{k} -Vektorbündel und wird klassifiziert durch seine Dimension $n \in \mathbb{N}$. Ein virtuelles \mathbb{k} -Vektorbündel über einem Punkt wird somit durch seine virtuelle Dimension $n \in \mathbb{Z}$ klassifiziert.

Zu einer Kohomologietheorie fehlt uns unter anderem die lange exakte Sequenz. Daher wollen wir ein ω -Spektrum $\mathbb{K}\mathbb{k}$ konstruieren, so dass $K_{\mathbb{k}}^0(X) = [X_+, K\mathbb{k}_0]$ zumindest für kompakte X gilt. Dazu betrachten wir die Folgen von Gruppen $\text{pt} = U(0, \mathbb{k}) \hookrightarrow U(1, \mathbb{k}) \hookrightarrow \dots$, wobei die Inklusionsabbildung einer Matrix $A \in U(n, \mathbb{k})$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in U(n+1, \mathbb{k}) \tag{6.3}$$

zuordnet. Wir definieren topologische Gruppen

$$U(\mathbb{k}) = \text{colim}_{n \rightarrow \infty} U(n, \mathbb{k}) = \begin{cases} O & \text{falls } \mathbb{k} = \mathbb{R}, \\ U & \text{falls } \mathbb{k} = \mathbb{C}, \text{ und} \\ Sp & \text{falls } \mathbb{k} = \mathbb{H}. \end{cases}$$

Wir erhalten Folgen von Inklusionen $EU(n, \mathbb{k}) \hookrightarrow EU(n+1, \mathbb{k})$ und $BU(n, \mathbb{k}) \hookrightarrow BU(n+1, \mathbb{k})$. Die Kolimiten in den obigen Konstruktionen vertauschen, und so erhalten wir

$$EU(\mathbb{k}) = \operatorname{colim}_{n \rightarrow \infty} EU(n, \mathbb{k}) \quad \text{und} \quad BU(\mathbb{k}) = \operatorname{colim}_{n \rightarrow \infty} BU(n, \mathbb{k}) \cong EU/U .$$

Die tautologischen Vektorbündel $VU(n, \mathbb{k})$ haben allerdings alle unterschiedlichen Rang, es gibt also kein tautologische Bündel über $BU(\mathbb{k})$.

6.44. SATZ. *Es sei X ein kompakter CW-Komplex, dann gilt*

$$K_{\mathbb{k}}^0(X) = [X_+, \mathbb{Z} \times BU(\mathbb{k})] . \quad (1)$$

Sei X ein kompakter punktierter CW-Komplex, dann gilt

$$\tilde{K}_{\mathbb{k}}^0(X) = [X, \mathbb{Z} \times BU(\mathbb{k})] . \quad (2)$$

Für den Satz ist es nicht nötig, dass X ein CW-Komplex ist; es macht den Beweis aber einfacher. Falls X nicht kompakt ist, erhalten wir immer noch eine Abbildung $K_{\mathbb{k}}^0(X) \rightarrow [X_+, \mathbb{Z} \times BU(\mathbb{k})]$, allerdings ist diese nicht immer surjektiv. Als Beispiel würde die Abbildung $\operatorname{id}_{BU(\mathbb{k})}$ das „tautologische Bündel“ klassifizieren, aber ein solches gibt es auf $BU(\mathbb{k})$ nicht. Wir wählen Basispunkte in allen $BU(\mathbb{k})$ und betrachten den Raum

$$X = \bigvee_{k \in \mathbb{N}} BU(k, \mathbb{k}) .$$

Dann gibt es kein virtuelles Vektorbündel $V \oplus W$ auf X , so dass $(V \oplus W)|_{BU(k, \mathbb{k})} \sim (VU(k, \mathbb{k}) \oplus \underline{\mathbb{k}}^k)$, insbesondere erfüllt der oben definierte Funktor nicht das Summenaxiom aus Definition 6.1 (3).

BEWEIS. Es sei $V \oplus W$ ein virtuelles \mathbb{k} -Vektorbündel über X , dann existiert $U \rightarrow X$, so dass $U \oplus W \cong \underline{\mathbb{k}}^n$ auf ganz X . Wir dürfen $U \oplus V$ mit einem Skalarprodukt ausstatten. Dann sei $r: X \rightarrow \mathbb{Z}$ der lokale Rang des Bündels $U \oplus V$, und es sei $\vartheta: r^{-1}(m) \rightarrow BU(m, \mathbb{k})$ die klassifizierende Abbildung des Bündels $(U \oplus V)|_{r^{-1}(m)}$. Wir definieren $\Theta: X \rightarrow \mathbb{Z} \times BU(\mathbb{k})$ durch

$$\Theta(x) = (m - n, \vartheta(x)) \in \{m - n\} \times BU(m, \mathbb{k}) \subset \mathbb{Z} \times BU(\mathbb{k}) \quad \text{für alle } m \text{ und alle } x \in r^{-1}(m) .$$

Da isomorphe Vektorbündel nach Satz 6.39 homotope klassifizierende Abbildungen haben, können wir Wohldefiniertheit zu zeigen, indem wir $V \oplus W$ um ein \mathbb{k} -Vektorbündel R zu $(V \oplus R) \oplus (W \oplus R)$ „erweitern“ und die neue klassifizierende Abbildung mit Θ vergleichen. Dazu wählen wir wie oben ein \mathbb{k} -Vektorbündel S , so dass $W \oplus R \oplus S \cong \underline{\mathbb{k}}^\ell$. Das heißt, wir haben das obige Bündel U durch $U' = R \oplus S$ ersetzt. Wir erhalten einen \mathbb{k} -Vektorbündel-Isomorphismus

$$V \oplus U \oplus \underline{\mathbb{k}}^\ell \cong V \oplus U \oplus W \oplus U' \cong V \oplus U' \oplus \underline{\mathbb{k}}^n .$$

Nach Konstruktion von $U(m, \mathbb{k}) \subset U(m+\ell, \mathbb{k})$ und $BU(m, \mathbb{k}) \subset BU(m+\ell, \mathbb{k})$ wird das Bündel $V \oplus U \oplus \underline{\mathbb{k}}^\ell$ nach wie vor durch

$$\Theta: X \longrightarrow \{m - n\} \times BU(m, \mathbb{k}) \subset \{(m + \ell) - (n + \ell)\} \times BU(m + \ell, \mathbb{k}) \subset \mathbb{Z} \times BU(\mathbb{k})$$

klassifiziert. Diese Abbildung ist homotop zur klassifizierenden Abbildung für $V \oplus U' \oplus \underline{\mathbb{k}}^n$, und es folgt Wohldefiniertheit.

Zur Surjektivität betrachten wir $\Theta: X \rightarrow \mathbb{Z} \times BU(\mathbb{k})$. Da X kompakt ist, faktorisiert Θ über $\mathbb{Z} \times BU(n, \mathbb{k})$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben $\Theta = (r, \vartheta)$, und ohne Einschränkung gelte $n \geq r$ auf ganz X . Dann klassifiziert Θ das \mathbb{k} -Vektorbündel

$$(\vartheta^* VU(n, \mathbb{k})) \oplus \underline{\mathbb{k}}^{n-r} .$$

Zur Injektivität sei $H: X \times I \rightarrow \mathbb{Z} \times BU(\mathbb{k})$ eine Homotopie zwischen $\Theta = H_0$ und $G = H_1$. Diesmal faktorisiere $H = (\bar{r}, h)$ über $\mathbb{Z} \times BU(N, \mathbb{k})$, und $G = (g, s)$ faktorisiere über $\mathbb{Z} \times BU(m, \mathbb{k})$.

Da $r: X \times I \rightarrow \mathbb{Z}$ unabhängig von $t \in I$ ist, folgt $r = s: X \rightarrow \mathbb{Z}$. Wegen Satz 6.39 erhalten wir eine Äquivalenz virtueller \mathbb{k} -Vektorbündel

$$(\vartheta^*VU(n, \mathbb{k})) \ominus \underline{\mathbb{k}}^{n-r} \sim (h_0^*VU(N, \mathbb{k})) \ominus \underline{\mathbb{k}}^{N-r} \cong (h_1^*VU(N, \mathbb{k})) \ominus \underline{\mathbb{k}}^{N-r} \sim (g^*VU(m, \mathbb{k})) \ominus \underline{\mathbb{k}}^{m-r}.$$

Also gilt (1). Behauptung (2) folgt mit Bemerkung 6.43 (5), siehe auch Bemerkung 6.2 (3). \square

Es bleibt zu zeigen, dass $BU(\mathbb{k})$ zu einem ω -Spektrum gehört. Dazu bezeichne $\tau_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}P^1 \cong S^2$ das tautologische Bündel. Man kann zeigen (Übung), dass

$$\tau_{\mathbb{C}} \oplus \tau_{\mathbb{C}} \cong \underline{\mathbb{C}} \oplus \tau_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \tau_{\mathbb{C}},$$

oder kurz $(\tau_{\mathbb{C}} \ominus \underline{\mathbb{C}})^2 = 0 \in K^0(S^2)$. Da $\tau_{\mathbb{C}} \ominus \underline{\mathbb{C}}|_{\text{pt}} = 0$, gilt sogar $\tau_{\mathbb{C}} \ominus \underline{\mathbb{C}} \in \tilde{K}^0(S^2)$.

6.45. SATZ (Bott-Periodizität). *Für jeden gut punktierten kompakten topologischen Raum existiert ein Isomorphismus*

$$\sigma^2: \tilde{K}^0(X) \longrightarrow \tilde{K}^0(S^2X),$$

dabei wird $\sigma^2(V \ominus W) \in \tilde{K}^0(S^2X)$ dargestellt durch das virtuelle \mathbb{C} -Vektorbündel

$$(\tau_{\mathbb{C}} \ominus \underline{\mathbb{C}}) \boxtimes_{\mathbb{C}} (V \ominus W) = p_{S^2}^*(\tau_{\mathbb{C}} \ominus \underline{\mathbb{C}}) \otimes_{\mathbb{C}} p_X^*(V \ominus W) \in \tilde{K}^0(S^2X).$$

Das „äußere Tensorprodukt“ \boxtimes entspricht dabei dem Smash-Produkt aus Definition 6.21, siehe Bemerkung 6.49. Für den Beweis, dass σ^2 einen Isomorphismus $\tilde{K}^0(X) \rightarrow \tilde{K}^0(S^2X)$ induziert, verweisen wir auf [At] und [H2, Theorem 2.2]. Als Konsequenz können wir jetzt das ω -Spektrum für K -Theorie angeben.

6.46. SATZ UND DEFINITION. *Komplexe K -Theorie ist der allgemeine Kohomologiefunktor zum ω -Spektrum \mathbb{K} mit*

$$K^n = \begin{cases} \mathbb{Z} \times BU & \text{falls } n \text{ gerade ist, und} \\ U & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Mit Satz 6.28 sehen wir, dass K -Theorie ein allgemeiner Kohomologiefunktor ist, der wegen Satz 6.44 für kompakte Räume mit der Konstruktion in Definition 6.41 übereinstimmt. Insbesondere erhalten wir eine lange exakte K -Theorie-Sequenz für Kofaserungen und eine Mayer-Vietoris-Sequenz. Da sich lange exakte Sequenzen in komplexer K -Theorie wegen Bott-Periodizität alle sechs Einträge wiederholen, heißen sie auch *Sechs-Term-Sequenzen*. Nach Satz 5.38 existiert auch ein allgemeiner Homologiefunktor zum obigen Spektrum, die sogenannte *K -Homologie*. Da ihre geometrische Interpretation etwas schwieriger ist, geben wir sie hier nicht an.

Auf der anderen Seite erfüllt K^\bullet im Gegensatz zu $K_{\mathbb{C}}^0$ das Summenaxiom. Um beide Funktoren unterscheiden zu können, schreiben wir daher K für den Kohomologiefunktor. Analog schreiben wir KO für reelle K -Theorie.

BEWEIS. Wir müssen zwei Stabilisierungsabbildungen so konstruieren, dass \mathbb{K} ein ω -Spektrum wird, und wir Bott-Periodizität erhalten. Als erstes betrachten wir das Faserbündel $EU \rightarrow BU$ mit Faser U . Wir erhalten eine natürliche Abbildung von U in die Homotopiefaser. Ein Vergleich der Sequenzen 3.25 und 4.72 (3) für $Z = S^k$ zeigt, dass diese Abbildung eine schwache Äquivalenz ist. Da EU zusammenziehbar ist, ist die Homotopiefaser schwach äquivalent zu ΩBU . Außerdem sieht der Schleifenfunktor nur die Zusammenhangskomponente des Basispunktes, so dass $\Omega BU \cong \Omega(\mathbb{Z} \times BU)$. Nach den Sätzen 4.46 und 4.55 von Whitehead und Milnor sind also U und $\Omega(\mathbb{Z} \times BU)$ homotopieäquivalent, und wir erhalten eine Abbildung $U \rightarrow \Omega(\mathbb{Z} \times BU)$. Die Adjunktion zwischen Einhängungs- und Schleifenfunktor gemäß dem Exponentialgesetz liefert die erste Stabilisierungsabbildung $s: SU \rightarrow \mathbb{Z} \times BU$.

Wir konstruieren als nächstes eine Abbildung $S^2(\mathbb{Z} \times BU) \rightarrow \mathbb{Z} \times BU$, so dass die induzierte Abbildung $\pi_k(\mathbb{Z} \times BU) \rightarrow \pi_{k+2}(BU)$ für alle $k \geq 0$ ein Isomorphismus ist. Dazu schreiben wir $\mathbb{Z} \times BU$ als

$$\mathbb{Z} \times BU = \varinjlim X_n \quad \text{mit} \quad X_n = \{-n, \dots, n\} \times Y_n \quad \text{und} \quad Y_n = (U(n)^{*n})/U(n)$$

und nutzen aus, dass die rechte Seite kompakt ist und die natürlichen Inklusionen $X_n \rightarrow X_{n+1}$ Kofaserungen sind. Auf X_n definieren wir das virtuelle \mathbb{k} -Vektorbündel V_n durch

$$V_n|_{\{k\} \times Y_n} = VU(n)|_{Y_n} \ominus \underline{\mathbb{C}}^{n-k}.$$

Dann sei $\Theta_n: S^2 X_n \rightarrow BU$ die klassifizierende Abbildung des virtuellen Vektorbündels

$$(\tau_{\mathbb{C}} - \underline{\mathbb{C}}) \boxtimes V_n \longrightarrow X_n,$$

für ein hinreichend großes N gilt also $(\tau_{\mathbb{C}} - \underline{\mathbb{C}}) \boxtimes V_n \cong \Theta_n^* V_N$. Da $V_n \cong V_{n+1}|_{X_n}$, ist Θ_n homotop zu $\Theta_{n+1}|_{X_n}$. Da $X_n \subset X_{n+1}$ eine Kofaserung ist, können wir die Θ_n induktiv so durch homotope Abbildungen ersetzen, dass schließlich $\Theta_n = \Theta_{n+1}|_{X_n}$ für alle n gilt. Dadurch erhalten wir eine Abbildung

$$\Theta: S^2 BU \cong \varinjlim X_n \longrightarrow BU.$$

Sei jetzt $[\vartheta] \in \tilde{K}^0(S^k) = \pi_k(\mathbb{Z} \times BU)$, dann repräsentiert ϑ ein virtuelles \mathbb{C} -Vektorbündel $V \rightarrow S^k$. Da S^k kompakt ist, faktorisiert ϑ über ein X_n , und es folgt $V \cong \vartheta^* V_n$ und

$$(\tau_{\mathbb{C}} - \underline{\mathbb{C}}) \boxtimes V \cong (S^2 \vartheta)^* ((\tau_{\mathbb{C}} - \underline{\mathbb{C}}) \boxtimes V_n) \cong (S^2 \vartheta \circ \Theta_n)^* V_N.$$

Bott-Periodizität 6.45 und Bemerkung 3.10 liefern somit einen Isomorphismus

$$\pi_k(\mathbb{Z} \times BU) \xrightarrow{\Theta_* \circ S^2} \pi_{k+2}(BU) \xrightarrow{\cong} \pi_k(\Omega^2 BU).$$

Also induziert $\Theta: S^2(\mathbb{Z} \times BU) \rightarrow (\mathbb{Z} \times BU)$ eine schwache Äquivalenz $\mathbb{Z} \times BU \rightarrow \Omega^2(\mathbb{Z} \times BU)$. Verkettung mit der Homotopieäquivalenz $\Omega(\mathbb{Z} \times BU) \rightarrow U$ liefert eine schwache Äquivalenz $\mathbb{Z} \times BU \rightarrow \Omega U$. Via Adjunktions erhalten wir die zweite Stabilisierungsabbildung $s: S(\mathbb{Z} \times BU) \rightarrow U$. Damit haben wir das gesuchte ω -Spektrum konstruiert. \square

6.47. BEMERKUNG. Da \mathbb{K} ein ω -Spektrum ist, folgt

$$\pi_k(\mathbb{Z} \times BU) = \pi_{k+1}(U) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k \text{ gerade ist, und} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade ist,} \end{cases}$$

da $\pi_0(U) = 0$ und $\pi_1(U) = \mathbb{Z}$ nach Übung 6.74.

6.48. BEMERKUNG. Wir geben das reelle Analogon ohne weitere Erläuterungen an.

- (1) Es sei $\tau_{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{H}P^1 \cong S^4$ das tautologische Bündel. Wie bei der komplexen Bott-Periodizität 6.45 erhalten wir für kompakte CW-Komplexe X einen Isomorphismus

$$\sigma^4: K_{\mathbb{R}}^0(X) \xrightarrow{\cong} K_{\mathbb{H}}^0(S^4 X) \quad \text{mit} \quad (V \oplus W) \mapsto (\tau_{\mathbb{H}} \ominus \underline{\mathbb{H}}) \boxtimes_{\mathbb{R}} (V \oplus W).$$

Da wir mit einem virtuellen \mathbb{H} -Bündel tensorieren, landen wir in quaternionischer K -Theorie.

- (2) Das Tensorieren zweier \mathbb{H} -Vektorbündel liefert ein reelles Vektorbündel, da \mathbb{H} nicht kommutativ ist. Wir erhalten einen weiteren Isomorphismus

$$\sigma^4: K_{\mathbb{H}}^0(X) \xrightarrow{\cong} K_{\mathbb{R}}^0(S^4 X) \quad \text{mit} \quad (V \oplus W) \mapsto (\tau_{\mathbb{H}} \ominus \underline{\mathbb{H}}) \boxtimes_{\mathbb{H}} (V \oplus W).$$

Zusammen mit (1) ergibt sich hieraus reelle Bott-Periodizität mit Periode 8, nämlich

$$\sigma^8: K_{\mathbb{R}}^0(X) \cong K_{\mathbb{R}}^0(S^8 X).$$

(3) Ähnlich wie in Satz 6.46 können wir zu einem ω -Spektrum $\mathbb{K}\mathbb{O}$ „auffüllen“ mit

$$\begin{aligned} KO_8 &= \mathbb{Z} \times BO, & KO_{8k+1} &= U/O, & KO_{8k+2} &= Sp/U, & KO_{8k+3} &= Sp, \\ KO_{8k+4} &= \mathbb{Z} \times BSp, & KO_{8k+5} &= U/Sp, & KO_{8k+6} &= O/U, & KO_{8k+7} &= O, \end{aligned}$$

Zumindest die Stabilisierungsabbildungen $S^1 \wedge O \rightarrow \mathbb{Z} \times BO$ und $S^1 \wedge Sp \rightarrow \mathbb{Z} \times BSp$ kommen wie oben zustande. Wir bilden U/O als Kolimes von $U(n)/O(n)$, indem wir reelle als komplexe Matrizen auffassen; entsprechend konstruieren wir Sp/U . Umgekehrt bilden wir O/U als Kolimes von $O(2n)/U(n)$, indem wir komplexe Matrizen mit reellen Matrizen identifizieren, die eine zusätzliche komplexe Struktur auf \mathbb{R}^{2n} festhalten; analog bilden wir U/Sp . Als Koeffizientengruppen erhalten wir

$$\pi_{8k+n}(\mathbb{Z} \times BO) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } n = 0, 4, \\ \mathbb{Z}/2 & \text{für } n = 1, 2, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(4) Wegen (2) und (3) gibt es auch einen mit quaternionischer K -Theorie verwandten allgemeinen Kohomologiefunktor: für kompakte CW-Komplexe gilt

$$\tilde{K}_{\mathbb{H}}^k(X) = \tilde{K}_{\mathbb{R}}^k(S^4 X) = \tilde{K}_{\mathbb{R}}^{k \pm 4}(X).$$

6.49. BEMERKUNG. Zur Konstruktion der Bott-Periodizität hatten wir das äußere Tensorprodukt benutzt. Seien \mathbb{k} -Vektorbündel $V \rightarrow X$ und $W \rightarrow Y$ mit $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} gegeben, dann lautet die allgemeine Definition

$$V \boxtimes W = (p_X^* V) \otimes_{\mathbb{k}} (p_Y^* W) \longrightarrow X \times Y,$$

dabei ist „ \otimes “ wieder das Whitney-Produkt, und $p_X: X \times Y \rightarrow X$ und $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$ sind die Projektionen im Produkt. Da das Whitney-Produkt bis auf eindeutige Isomorphismen assoziativ ist, gilt das auch fürs äußere Tensorprodukt.

- (1) Seien $X = (X, x_0)$ und $Y = (Y, y_0)$ punktiert, und seien $V|_{x_0}$ und $W|_{y_0}$ trivial, das heißt, virtuelle \mathbb{k} -Vektorräume von virtueller Dimension 0, dann ist auch $V \boxtimes W|_{X \wedge Y}$ trivial. Insbesondere repräsentiert $V \boxtimes W$ ein Element in $\tilde{K}_{\mathbb{k}}^0(X \wedge Y)$. Wir erhalten ein Analogon zum Smash-Produkt aus Definition 6.21. Es ist ebenfalls assoziativ und kommutativ bis auf eindeutige Isomorphismen, insbesondere also assoziativ und kommutativ auf $\tilde{K}_{\mathbb{k}}^0$.
- (2) Das Einselement $1 \in \tilde{K}_{\mathbb{k}}^0(S^0)$ wird repräsentiert durch ein \mathbb{k} -Vektorbündel vom Rang 0 auf dem Basispunkt und Rang 1 auf dem anderen Punkt der S^0 .
- (3) Die Stabilisierungsisomorphismen σ^2 in Satz 6.45 und σ^8 in Bemerkung 6.48 (2) wurden mit Hilfe des äußeren Produktes definiert. Es sei $n_0 = 2$ falls $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ und $n_0 = 8$ falls $\mathbb{k} = \mathbb{R}$. In Analogie zu Proposition 6.21 (3) gilt daher

$$(\sigma^{n_0} V) \boxtimes_{\mathbb{C}} W = \sigma^{n_0}(V \boxtimes_{\mathbb{C}} W) = V \boxtimes_{\mathbb{C}} (\sigma^{n_0} W) \in \tilde{K}^0(S^{n_0}(V \wedge W)).$$

- (4) Seien jetzt X, Y kompakte CW-Komplexe, und seien $V \in \tilde{K}_{\mathbb{k}}^k(X)$ und $W \in \tilde{K}_{\mathbb{k}}^{\ell}(Y)$ für $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} . Es gibt natürliche Isomorphismen

$$\sigma^{n_0-k}: \tilde{K}_{\mathbb{k}}^k(X) \cong [X, \Omega^{n_0-k}(\mathbb{Z} \times BU(\mathbb{k}))] \xrightarrow{\cong} [S^{n_0-k} X, \mathbb{Z} \times BU(\mathbb{k})] \cong \tilde{K}_{\mathbb{k}}^0(S^{n_0-k} X),$$

also identifizieren wir V mit $\sigma^{n_0-k} V \in \tilde{K}_{\mathbb{k}}^0(S^{n_0-k} X)$ und definieren

$$V \boxtimes_{\mathbb{k}} W = \sigma^{k+\ell}((\sigma^{n_0-k} V) \boxtimes_{\mathbb{k}} (\sigma^{n_0-\ell} W)) \in K_{\mathbb{k}}^{k+\ell}(X \wedge Y).$$

Die Klasse $(\sigma^{n_0-k} V) \boxtimes_{\mathbb{k}} (\sigma^{n_0-\ell} W)$ lebt in $\tilde{K}_{\mathbb{k}}^0(S^{k+\ell}(X \wedge Y))$. Beim Vertauschen von V und W haben wir im Zwischenschritt zusätzlich eine Transpositionsabbildung $S^{k+\ell} \rightarrow$

$S^{\ell+k}$ anzuwenden. Wie in Proposition 6.21 (3) gilt daher

$$t^*(W \boxtimes_{\mathbb{k}} V) = (-1)^{k\ell} V \boxtimes_{\mathbb{k}} W .$$

- (5) Wir haben festgestellt, dass es kein Produkt $\tilde{K}_{\mathbb{H}}^0(X) \times \tilde{K}_{\mathbb{H}}^0(Y) \rightarrow \tilde{K}_{\mathbb{H}}^0(X \wedge Y)$ gibt. Das erklärt sich, indem wir $\tilde{K}_{\mathbb{H}}^0$ wie in Bemerkung 6.48 (4) mit $\tilde{K}_{\mathbb{R}}^4$ identifizieren.

Wir haben jetzt also zwei allgemeine Kohomologiefunktoren mit Produkten definiert. Zur geometrischen Interpretation der Verbindungshomomorphismen in den langen exakten Sequenzen und zu den Produkten zwischen höheren K -Gruppen haben wir leider noch nichts sagen können.

6.h. Bordismus

Wir kennen bereits den gerahmten (Ko-) Bordismus. Wir erklären jetzt, wie man andere (Ko-) Bordismusfunktoren als allgemeine (Ko-) Homologiefunktoren darstellen kann, und führen die zugehörigen Thom-Spektren ein.

Wir erinnern uns, dass jedes reelle Vektorbündel $V \rightarrow X$ über einem CW-Komplex ein bis auf Homotopie eindeutiges faserweises Skalarprodukt, und daher eine $O(n)$ -Struktur trägt. Wir erinnern uns auch an den klassifizierenden Raum $BO(n)$ und das tautologische G -Vektorbündel $VO(n) \rightarrow BO(n)$ aus Abschnitt 6.f zu ρ . Die klassifizierende Abbildung $\gamma: X \rightarrow BO(n)$ ist bis auf Homotopie unabhängig von der Wahl des Skalarproduktes.

6.50. DEFINITION. Es sei $V \rightarrow X$ ein $O(n)$ -Vektorbündel, dann definieren wir das *Ball-* und das *Sphärenbündel* sowie den *Thom-Raum* von V als

$$DV = \{ v \in V \mid \|v\| \leq 1 \} , \quad SV = \{ v \in V \mid \|v\| = 1 \} \quad \text{und} \quad MV = DV/SV . \quad (1)$$

Als nächstes benötigen wir einen Satz aus der Differentialtopologie. Wir erinnern uns an den Begriff einer eigentlichen Abbildung aus Übung 4.77. Eine Untermannigfaltigkeit $M \subset N$ heißt *eigentlich*, wenn die Inklusion $M \hookrightarrow N$ eigentlich ist. Insbesondere sind geschlossene Untermannigfaltigkeiten immer eigentlich.

6.51. SATZ (von der Röhrenumgebung). *Es sei N eine glatte Mannigfaltigkeit und $M \subset N$ eine eigentliche Untermannigfaltigkeit. Dann existiert ein relatives Normalenbündel $\nu_N M \rightarrow M$ mit einem faserweisen Skalarprodukt und eine Einbettung $a: D\nu_N M \rightarrow N$, deren Differential $da|_M$ gerade der natürliche Isomorphismus $\nu_N M \oplus TM \cong f^*TN$ ist.*

Wir wollen jetzt von Untermannigfaltigkeiten zu abstrakten Mannigfaltigkeiten übergehen. Im Folgenden betrachten wir daher $N = \mathbb{R}^n$. Wie üblich nennen wir eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand *geschlossen*. Wir zitieren einen weiteren Satz auf der Differentialtopologie.

6.52. SATZ (Einbettungs-, Whitney). *Jede geschlossene k -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit lässt sich für alle $n \geq 2k$ in den \mathbb{R}^n einbetten.*

Wir können n beliebig vergrößern, indem wir eine lineare Einbettung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nachschaleten. Je zwei Einbettungen $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $g: N \rightarrow \mathbb{R}^m$ sind in einem größeren \mathbb{R}^N homotop, dazu definiere etwa $h: I \times M \rightarrow \mathbb{R}^{n+m+1}$ durch

$$h(s, p) = (s, (1-s) \cdot f(p), s \cdot g(p)) .$$

Es bezeichne $\nu f \rightarrow M$ das Normalenbündel von $im f \subset \mathbb{R}^n$. Sei g die Verkettung

$$g: M \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m , \quad (6.4)$$

dann folgt $\nu g = \mathbb{R}^{m-n} \oplus \nu f$. Wir betrachten die natürlichen Inklusionen $\iota_n: O(n) \rightarrow O(n+1)$ aus (6.3). Sei $\vartheta: M \rightarrow BO(n-k)$ eine klassifizierende Abbildung für $\nu_{\mathbb{R}^n} M$, dann ist

$$B\iota_{m-k-1} \circ \cdots \circ B\iota_{n-k} \circ \vartheta: M \longrightarrow BO(m-k)$$

eine klassifizierende Abbildung für $\nu_{\mathbb{R}^m}M$. Außerdem sind Normalenbündel homotoper Einbettung f und g isomorph, und der Isomorphismus ist bis auf Homotopie eindeutig durch die Homotopie zwischen f und g bestimmt. Die folgende Definition ist daher sinnvoll.

6.53. DEFINITION. Es sei M eine k -dimensionale geschlossene glatte Mannigfaltigkeit, und es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Einbettung. Das *stabile Normalenbündel* $\nu^s M \in K^0O(M)$ ist definiert als

$$\nu^s M = [\nu f \ominus \underline{\mathbb{R}}^n] \in KO^0(M).$$

Fortsetzung folgt ...

6.i. Übungen zu Kapitel 6

Übungen zu Abschnitt 6.a.

6.54. ÜBUNG. Beweisen Sie die Exaktheit der Mayer-Vietoris-Sequenz 6.3 für Kohomologie-Funktoren.

Übungen zu Abschnitt 6.b.

6.55. ÜBUNG. Es seien inverse Systeme (A_i, f_{ij}) , (A'_i, f'_{ij}) und (A''_i, f''_{ij}) wie in Bemerkung 6.12 gegeben.

(1) Zeigen Sie, dass alle f'_{ij} surjektiv sind. Folgern Sie daraus

$$\lim_{\leftarrow}^1 A'_i = 0.$$

(2) Zeigen Sie, dass für jedes i ein $j \geq i$ existiert mit $f''_{ik} = 0$ für alle $k \geq j$, falls (A_i, f_{ij}) die Mittag-Leffler-Bedingung erfüllt. Folgern Sie, dass dann

$$\lim_{\leftarrow}^1 A''_i = 0.$$

Übungen zu Abschnitt 6.c.

6.56. ÜBUNG. Es seien $X = \mathbb{R}P^2 \times S^3$ und $Y = S^2 \times \mathbb{R}P^3$.

- (1) Zeigen Sie, dass X und Y isomorphe Homotopiegruppen haben.
- (2) Bestimmen Sie die ganzzahligen Homologiegruppen von X und Y .
- (3) Bestimmen Sie die ganzzahligen Kohomologiegruppen von X und Y .

6.57. ÜBUNG. Konstruieren Sie die Stabilisierungs-Isomorphismen für zelluläre Homologie und Kohomologie.

(1) Geben Sie zuerst mit Hilfe von Proposition 5.79 Isomorphismen

$$\phi_n: \tilde{C}_n^{\text{CW}}(X; A) \longrightarrow \tilde{C}_{n+1}^{\text{CW}}(S^1 \wedge X; A)$$

mit $\phi_{n-1} \circ d_n^{\text{CW}} = -d_{n+1}^{\text{CW}} \circ \phi_n$ an.

(2) Zeigen Sie, dass diese mit den Isomorphismen aus Satz 5.10 beziehungsweise Folgerung 6.4 übereinstimmen. *Hinweis:* Betrachten Sie die Kofaserung $X \hookrightarrow CX = (I, 0) \wedge X$ und gehen Sie vor wie im Beweis von Satz 3.42 (4).

6.58. ÜBUNG. Bestimmen Sie für $1 \leq k \leq n$ die folgenden Kronecker-Produkte.

$$\tilde{H}_{\text{CW}}^k(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \times \tilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (\text{a})$$

$$\tilde{H}_{\text{CW}}^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \times \tilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (\text{b})$$

$$\tilde{H}_{\text{CW}}^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \times \tilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}/2, \quad (\text{c})$$

$$\tilde{H}_{\text{CW}}^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \times \tilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathbb{Z}/2. \quad (\text{d})$$

6.59. ÜBUNG. Betrachten Sie *einen* der Räume X_1, X_2 aus Aufgabe 2.88 mit der dort angegebenen CW-Struktur. Bestimmen Sie die zellulären Randoperatoren und berechnen Sie die unreduzierte zelluläre Homologie und Kohomologie dieses Raumes.

6.60. ÜBUNG. Es sei R ein Hauptidealring und A ein R -Modul. Dann existiert für jeden topologischen Raum X eine natürliche exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_k(X; R) \otimes_R A \longrightarrow \tilde{H}_k(X; A) \longrightarrow \text{Tor}_R(\tilde{H}_{k-1}(X; R), A) \longrightarrow 0$$

wie in Satz 5.72. Diese Sequenz spaltet (allerdings nicht natürlich).

Hinweis: Beweisen Sie diese Aussage zunächst für CW-Komplexe mit den Methoden aus dem Beweis von Satz 6.16. Beutzen Sie dann Natürlichkeit und die Invarianz der gewöhnlichen Homologie unter schwachen Äquivalenzen.

6.61. ÜBUNG. Es seien X, Y CW-Komplexe und R ein Hauptidealring. Formulieren und beweisen Sie eine Künneth-Formel für $\tilde{H}_{\text{CW}}^\bullet(X \wedge Y; R)$. Nehmen Sie dazu an, dass einer der beiden Faktoren *von endlichem Typ* ist, das heißt, in jeder Dimension nur endlich viele Zellen besitzt.

6.62. ÜBUNG. Es sei X ein zusammenhängender CW-Komplex mit $\tilde{H}^\bullet(X) = 0$.

- (1) Folgern Sie aus dem universellen Koeffiziententheorem 6.16, dass $\tilde{H}_\bullet(X) = 0$.
- (2) Sei X außerdem einfach zusammenhängend. Folgern Sie aus dem homologischen Satz 5.51 von Whitehead, dass X zusammenziehbar ist.

Übungen zu Abschnitt 6.d.

6.63. ÜBUNG. Beweisen Sie einige der fehlenden Aussagen in Proposition 6.21.

- (1) Zeigen Sie zunächst einige der Aussagen in (3) und (5) zum Smashprodukt.
- (2) Beweisen Sie dann die zweite Aussage in (4) auf Ketten- / Kokettenniveau.
- (3) Leiten Sie daraus alle anderen Aussagen über das Schrägprodukt ab.

6.64. ÜBUNG. Bestimmen Sie für alle $n \geq 1$ die Kohomologieringe (insbes. ihre multiplikative Struktur)

$$\tilde{H}_{\text{CW}}^\bullet(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad \tilde{H}_{\text{CW}}^\bullet(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2).$$

6.65. ÜBUNG. Es bezeichne $[CP^n] \in H_{2n}(CP^n; R)$ die von der $2n$ -Zelle erzeugte Homologiekategorie. Zeigen Sie, dass $(H_\bullet(CP^n; R), \smile)$ ein freier $(H^\bullet(CP^n; R), \smile)$ -Modul mit Erzeuger $[CP^n]$ ist.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst das Kronecker-Produkt $\langle [CP^n], \omega^n \rangle$.

Übungen zu Abschnitt 6.e.

6.66. ÜBUNG. Es bezeichne $H^\bullet(\cdot; \mathbb{Z})$ die unreduzierte Kohomologie zum Eilenberg-Mac Lane-Spektrum $\mathbb{H}\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass für jeden topologischen Raum X gilt

$$H^0(X; \mathbb{Z}) = [X, \mathbb{Z}] \quad \text{und} \quad H^1(X; \mathbb{Z}) = [X, S^1].$$

6.67. ÜBUNG. Zeigen Sie: die radiale Projektion vom „topologischen Huhn“ X aus Beispiel 4.52 auf S^1 ist nicht zusammenziehbar. Folgern Sie, dass $\tilde{H}^1(X) = [X, H\mathbb{Z}_1] \neq 0$, obwohl X schwach zusammenziehbar ist.

6.68. ÜBUNG. Sei \mathbb{E} ein ω -Spektrum und $B \subset A \subset X$ seien beliebige Räume. Beweisen Sie die Exaktheit einer der Sequenzen

$$\begin{aligned} \cdots \longleftarrow E_k(X, A) \longleftarrow E_k(X, B) \longleftarrow E_k(A, B) \xleftarrow{\partial} E_{k+1}(X, A) \longleftarrow \cdots, \\ \cdots \longrightarrow E^k(X, A) \longrightarrow E^k(X, B) \longrightarrow E^k(A, B) \xrightarrow{\delta} E^{k+1}(X, A) \longrightarrow \cdots. \end{aligned}$$

Orientieren Sie sich dazu an Übung 3.110.

Übungen zu Abschnitt 6.f.

6.69. ÜBUNG. Zeigen Sie: Die Konstruktionen vor Definition 6.38, die jeder Gruppe G einen schwach zusammenziehbaren Raum EG mit freier G -Wirkung und einen klassifizierenden Raum BG zuordnen, so dass $BG = EG/G$, sind Funktoren von der Kategorie der topologischen Gruppen in die Kategorie $kw\mathcal{H}$.

6.70. ÜBUNG. Es sei $H \subset G$ Untergruppe einer topologischen Gruppe. Zeigen Sie, dass der Raum EG/H zu BH homotopieäquivalent ist. Folgern Sie, dass der Quotient G/H die Homotopiefaser der natürlichen Abbildung $BH \rightarrow BG$ ist.

6.71. ÜBUNG. Überlegen Sie sich, dass die Menge der positiv definiten selbstadjungierten Matrizen über $\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder \mathbb{H} konvex ist. Folgern Sie, dass jedes \mathbb{k} -Vektorbündel vom Rang r über einem CW-Komplex eine $U(r, \mathbb{k})$ -Struktur trägt. Da $BGL_r(\mathbb{k})$ als CW-Komplex dargestellt werden kann, gibt es daher eine klassifizierende Abbildung $BGL_r(\mathbb{k}) \rightarrow BU(r, \mathbb{k})$ für das tautologische Bündel.

6.72. ÜBUNG. Wir betrachten die Gruppe $O(1) \cong \mathbb{Z}/2 \cong S^0$. Zeigen Sie:

- (1) Der Raum $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist homöomorph zum Verbund von n Kopien der S^0 .
- (2) Der Raum $BO(1)$ ist homotopieäquivalent zu $\mathbb{R}P^\infty \cong K(\mathbb{Z}/2, 1)$, siehe Beispiel 5.42 (4).
- (3) Für jeden topologischen Raum gilt $\text{Bun}_{O(1)}(X) \cong H^1(X, \mathbb{Z}/2)$.

Die einem reellen Vektorbündel $V \rightarrow X$ vom Rang 1 entsprechende Kohomologieklass $w_1(V) \in H^1(X, \mathbb{Z}/2)$ heißt auch *erste Stiefel-Whitney-Klasse*.

6.73. ÜBUNG. Wir betrachten die Gruppe $U(1) \cong SO(2) \cong S^1 \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

- (1) Der Raum $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ ist homöomorph zum Verbund von n Kopien der S^1 .
- (2) Der Raum $BU(1)$ ist homotopieäquivalent zu $\mathbb{C}P^\infty \cong K(\mathbb{Z}, 2)$, siehe Beispiel 5.42 (5).
- (3) Für jeden topologischen Raum gilt $\text{Bun}_{U(1)}(X) \cong H^2(X, \mathbb{Z})$.

Die einem komplexen Vektorbündel $V \rightarrow X$ vom Rang 1 entsprechende Kohomologieklass $c_1(V) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ heißt auch *erste Chern-Klasse*.

Übungen zu Abschnitt 6.g.

6.74. ÜBUNG. Die übliche Wirkung von $U(n+1)$ auf $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ induziert eine Abbildung

$$p: U(n+1) \ni g \mapsto g \cdot e_1 \in S^{2n+1}.$$

- (1) Zeigen Sie, dass p ein Faserbündel mit Faser $U(n) \subset U(n+1)$ ist.
- (2) Folgern Sie, dass $\iota_n: U(n) \hookrightarrow U(n+1)$ eine $(2n)$ -zusammenhängende Abbildung ist.
- (3) Bestimmen Sie $\pi_k(U(n))$ für $k = 0, 1$ und alle n .
- (4) Aufgrund von Bott-Periodizität gilt

$$\varinjlim \pi_k(U(n)) = \varinjlim \pi_{k+2}(U(n))$$

für alle k , wobei der Limes über n läuft. Welche $\pi_k(U(n))$ können Sie mit dieser Information bestimmen?

Ringspektren und Multiplikative Kohomologiefunktoren

In diesem Kapitel geht es um eine allgemeine Sprache für Produkte, wie wir sie zur gewöhnlichen Kohomologie, zur K -Theorie und zu Kobordismen bereits kennengelernt haben. Dazu führen wir zunächst CW-Spektren und ihr Smash-Produkt ein. Danach diskutieren wir Ringspektren und Produkte auf den zugehörigen (Ko-) Homologietheorien.

7.a. Die stabile CW-Kategorie

In diesem Abschnitt spezifizieren wir den Begriff eines Spektrums aus Definition 5.36 analog zu CW-Komplexen, so dass wir von Zellen eines CW-Spektrums sprechen können. Die Hauptidee bei einem Spektrum ist wie bei jedem „Grenzwert“, dass es nie auf den „Anfangsteil“ des Spektrums ankommt. Aus diesem Grund definieren wir Abbildungen zwischen Spektra nicht zwingend auf den einzelnen Räumen, sondern achten nur darauf, dass jede Zelle des Spektrums irgendwann einmal mit berücksichtigt wird.

Es gibt mehrere Gründe, sich diese Mühe zu machen, und man wird mit einigen guten Eigenschaften belohnt.

- (1) Spektra erben viele schöne Eigenschaften von CW-Komplexen. Beispielsweise gilt der Satz 7.13 von Whitehead.
- (2) In der Kategorie \mathcal{SCW} der CW-Spektren ist die Einhängung nach Bemerkung 7.6 stets invertierbar. Daher ist jede Konstruktion in dieser Kategorie automatisch stabil.
- (3) In der stabilen Homotopiekategorie \mathcal{SHCW} verhält sich jedes Spektrum so wie ein ω -Spektrum, genauer gesagt, gilt Lemma 7.10. Auf diese Weise kann man jedem Spektrum nicht nur einen Homologie-, sondern auch einen Kohomologiefunktor zuordnen.
- (4) In der Kategorie \mathcal{SHCW} lassen sich Morphismen addieren, und nach Bemerkung 7.14 sind endliche Koprodukte gleichzeitig auch Produkte. Somit ist \mathcal{SHCW} additiv.
- (5) In der Kategorie der Spektra gibt es wegen Satz 7.16 und Bemerkung 7.18 keinen Unterschied mehr zwischen Faser- und Kofasersequenzen. Genauer gesagt, kann man \mathcal{SHCW} mit der Struktur einer triangulierten Kategorie ausstatten.

Wir betrachten CW-Komplexe immer als Räume mit fixierten Zellen und charakteristischen Abbildungen. Auf der Einhängung eines punktierten CW-Komplexes X fixieren wir die folgende Zellstruktur. Wenn wir den Basispunkt als -1 -Skelett betrachten, entspricht dabei jeder n -Zelle mit charakteristischer Abbildung $\Phi^n: D^n \rightarrow X$ für $n \geq 0$ eine $(n+1)$ -Zelle mit charakteristischer Abbildung $\Phi^{n+1} = s\Phi^n$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 I \times D^n & \xleftarrow{\cong} & D^{n+1} \\
 \downarrow & & \downarrow \searrow^{s\Phi^n} \\
 (I \times D^n)/(\partial I \times D^n) & \xrightarrow{\cong} & S^1 \wedge D_+^n \xrightarrow[S\Phi_+^n]{} SX
 \end{array}$$

kommutiert. Unter einer *zellulären Inklusion* verstehen wir die Inklusion eines Unterkomplexes.

7.1. DEFINITION. Ein *CW-Spektrum* ist ein Spektrum $\mathbb{E} = (E_i, s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, bei dem die Stabilisierungsabbildungen $s_i: SE_i \rightarrow E_{i+1}$ zelluläre Inklusionen sind. Eine *strikte Abbildung* $\mathbf{f}: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ vom Grad $k \in \mathbb{Z}$ ist eine Folge zellulärer Abbildungen $f_i: E_i \rightarrow F_{i-k}$, so dass $Sf_i = f_{i+1}|_{SE_i}$ für alle i .

Für $k \in \mathbb{Z}$ ist eine *k-Zelle* von \mathbb{E} eine Folge $(e_{i+k})_{i \geq i_0}$ von $(i+k)$ -Zellen von E_i mit charakteristischen Abbildungen $\Phi^{i+k}: D^{i+k} \rightarrow E_i$ für $i \geq i_0 \geq -k$, so dass $\Phi^{i+k+1} = s\Phi_+^{i+k}$, und so dass es keine Zelle e_{i_0+k-1} von E_{i_0-1} gibt, deren Stabilisierung der Zelle e_{i_0+k} von E_{i_0} entspricht. Ein Spektrum aus nur endlich (abzählbar) vielen Zellen heißt *endlich (abzählbar)*.

Ein *Unterspektrum* \mathbb{U} eines CW-Spektrums \mathbb{E} ist eine Folge von Unterkomplexen $U_i \subset E_i$ mit $\text{im}(s_i|_{SE_i}) \subset U_{i+1}$. Ein Unterspektrum \mathbb{U} von \mathbb{E} heißt *kofinal*, wenn es zu jeder Zelle $(e_{i+k})_{i \geq i_0}$ ein $j_0 \geq i_0$ gibt, so dass e_{j+k} eine Zelle von U_j ist für alle $j \geq j_0$.

7.2. BEISPIEL. Wir konstruieren einfache Beispiele.

- (1) Sei X ein punktierter CW-Komplex, dann ist das Einhängungsspektrum SX mit den Räumen $S^k X$ ein CW-Spektrum. Für jede zelluläre Abbildung $f: X \rightarrow Y$ erhalten wir eine zelluläre Abbildung $\mathbf{f}: SX \rightarrow SY$. Wir sehen unten, dass strikte Abbildungen spezielle Morphismen von Spektren sind, und erhalten daher einen *Einhängungsfunktor* $\mathbb{S}: CW_+ \rightarrow SCW$.
- (2) Sei \mathbb{E} ein CW-Spektrum und X ein punktierter CW-Komplex, dann bilden wir das CW-Spektrum $\mathbb{E} \wedge X$ mit den Räumen $E_i \wedge X$ und den Stabilisierungsabbildungen $s_i \wedge \text{id}_X$. Insbesondere gilt $SX = \mathbb{S} \wedge X$.

Strikte Abbildungen heißen in der Literatur manchmal auch „Funktionen.“ In einem kofinalen Unterspektrum taucht jede Zelle irgendwann einmal auf. Die kofinalen Unterspektren eines CW-Spektrums bilden ein gerichtetes System, das heißt, der Durchschnitt zweier kofinaler Unterspektren ist wieder eins. Außerdem ist das Urbild eines kofinalen Unterspektrums unter einer strikten Abbildung ebenfalls wieder kofinal, und ein kofinales Unterspektrum eines kofinalen Unterspektrums von \mathbb{E} ist auch in \mathbb{E} kofinal. Daher ist die folgende Definition sinnvoll.

7.3. DEFINITION. Es seien \mathbb{E} und \mathbb{F} CW-Spektren. Wir definieren den Raum der *Abbildungen* von \mathbb{E} nach \mathbb{F} vom Grad k als

$$\text{hom}_k(\mathbb{E}, \mathbb{F}) = \underset{\mathbb{U} \subset \mathbb{E} \text{ kofinal}}{\text{colim}} \{ \mathbf{f}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{F} \mid \mathbf{f} \text{ strikt vom Grad } k \}.$$

Die graduierte Kategorie der CW-Spektren und ihrer Abbildungen wird mit SCW bezeichnet. Die Unterkategorie SCW_0 hat die gleichen Objekte, und als Morphismen alle Abbildungen vom Grad 0.

Mit anderen Worten ist eine Abbildung $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ zwischen CW-Spektren eine Äquivalenzklasse strikter Abbildungen $\mathbf{f}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{F}$, wobei $\mathbb{U} \subset \mathbb{E}$ ein kofinales Unterspektrum sei. Dabei heißen zwei solche Abbildungen $\mathbf{f}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{F}$ und $\mathbf{g}: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{F}$ äquivalent, wenn es ein kofinales Unterspektrum $\mathbb{W} \subset \mathbb{U} \cap \mathbb{V}$ gibt, so dass $f_i|_{W_i} = g_i|_{W_i}$ für alle i . Der Merksatz hierzu lautet „Zellen sofort, Abbildungen später.“

Die Kategorie SCW ist \mathbb{Z} -graduiert im Sinne von Bemerkung 5.16. Wir haben die Grade hier „homologisch“ gewählt, siehe unten.

7.4. BEMERKUNG. In der Kategorie SCW ist die Inklusion eines kofinalen Unterspektrums $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{E}$ stets ein Isomorphismus, denn die Umkehrabbildung lässt sich auf \mathbb{U} definieren. Auf diese Weise lässt sich zu jeder Abbildung $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ bis auf eindeutige Isomorphismen ein Abbildungskegel $Cf = C\mathbb{E} \cup_f \mathbb{F}$ konstruieren. Denn sei $\mathbf{f}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{F}$ ein Repräsentant von f , dann erhalten wir ein Spektrum, bestehend aus den Räumen $Cf_i = (C\mathbb{U}_i \cup_{f_i} F_{i-k})$. Ein anderer Repräsentant liefert ein anderes Spektrum, dass mit dem obigen ein kofinales Unterspektrum gemeinsam hat, so dass wir zwischen je zwei so konstruierten Abbildungskegeln auf verträgliche Weise eindeutige Isomorphismen angeben können.

Wir versehen den Raum I_+ mit der einfachst möglichen Zellstruktur, so dass es nur eine 1-Zelle gibt. Die folgende Definition lässt sich so wie die obige umschreiben in Termen von Äquivalenzklassen strikter Abbildungen, siehe Übung 7.55.

7.5. DEFINITION. Eine Homotopie zwischen Abbildungen $f, g: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ im Grad k von CW-Spektra ist eine Abbildung $h: \mathbb{E} \wedge I_+ \rightarrow \mathbb{F}$ vom Grad k , so dass $h|_{\mathbb{E} \wedge \{0\}_+} = f$ und $h|_{\mathbb{E} \wedge \{1\}_+} = g$. Die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen im Grad k wird mit $[\mathbb{E}, \mathbb{F}]_k$ bezeichnet, und wir setzen

$$[\mathbb{E}, \mathbb{F}]_\bullet = \bigoplus_k [\mathbb{E}, \mathbb{F}]_k .$$

Die Kategorie der CW-Spektra mit Homotopieklassen von Abbildungen heißt *stabile Homotopiekategorie* und wird mit \mathcal{SHCW} bezeichnet. Wie oben betrachten wir die Unterkategorie \mathcal{SHCW}_0 mit den gleichen Objekten und allen Homotopieklassen von Abbildungen vom Grad 0.

Hierzu überprüft man, dass Homotopie wie immer eine Äquivalenzrelation definiert, die mit Verkettung von Abbildungen verträglich ist, siehe wieder Übung 7.55. Außerdem ist $[\mathbb{E}, \mathbb{F}]_k$ für alle k eine abelsche Gruppe. Seien etwas $f, g: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ gegeben, dann finden wir ein kofinales Unterspektrum \mathbb{U} , auf dem f und g durch strikte Abbildungen \mathbf{f} und \mathbf{g} darstellbar sind. Wir betrachten das Unterspektrum \mathbb{V} mit

$$V_k = \text{im}((s_{k-1} \circ s_{k-2})|_{S^2 U_{k-2}}) \quad \text{für } k \geq 0$$

und $V_k = \text{pt}$ sonst. Es ist kofinal in \mathbb{U} und daher auch in \mathbb{E} , da jede Zelle entweder bei $k = 0$ oder zweite Schritte später auftaucht als in \mathbb{U} . Wir schränken \mathbf{f} und \mathbf{g} beide auf \mathbb{V} ein. Nach Bemerkung 3.75 (2), (3) lassen sich f_k und g_k addieren, und es gilt $S(f_k + g_k) = S f_k + S g_k$. Da $S V_k \subset V_{k+1}$ eine Kofaserung ist, können wir diese Homotopie auf V_{k+1} ausdehnen und erhalten so Schritt für Schritt eine strikte Abbildung $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{F}$, die $f + g$ repräsentiert. Im nächsten Abschnitt sehen wir, dass \mathcal{SHCW}_0 eine additive Kategorie ist.

7.6. BEMERKUNG. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ erhalten wir einen Funktor $\Sigma^n: \mathcal{SCW} \rightarrow \mathcal{SCW}$ mit

$$\Sigma^n \mathbb{E} = (E_{i+n}, s_{i+n})_{i \in \mathbb{N}} .$$

Das Spektrum $\mathbb{E} \wedge S^1$ aus Beispiel 7.2 (2) liegt kofinal in $\Sigma \mathbb{E}$, denn $E_i \wedge S^1 \cong S E_i \subset E_{i+1}$. Also ist es uns gelungen, den Einhängungsfunktor $S: \mathcal{CW} \rightarrow \mathcal{CW}$ zu invertieren.

7.7. DEFINITION. Die k -te *Homotopiegruppe* eines CW-Spektrums \mathbb{E} ist definiert als $\pi_k(\mathbb{E}) = [\Sigma^k \mathbb{S}, \mathbb{E}] = [\mathbb{S}, \mathbb{E}]_k$. Für eine Abbildung $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ von Spektren definieren wir $f_*: \pi_k(\mathbb{E}) \rightarrow \pi_k(\mathbb{F})$ wie üblich durch $f_*([g]) = [f \circ g]$.

Nach der obigen Vorüberlegung ist $\pi_k(\mathbb{E})$ für alle k eine abelsche Gruppe, somit erhalten wir Funktoren $\pi_k: \mathcal{SHCW} \rightarrow \mathcal{Ab}$. In Übung 7.56 überlegen wir uns, dass $\pi_\bullet: \mathcal{SHCW} \rightarrow \mathcal{GrAb}$ insgesamt einen graduierten Funktor definiert.

7.8. BEMERKUNG. Da das Spektrum $\Sigma^k \mathbb{S}$ aus nur einer Zelle besteht, die ab dem $(-k)$ -ten Schritt sichtbar ist, können wir leicht alle kofinalen Unterspektren angeben: zu jedem $\ell \geq -k$ existiert ein kofinales Unterspektrum \mathbb{U} mit $U_i = \text{pt}$ für $i < \ell$ und $U_i = S^{i+k}$ für $i \geq \ell$. Jede Abbildung $f: \Sigma^k \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{E}$ kann auf einem dieser Unterspektren dargestellt werden und wird dann bestimmt durch $f_\ell: S^{\ell+k} \rightarrow E_\ell$. Daher gilt

$$\pi_k(\mathbb{E}) = \varinjlim \pi_{k+\ell}(E_\ell) .$$

Indem wir \mathbb{E} durch das Spektrum $\mathbb{E} \wedge X$ ersetzen, erhalten wir jetzt eine neue Schreibweise für die allgemeinen Homologiefunktoren aus Satz 5.38:

$$\tilde{E}_k(X) = \varinjlim \pi_{k+\ell}(E_\ell \wedge X) = \pi_k(\mathbb{E} \wedge X) = [\mathbb{S}, \mathbb{E} \wedge X]_k .$$

Insbesondere haben wir den Kolimes in der Definition der stabilen Kategorie \mathcal{SHCW} versteckt.

7.9. BEMERKUNG. Um Kohomologietheorien in den Griff zu bekommen, könnten wir jedes Spektrum \mathbb{E} durch ein ω -Spektrum ersetzen. Die Stabilisierungsabbildungen induzieren via Exponentialgesetzabbildungen

$$E_i \xrightarrow{s_i} \Omega E_{i+1} \xrightarrow{\Omega s_{i+1}} \Omega^2 E_{i+2} \longrightarrow \dots$$

Wir können den CW-Approximationssatz 4.51 auf die obigen Räume rechts anwenden und die Abbildungen $\Omega^k s_{i+k}$ mit Satz 4.43 sukzessiv durch homotope zelluläre Abbildungen ersetzen, um (nach dem Satz 4.55 homotopieäquivalente) CW-Komplexe zu konstruieren:

$$F_i \longrightarrow \varinjlim \Omega^{k-i} E_k.$$

Dieses Verfahren ist leider nur bis auf Homotopien funktoriell, liefert aber zumindest ein ω -CW-Spektrum \mathbb{F} und isomorphe Kohomologiegruppen

$$\tilde{E}^i(X) = [X, F_i].$$

Im Folgenden zeigen wir, dass wir in der stabilen Homotopiekategorie eine viel einfachere Beschreibung von Kohomologiefunktoren zur Verfügung haben.

Um Abbildungen zwischen CW-Spektra induktiv Zelle für Zelle zu konstruieren, brauchen wir eine geeignete Induktionsreihenfolge. Da es k -Zellen für beliebig kleine (auch negative) $k \in \mathbb{Z}$ geben kann, zum Beispiel im K -Theorie-Spektrum \mathbb{K} aus Satz 6.46, ist eine Induktion über k nicht mehr möglich. Stattdessen sei e_k eine Zelle in \mathbb{E} , die zum ersten Mal in E_ℓ auftritt. Aufgrund der Kompaktheit von $S^{k+\ell-1}$ ist das Bild der Anklebeabbildung $\varphi: S^{k+\ell-1} \rightarrow E_\ell$ von e_k in einem minimalen endlichen Unterkomplex $Y \subset E_\ell$ enthalten. In allen höheren Schritten $E_{\ell+j}$ ist die entsprechende Zelle an den Unterkomplex $S^j Y \subset E_{\ell+j}$ angeklebt, der gleich vielen Zellen enthält. Wir nennen die Anzahl der Zellen von Y daher die *Höhe* der Zelle e_k . Sie ist wohldefiniert und invariant unter dem Übergang zu kofinalen Unterspektren. Alle Zellen der Höhe $\leq n$ bilden ein CW-Unterspektrum \mathbb{E}^n , und wir erhalten die *Schichtfiltrierung*

$$* = \mathbb{E}^{-1} \subset \mathbb{E}^0 \subset \mathbb{E}^1 \subset \dots \quad \text{mit} \quad \mathbb{E} = \varinjlim \mathbb{E}^n.$$

Ersetzt man also die Dimension einer Zelle durch ihre Höhe, so sieht alles wieder so ähnlich wie bei CW-Komplexen aus. Man beachte aber, dass die einzelnen Schichten \mathbb{E}^n im Allgemeinen nicht kofinal sind, es sei denn, es gälte $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}$.

7.10. LEMMA. *Es sei X ein CW-Komplex und \mathbb{E} ein CW-Spektrum. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus abelscher Gruppen*

$$[\mathbb{S}X, \mathbb{E}]_0 \xrightarrow{\cong} [X, \Omega^\infty \mathbb{E}], \quad \text{mit} \quad \Omega^\infty \mathbb{E} = \varinjlim \Omega^k E_k.$$

Man beachte, dass $\Omega^\infty \mathbb{E}$ kein CW-Komplex, sondern nur ein topologischer Raum vom Homotopietyp eines CW-Komplexes ist. Im strengen Sinne ist der Funktor $\Omega^\infty: \mathcal{SHCW} \rightarrow \mathcal{Hkw}\mathcal{H}_+$ daher nicht rechtsadjungiert zu $\mathbb{S}: \mathcal{HCW}_+ \rightarrow \mathcal{SHCW}$.

BEWEIS. Es sei $f: \mathbb{S}X \rightarrow \mathbb{E}$ eine Abbildung vom Grad 0, dargestellt durch \mathbf{f} auf einem Unterspektrum $U \subset \mathbb{S}X$. Wir definieren $g: X \rightarrow \Omega^\infty \mathbb{E}$ durch Induktion über die Höhe der Zellen von X . Es sei also e_k eine k -Zelle von X , und es sei $Y \subset X$ der kleinste Unterkomplex, der ∂e_k enthält. Es existiert $\ell > 0$, so dass die zu e_k gehörige Zelle von $\mathbb{S}X$ in U_ℓ vorkommt, und es folgt $S^\ell Y \subset U_\ell$.

Nach Induktionsannahme haben wir g bereits auf Y definiert, so dass

$$g: Y \longrightarrow \Omega^j E_j \longrightarrow \Omega^\infty \mathbb{E}$$

unter der Exponentialabbildung der Abbildung $f_j: S^j Y \rightarrow E_j$ entspricht. Man beachte, dass wir j beliebig groß wählen können, ohne g zu verändern, also $j = \ell$ annehmen dürfen. Wir erhalten eine Fortsetzung auf e_k aufgrund des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} S^\ell X \supset S^\ell Y & \xrightarrow{f_\ell} & E_\ell \\ \uparrow S^\ell \varphi & & \uparrow \\ S^{k+\ell-1} \hookrightarrow & & S^\ell D_+^k. \end{array}$$

Da eine Homotopie gerade einer Abbildung von $(SX) \wedge I_+ \cong \mathbb{S}(X \wedge I_+)$ entspricht, bildet die obige Konstruktion Homotopieklassen auf Homotopieklassen ab. Das entsprechende Argument wird uns auch die Homotopieinvarianz der inversen Konstruktion garantieren.

Zur Konstruktion der Umkehrabbildung sei $g: X \rightarrow \Omega^\infty \mathbb{E}$ gegeben. Wir konstruieren einen Repräsentanten $\mathbf{f}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{E}$ induktiv über die Höhe der Zellen von X . Es seien also e_k und Y wie oben. Nach Induktionsannahme gilt $S^j Y \subset U_j$ für ein j , und es sei $f_j: S^j Y \rightarrow E_j$ eine zelluläre Approximation der zu $g|_Y: Y \rightarrow \Omega^j E_j$ via Exponentialgesetz adjungierten Abbildung $S^j Y \rightarrow E_j$.

Da $\Omega^\infty \mathbb{E}$ ein Kolimes und D^k kompakt ist, faktorisiert $g|_{\bar{e}_k}$ über einen der Räume $\Omega^\ell E_\ell$ gemäß Übung 4.81. Dann ist $f_{\ell_j}|_{S^\ell Y} = S^{\ell-j}(f_j|_{S^j Y})$ eine zelluläre Approximation der zu $g: Y \rightarrow \Omega^\ell E_\ell$ adjungierten Abbildung. Wir können daher f_{ℓ_j} zu einer zellulären Approximation $S^\ell(Y \cup e_k) \rightarrow E_\ell$ der zu $g|_{Y \cup e_k}$ adjungierten Abbildung fortsetzen. \square

Mit der obigen Konstruktion finden wir auch einen Isomorphismus

$$[\mathbb{S}X, \Sigma^i \mathbb{E}]_0 = [\mathbb{S}X, \mathbb{E}]_{-i} \cong [X, \Omega^\infty \Sigma^i \mathbb{E}] = \left[X, \varinjlim \Omega^{k-i} E_k \right].$$

Das motiviert die folgende Definition, die aufgrund von Satz 6.28 und Bemerkung 7.9 tatsächlich einen Kohomologiefunktor liefert.

7.11. DEFINITION. Es sei \mathbb{E} ein CW-Spektrum. Dann definieren wir einen allgemeinen Kohomologiefunktor $\tilde{E}^\bullet: \mathcal{CW}_+ \rightarrow \mathcal{Ab}$ durch

$$\tilde{E}^i(X) = [\mathbb{S}X, \Sigma^i \mathbb{E}]_0 = [\mathbb{S}X, \mathbb{E}]_{-i}.$$

Wenn der CW-Komplex X kompakt ist, faktorisiert jede stetige Abbildung $X \rightarrow \Omega^\infty \Sigma^i \mathbb{E}$ über einen der Räume $\Omega^{k-i} E_k$, und wir erhalten

$$\tilde{E}^i(X) = \varinjlim [X, \Omega^{k-i} E_k] = \varinjlim [S^{k-i} X, E_k].$$

Im Allgemeinen gilt das jedoch nicht für beliebige CW-Komplexe. Genau dieses Problem hatten wir bereits bei der Definition von K -Theorie, siehe den Kommentar nach Satz 6.44.

7.b. Eigenschaften der stabilen Homotopiekategorie

In diesem Abschnitt fassen wir weitere wichtige Eigenschaften der Kategorie \mathcal{SHCW} zusammen.

Wir beginnen mit dem Satz von Whitehead. Dazu übertragen wir den Begriff der schwachen (Homotopie-) Äquivalenz aus Definition 4.45 auf Spektren. Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei auf Abbildungen vom Grad 0.

7.12. DEFINITION. Eine Abbildung $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ von Spektren heißt *schwache (Homotopie-) Äquivalenz*, wenn $f_*: \pi_k(\mathbb{E}) \rightarrow \pi_k(\mathbb{F})$ für alle k ein Isomorphismus ist.

7.13. SATZ (Whitehead). *Jede schwache Homotopieäquivalenz $f: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$ von Spektren ist eine stabile Homotopieäquivalenz.*

BEWEIS. Wir kopieren den Beweis von Satz 4.46. Wir ersetzen \mathbb{E} durch den punktierten Abbildungszyylinder Zf . Ähnlich wie der Abbildungskegel in Bemerkung 7.4 ist auch Zf bis auf stabile Isomorphismen eindeutig definiert. Die üblichen Deformationsretraktionen $Zf_n \wedge I_+ \rightarrow Zf_n$ von Zf_n auf E_n setzen sich zu einer Homotopie $Zf \wedge I_+ \rightarrow Zf$ zusammen, denn sei f_n auf $U_n \subset F_n$ definiert, dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S(\underbrace{U_n \wedge I_+ \cup_{f_n} E_n}_{Zf_n}) \wedge I_+ & \xrightarrow{\quad} & (SU_n \wedge I_+ \cup_{Sf_n} SE_n) \wedge I_+ \longrightarrow SE_n \\ & & \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ & & (U_{n+1} \wedge I_+ \cup_{f_{n+1}} E_{n+1}) \wedge I_+ \longrightarrow E_{n+1} . \end{array}$$

Somit ist \mathbb{E} Deformationsretrakt von Zf , und es reicht zu zeigen, dass auch \mathbb{F} ein Deformationsretrakt von Zf ist. Wir ersetzen also \mathbb{E} durch Zf und dürfen daher ohne Einschränkung annehmen, dass $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$ ein schwach äquivalentes Unterspektrum ist.

Es bezeichne wieder $* = \mathbb{E}^{-1} \subset \mathbb{E}^0 \subset \dots$ die Schichtfiltrierung von \mathbb{E} . Wir konstruieren induktiv stabile Homotopien $h^n: (\mathbb{E}^n \cup \mathbb{F}) \wedge I_+ \rightarrow \mathbb{E}$, so dass $h^n(\cdot, 0) = \text{id}$, im $h^n(\cdot, 1) \subset \mathbb{E}$ und $h^n|_{(\mathbb{E}^{n-1} \cup \mathbb{F}) \wedge I_+} = h^{n-1}$. Zunächst sei h^{-1} die stationäre Homotopie auf \mathbb{F} .

Sei jetzt $n \geq 0$ und sei h^{n-1} gegeben, dann setzen wir h^{n-1} Zelle für Zelle zu h^n fort. Sei also $e_j^{k_0}$ eine k_0 -Zelle der Höhe n in E_{ℓ_0} , die nicht zu \mathbb{F} gehört. Um h^{n-1} auf diese Zelle fortzusetzen, suchen wir ein geeignetes $\ell \geq \ell_0$ und eine Abbildung $h_{\ell,j}^n$ wie im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} D^k & \xrightarrow{\times 0} & D^k \times I & \longleftarrow & S^{k-1} \times I \\ \Phi_j^k \downarrow & & h_{\ell,j}^n \downarrow & & \downarrow \varphi_j^k \times \text{id}_I \\ E_\ell^n \cup F_\ell & \hookrightarrow & Y & \xleftarrow{h_\ell^{n-1}} & (E_\ell^{n-1} \cup F_\ell) \wedge I_+ , \end{array}$$

dabei sei e^k die e_{k_0} entsprechende Zelle von E_ℓ . Wie im Beweis von Satz 4.46 bilden die äußeren vertikalen Pfeile zusammen eine Abbildung $a_\ell: (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (E_\ell^n \cup F_\ell, F_\ell) \rightarrow (E_\ell, F_\ell)$.

Wir betrachten die langen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longleftarrow & \pi_{k-1}(E_\ell) & \xleftarrow{\iota_{\ell,*}} & \pi_{k-1}(F_\ell) & \xleftarrow{\partial} & \pi_k(E_\ell, F_\ell) & \longleftarrow & \pi_k(E_\ell) & \longleftarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longleftarrow & \pi_k(E_{\ell+1}) & \xleftarrow{\iota_{(\ell+1),*}} & \pi_k(F_{\ell+1}) & \xleftarrow{\partial} & \pi_{k+1}(E_{\ell+1}, F_{\ell+1}) & \longleftarrow & \pi_{k+1}(E_{\ell+1}) & \longleftarrow & \dots , \end{array}$$

dabei konstruieren wir Stabilisierungshomomorphismen für die relativen Homotopiegruppen wie im Beweis von Satz 3.80. Da Kolimiten wie im Beweis von Lemma 5.37 exakt sind, verschwindet $[a_\ell] \in \pi_k(E_\ell, F_\ell)$ für hinreichend große ℓ . Also erhalten wir die gesuchte Fortsetzung $h_{\ell,j}^n$ als Homotopie von a_ℓ relativ zu S^{k-1} zu einer Abbildung $D^k \rightarrow F_\ell$. \square

7.14. BEMERKUNG. Unter einer *präadditiven Kategorie* versteht man eine Kategorie, in der alle Morphismenmengen abelsche Gruppen sind und die Komposition bilinear ist. Man kann zeigen, dass für eine Kategorie \mathcal{C} folgende Aussagen äquivalent sind.

- (1) Die Kategorie \mathcal{C} ist präadditiv, und für je zwei Objekte existiert ihr Koprodukt.
- (2) Die Kategorie \mathcal{C} ist präadditiv, und für je zwei Objekte existiert ihr Produkt.
- (3) Für je zwei Objekte X, Y existiert ein Objekt $X \oplus Y$, das sowohl Produkt als auch Koprodukt ist.

Kategorien, die diese Eigenschaften haben, heißen *additiv*, und $X \oplus Y$ heißt direkte Summe oder *Biprodukt*. Abelsche Kategorien sind insbesondere additiv, somit sind Mod_R , Ab und Vec_k additiv, siehe Beispiel 4.27.

In Übung 7.58 überprüfen wir Eigenschaft (3) für die stabile Homotopiekategorie \mathcal{SHCW} . In Übung 7.59 wird (1) für \mathcal{SHCW} bewiesen und daraus (3) abstrakt abgeleitet. Insbesondere ist die Kategorie \mathcal{SHCW}_0 additiv.

Ein Wort der Warnung ist aber angebracht: die Äquivalenz von Produkt und Koprodukt gilt nur für Spektren. Nach wie vor gilt in den meisten Fällen $X \times Y \not\cong X \vee Y$, und genauso $\mathbb{S}(X \times Y) \not\cong \mathbb{S}(X \vee Y)$ — andernfalls wären die Künneth-Formeln 5.76 und 6.20 deutlich einfacher. Da $\mathbb{S}(X \vee Y) \cong \mathbb{S}X \vee \mathbb{S}Y$, schließen wir, dass der Einhängungsfunktor $\mathbb{S}: k\mathcal{WH}_+ \rightarrow \mathcal{SCW}$ nicht mit Produkten verträglich sein kann.

Ein wichtiges Werkzeug im Beweis von Satz 6.28 war die Puppe-Sequenz für Kofasersequenzen aus Satz 4.67. In Satz 4.72 hatten wir eine Eckmann-Hilton-duale lange exakte Sequenz für Fasersequenzen formuliert. In der Kategorie \mathcal{SHCW} müssen wir nicht mehr zwischen Faser- und Kofasersequenzen unterscheiden. Wir erinnern uns an den Abbildungskegel Cf einer Abbildung $f: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$ von Spektren aus Bemerkung 7.4, und bezeichnen die natürliche Inklusion mit $\iota: \mathbb{E} \rightarrow Cf$.

7.15. DEFINITION. Zwei komponierbare Abbildungen $\mathbb{G} \xrightarrow{g} \mathbb{H} \xrightarrow{h} \mathbb{K}$ bilden eine *Kofasersequenz*, wenn es eine Abbildung $f: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$ und ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{G} & \xrightarrow{g} & \mathbb{H} & \xrightarrow{h} & \mathbb{K} \\ \sim \downarrow & & \sim \downarrow & & \sim \downarrow \\ \mathbb{F} & \xrightarrow{f} & \mathbb{E} & \xrightarrow{\iota} & Cf \end{array}$$

gibt, das bis auf Homotopie kommutiert, und in dem die vertikalen Pfeile Homotopieäquivalenzen sind.

Der folgenden Satz verallgemeinert nicht nur den Satz 4.67 über Kofasersequenzen von Räumen und die Barratt-Puppe-Sequenz, sondern in gewissem Sinne auch Satz 4.72 (3).

7.16. SATZ. Zu jeder Abbildung von Spektren $f: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$ existiert eine Sequenz

$$\dots \rightarrow \Sigma^{-1}(Cf) \xrightarrow{\Sigma^{-1}\delta} \mathbb{F} \xrightarrow{f} \mathbb{E} \xrightarrow{\iota} Cf \xrightarrow{\delta} \Sigma\mathbb{F} \rightarrow \dots, \quad (1)$$

in der je zwei aufeinanderfolgende Abbildungen eine Kofasersequenz bilden. Für jedes Spektrum \mathbb{G} erhalten wir exakte Sequenzen

$$\dots \rightarrow [\mathbb{G}, \mathbb{F}] \xrightarrow{f_*} [\mathbb{G}, \mathbb{E}] \xrightarrow{\iota_*} [\mathbb{G}, Cf] \xrightarrow{\delta_*} [\mathbb{G}, \Sigma\mathbb{F}] \rightarrow \dots \quad (2)$$

$$\text{und} \quad \dots \rightarrow [\Sigma\mathbb{F}, \mathbb{G}] \xrightarrow{\delta^*} [Cf, \mathbb{G}] \xrightarrow{\iota^*} [\mathbb{E}, \mathbb{G}] \xrightarrow{f^*} [\mathbb{F}, \mathbb{G}] \rightarrow \dots. \quad (3)$$

Sequenzen vom Typ (1) oder dazu homotopieäquivalente Sequenzen könnte man lange Kofasersequenzen nennen. Aufgrund von (1) reicht es aber, zugehörige kurze Kofasersequenzen $\mathbb{G} \rightarrow \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{K}$ wie in Definition 7.15 anzugeben. Die Sequenz in (3) heißt *Puppe-Sequenz*. Die Punkte (2) und (3) bilden in gewissem Sinne ein homotopietheoretisches Pendant zum Schlangenlemma 5.25.

BEWEIS. Es sei f als strikte Abbildung auf $\mathbb{U} \subset \mathbb{F}$ definiert. Zum Beweis von (1) reicht es, die Abbildungen aus Satz 4.67 (*) zwischen beteiligten Räumen $U_k \subset F_k$, E_k und Cf_k und die Homotopieäquivalenzen aus dem Beweis von Satz 4.67 (1) zu Abbildungen von Spektren zusammzusetzen. **!!! Vorzeichen ????**

Zu (2) und (3) beweisen wir zunächst folgende Hilfsaussage. Gegeben sei ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{F} & \xrightarrow{f} & \mathbb{E} & \xrightarrow{\iota} & Cf & \xrightarrow{\delta} & \Sigma\mathbb{F} \\
 \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \downarrow \Sigma a \\
 \mathbb{G} & \xrightarrow{g} & \mathbb{H} & \xrightarrow{h} & Cg & \xrightarrow{k} & \Sigma\mathbb{G}
 \end{array} \quad (*)$$

(bis auf die Abbildung c), bei dem die Zeilen Kofasersequenzen wie in (1) seien, und in dem das linke Quadrat bis auf Homotopie kommutiert. Dann behaupten wir, dass eine Abbildung c von Spektren existiert, so dass das gesamte obige Diagramm bis auf Homotopie kommutiert.

Wir ersetzen \mathbb{E} und \mathbb{G} durch kofinale Unterspektren, auf denen b beziehungsweise g strikt definiert sind, und anschließend \mathbb{F} durch ein kofinales Unterspektrum, auf dem a und f strikt definiert sind. Gleichzeitig ersetzen wir auch Cf durch das entsprechende kofinale Unterspektrum, ähnlich wie in Bemerkung 7.4.

Es bezeichne $H: \mathbb{F} \wedge I_+ \rightarrow \mathbb{H}$ eine Homotopie mit $H(\cdot, t) = g \circ a$ für $t \leq \frac{1}{2}$ und $H(\cdot, 1) = b \circ f$. Dann definieren b und H zusammen eine strikte Abbildung $Zf = (\mathbb{F} \wedge I_+) \cup_f \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{H}$. Wir betrachten anstelle von \mathbb{E} den Abbildungszyylinder Zf und anstelle von b die soeben konstruierte Abbildung. Jetzt sind alle Abbildungen im linken Quadrat strikt, und das Quadrat kommutiert auch strikt.

Wir definieren $\bar{c}: Zf \rightarrow Zg$ durch Zusammensetzen der Abbildungen im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{F} \wedge [0, \frac{1}{2}]_+ & \longleftarrow & \mathbb{F} \times \{\frac{1}{2}\} & \hookrightarrow & \mathbb{F} \wedge [\frac{1}{2}, 1]_+ & \longleftarrow & \mathbb{F} \times \{1\} \\
 \downarrow a \wedge (2 \cdot) & & \downarrow a & & \downarrow H & & \downarrow f \\
 \mathbb{G} \wedge I_+ & \longleftarrow & \mathbb{G} \times \{1\} & \xrightarrow{g} & \mathbb{H} & \longleftarrow & \mathbb{E}
 \end{array}$$

dann induziert \bar{c} eine Abbildung $c: Cf \rightarrow Cg$, so dass das mittlere Quadrat strikt kommutiert. Man überzeugt sich leicht, dass das rechte Quadrat bis auf eine Homotopie kommutiert, die nur die Parametrisierung des S^1 -Faktors in $S^1 \wedge \mathbb{F} \subset \Sigma\mathbb{F}$ verschiebt. Da wir in der Vorbereitung nur \mathbb{E} durch ein homotopieäquivalentes Spektrum und einige andere Spektren durch isomorphe (da kofinale) Unterspektren ersetzt haben, folgt auch die ursprüngliche Behauptung.

In (2) betrachten wir Exaktheit an der Stelle $[\mathbb{G}, \mathbb{E}]$; wegen (1) folgt die Exaktheit dann auch an allen anderen Stellen. Aus $\iota \circ f \sim 0$ folgt im $f_* \subset \ker \iota_*$. Sei jetzt $a: \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{E}$ gegeben, so dass $[a] \in \ker \iota_*$, und sei $h: \mathbb{G} \wedge I \rightarrow Cf$ eine Nullhomotopie von $\iota \circ a$. Dann betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{G} \xrightarrow{c \times \{1\}} \mathbb{G} \wedge I & \longrightarrow & \mathbb{G} \wedge S^1 & \xrightarrow{s} & \Sigma\mathbb{G} \\
 \downarrow a & & \downarrow h & & \downarrow c & & \downarrow \Sigma a \\
 \mathbb{E} & \xrightarrow{\iota} & Cf & \xrightarrow{\delta} & \Sigma\mathbb{F} & \xrightarrow{\Sigma f} & \Sigma\mathbb{E}
 \end{array}$$

vom Typ (*), dabei ist s die Strukturabbildung von \mathbb{G} , und daher nach Bemerkung 7.6 ein Isomorphismus. Wir finden daher $c: \mathbb{G} \wedge S^1 \rightarrow \mathbb{F} \wedge S^1$, so dass $\Sigma f \circ c \sim \Sigma a$. Da Σ invertierbar ist, folgt $[a] = f_*[\Sigma^{-1}c] \in \text{im } f_*$.

In (3) gilt im $\iota_* \subset \ker f_*$, sei also $b: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{G}$ mit $[b] \in \ker f_*$ gegeben. In Analogie zu Bemerkung 4.66 betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{F} & \xrightarrow{f} & \mathbb{E} & \xrightarrow{\iota} & Cf & \xrightarrow{\delta} & \Sigma\mathbb{F} \\
 & & \downarrow b & & \downarrow c & & \downarrow \Sigma a \\
 * & \longrightarrow & \mathbb{G} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{G} & \longrightarrow & *
 \end{array}$$

und erhalten das gesuchte Element $[c] \in [Cf, \mathbb{G}]$ mit $\iota^*[c] = [b]$. \square

7.17. BEMERKUNG. Wir sammeln einige Anwendungen der obigen exakten Sequenzen auf Homologie- und Kohomologiefunktoren. Dabei treffen wir zunächst auf einige alte Bekannte.

- (1) Es sei (X, A) eine Kofaserung. Da alle Abbildungen in Satz 4.67 (*) mit Einhängung verträglich sind, erhalten wir die Kofasersequenz

$$\mathbb{S}A \longrightarrow \mathbb{S}X \longrightarrow \mathbb{S}(X/A)$$

Für $\mathbb{G} = \mathbb{S}$ wird die Sequenz (2) zur langen exakten stabilen Homotopiesequenz aus Satz 3.80. Sei \mathbb{G} ein beliebiges Spektrum, dann liefert Satz 7.16 (3) die lange exakte Sequenz der E -Kohomologiesequenz aus Definition 7.11.

- (2) Es sei (X, A) wie oben und \mathbb{E} ein beliebiges Spektrum, dann erhalten wir eine Kofasersequenz

$$\mathbb{E} \wedge X \longrightarrow \mathbb{E} \wedge A \longrightarrow \mathbb{E} \wedge (X/A) .$$

Für $\mathbb{G} = \mathbb{S}$ wird die Sequenz aus Satz 7.16 (2) nach Bemerkung 7.8 zur langen exakten E -Homologiesequenz.

- (3) Es sei $\mathbb{Z}^{\oplus K} \rightarrow \mathbb{Z}^{\oplus J}$ freie Auflösung einer abelschen Gruppe A und $n \geq 2$. Die Konstruktion des Moore-Raums MA_n aus Proposition 5.70 liefert eine Kofasersequenz

$$\bigvee_K S^n \longrightarrow \bigvee_J S^n \longrightarrow MA_n .$$

Sei X ein weiterer Raum, und sei \mathbb{E} ein Spektrum. Wir erhalten die langen Sequenzen

$$\cdots \longrightarrow \underbrace{[\mathbb{S}, \mathbb{E} \wedge \bigvee_K S^n \wedge X]}_{\tilde{E}_{-n}(X)^{\oplus K}} \xrightarrow{\text{id} \otimes a} \underbrace{[\mathbb{S}, \mathbb{E} \wedge \bigvee_J S^n \wedge X]}_{\tilde{E}_{-n}(X)^{\oplus J}} \longrightarrow \underbrace{[\mathbb{S}, \mathbb{E} \wedge MA_n \wedge X]}_{\tilde{E}_{-n}(X; A)} \longrightarrow \cdots$$

und $\cdots \longrightarrow \underbrace{[\mathbb{S}X, \mathbb{E} \wedge \bigvee_K S^n]}_{\tilde{E}^n(X)^{\oplus K}} \xrightarrow{\text{id} \otimes a} \underbrace{[\mathbb{S}X, \mathbb{E} \wedge \bigvee_J S^n]}_{\tilde{E}^n(X)^{\oplus J}} \longrightarrow \underbrace{[\mathbb{S}X, \mathbb{E} \wedge MA_n]}_{\tilde{E}^n(X; A)} \longrightarrow \cdots .$

Die erste Sequenz haben wir im Beweis des universellen Koeffiziententheorems 5.72 benutzt. Aus der zweiten erhalten wir analoge natürliche kurze exakte Sequenzen für Kohomologiefunktoren

$$0 \longrightarrow \tilde{E}^n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow \tilde{E}^n(X; A) \longrightarrow \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(\tilde{E}^{n+1}(X), A) \longrightarrow 0 .$$

Später, wenn wir ein reduziertes Produkt für Spektren zur Verfügung haben, betrachten wir das Moore-Spektrum $\mathbb{M}A$ aus Definition 5.68 und schreiben $\mathbb{E} \wedge \mathbb{M}A$ für das Spektrum zu $\tilde{E}_{\bullet}(\cdot; A)$ und $\tilde{E}^{\bullet}(\cdot; A)$, siehe Bemerkung 7.32.

- (4) Allgemeiner sei $A \rightarrow B \rightarrow C$ eine kurze exakte Sequenz abelscher Gruppen, und $n \geq 2$. Wie in Übung 5.111 existiert eine Kofasersequenz $MA_n \rightarrow MB_n \rightarrow MC_n$. Wie oben erhalten wir die *Bockstein-Sequenzen*

$$\cdots \longrightarrow \tilde{E}_n(X; A) \longrightarrow \tilde{E}_n(X; B) \longrightarrow \tilde{E}_n(X; C) \xrightarrow{\partial} \tilde{E}_{n-1}(X; A) \longrightarrow \cdots$$

und $\cdots \longrightarrow \tilde{E}^n(X; A) \longrightarrow \tilde{E}^n(X; B) \longrightarrow \tilde{E}^n(X; C) \xrightarrow{\delta} \tilde{E}^{n+1}(X; A) \longrightarrow \cdots .$

Noch allgemeiner erhalten wir analoge Koeffizientensequenzen, wann immer wir eine Kofasersequenz von Spektren gegeben haben.

7.18. BEMERKUNG. Analog zu Kofasersequenzen kann man auch Fasersequenzen betrachten. Da das nichts neues ergibt, fassen wir die entsprechenden Überlegungen nur kurz zusammen. Die Konstruktion der Homotopiefaser ist nach Übung 7.60 mit Einhängung verträglich. Homotopiefasern sind im Allgemeinen keine CW-Komplexe, haben aber nach einer Verallgemeinerung des

Satzes 4.55 den Homotopietyp von CW-Komplexen. Wir können also bis auf Homotopieäquivalenz die Homotopiefaser Ff einer Abbildung $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$ von Spektren bilden. Wir nennen eine Komposition von Abbildungen $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$ eine *Fasersequenz* von Spektren, wenn sie ähnlich wie in Definition 7.15 zur Sequenz vom Typ $Ff \rightarrow \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$ homotopieäquivalent ist.

Als nächstes zeigen wir in Übung 7.61, dass zu jeder Fasersequenz wie oben eine natürliche lange exakte Sequenz der Form

$$\cdots \longrightarrow \pi_k(\mathbb{F}) \longrightarrow \pi_k(\mathbb{E}) \longrightarrow \pi_k(\mathbb{B}) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(\mathbb{F}) \longrightarrow \cdots$$

gehört. Jetzt folgt aus dem Satz von Whitehead, dass jede Kofasersequenz von Spektren eine Fasersequenz ist und umgekehrt, siehe Übung 7.62.

Die Kategorie \mathcal{SHCW} ist eine sogenannte *triangulierte Kategorie*. Das heißt, sie ist additiv, besitzt einen *Verschiebungsfunktor*, nämlich Σ , und es gibt eine Klasse sogenannter *ausgezeichneter Dreiecke*, das sind Sequenzen der Form

$$\mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{B} \longrightarrow \Sigma\mathbb{F},$$

wobei $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B} \rightarrow \Sigma\mathbb{F}$ eine (Ko-) Fasersequenz sei. Diese Klasse ausgezeichneter Dreiecke erfüllt eine Reihe von Eigenschaften, auf die wir hier aber nicht weiter eingehen wollen.

Die Homotopiekategorie $\mathcal{HCh}_{\mathcal{C}}$ der Kettenkomplexe $\mathcal{Ch}_{\mathcal{C}}$ in einer abelschen Kategorie \mathcal{C} , bei der Morphismen somit Kettenabbildungen bis auf Kettenhomotopie sind, erfüllt ebenfalls die Eigenschaften einer triangulierten Kategorie. Die ausgezeichneten Dreiecke kommen dabei von kurzen exakte Sequenzen von Kettenkomplexen, und von dazu kettenhomotopieäquivalenten Sequenzen. Anstelle des Satzes 7.16 tritt das Schlangenlemma 5.25. Genau wie in \mathcal{SHCW} geht beim Übergang zur Homologie einige Information verloren.

7.c. Das reduzierte Produkt von Spektren

Wir haben in den Abschnitten 6.d und 6.g bereits Produkte auf der gewöhnlichen Kohomologie und der K -Theorie kennengelernt. Ziel dieses Kapitels ist es, Produkte so allgemein wie möglich zu beschreiben. In Analogie mit Proposition 6.21 formulieren wir einige Forderungen an diese Produkte.

Unter einer abelschen Kategorie mit Tensorprodukt wollen wir eine abelsche Kategorie mit einer monoidalen Struktur verstehen, die eine universelle Eigenschaft wie in Beispiel 4.27 (2) erfüllt. Wir erinnern uns an die Stabilisierungsisomorphismen $\sigma: \tilde{h}^k(X) \rightarrow \tilde{h}^{k+1}(SX)$ und die Transpositionsabbildung $t: X \wedge Y \rightarrow Y \wedge X$.

7.19. DEFINITION. Ein (*reduzierter*) *multiplikativer Kohomologiefunktor* $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet, \wedge, \varepsilon)$ besteht aus einem reduzierten Kohomologiefunktor $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet)$ mit Werten in einer abelschen Kategorie \mathcal{C} mit Tensorprodukt, einer Familie natürlicher Transformationen

$$\wedge_{k,\ell}: \tilde{h}^k \otimes \tilde{h}^\ell \longrightarrow \tilde{h}^{k+\ell}(\cdot \wedge \cdot)$$

von Funktoren $kw\mathcal{H}_+ \times kw\mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{C}$ und einem Element $\varepsilon \in \tilde{h}^0(S^0)$, so dass für alle Räume X, Y, Z und alle $\alpha \in \tilde{h}^k(X), \beta \in \tilde{h}^\ell(Y), \gamma \in \tilde{h}^m(Z)$ gilt:

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \in \tilde{h}^{k+\ell+m}(X \wedge Y \wedge Z), \quad (1)$$

$$\alpha \wedge \varepsilon = \alpha = \varepsilon \wedge \alpha \in \tilde{h}^k(X), \quad (2)$$

$$(\sigma\alpha) \wedge \beta = \sigma(\alpha \wedge \beta) = (-1)^k \alpha \wedge (\sigma\beta) \in \tilde{h}^{k+\ell+1}(S^1 \wedge X \wedge Y). \quad (3)$$

Wir nennen $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet, \wedge, \varepsilon)$ *kommutativ*, wenn darüberhinaus

$$t^*(\beta \wedge \alpha) = (-1)^{k\ell} \alpha \wedge \beta \in \tilde{h}^{k+\ell}(X \wedge Y). \quad (4)$$

Da wir das äußere Produkt mittels des Tensorproduktes als natürliche Transformation eingeführt haben, ist es automatisch bilinear in dem Sinne, dass

$$\cdot \wedge \beta: \tilde{h}^k(X) \rightarrow \tilde{h}^{k+\ell}(X \wedge Y) \quad \text{und} \quad \alpha \wedge \cdot: \tilde{h}^\ell(Y) \rightarrow \tilde{h}^{k+\ell}(X \wedge Y)$$

Morphismen in \mathcal{C} sind. Aus (1), (2) folgt insbesondere auch, dass die Koeffizienten $\tilde{h}^\bullet(X) \in \mathcal{C}$ einen Ring bilden (sogar eine R -Algebra, falls $\mathcal{C} = \text{Mod}_R$), und dass $\tilde{h}^\bullet(X)$ für alle X ein $\tilde{h}^\bullet(X)$ -Modul ist.

7.20. DEFINITION. Es sei $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet, \wedge, \varepsilon)$ ein reduzierter multiplikativer Kohomologiefunktor mit Werten in \mathcal{C} . Ein $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet, \wedge, \varepsilon)$ -Rechtsmodul $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet, /)$ besteht aus einem reduzierten Homologiefunktor $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$ mit Werten in \mathcal{C} und einer Familie natürlicher Abbildungen

$$/_{k,\ell}: \tilde{h}_{k+\ell}(X \wedge Y) \otimes \tilde{h}^k(X) \longrightarrow \tilde{h}_\ell(Y),$$

so dass für alle Räume X, Y, Z , alle $\alpha \in \tilde{h}^k(X)$, $\beta \in \tilde{h}^\ell(Y)$, $\gamma \in \tilde{h}^m(Z)$ und alle $a \in \tilde{h}_n(X)$, $b \in \tilde{h}_{k+\ell}(X \wedge Y)$, $c \in \tilde{h}_{k+\ell+m}(X \wedge Y \wedge Z)$ gilt:

$$(c/\alpha)/\beta = c/(\alpha \wedge \beta) \in \tilde{h}_m(Z), \quad (1)$$

$$a/\varepsilon = a \in \tilde{h}_n(X), \quad (2)$$

$$(\sigma b)/(\sigma \alpha) = b/\alpha \in \tilde{h}_\ell(Y) \quad (3)$$

$$\text{und} \quad (\sigma b)/\alpha = (-1)^k \sigma(b/\alpha) \in \tilde{h}_{\ell+1}(Y).$$

Außerdem definieren wir das *Kroneckerprodukt* durch

$$\langle a, \alpha \rangle = a/\alpha \in \tilde{h}_{n-k}(S^0). \quad (4)$$

Hierbei bedeutet „Natürlichkeit“ das gleiche wie in (6.2). Analog können wir auch Kohomologiefunktoren mit Hilfe eines äußeren Produktes zu $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet, \wedge, \varepsilon)$ -Links- beziehungsweise Rechtsmoduln machen.

Nachdem wir multiplikative Kohomologiefunktoren definiert haben, können wir wie in Abschnitt 6.d fortfahren. Insbesondere können wir innere Produkte wie in Definition 6.23 erklären, dann gilt Proposition 6.24 analog. Beispiele sind allerdings schwieriger zu berechnen als für gewöhnliche Kohomologie, da wir keinen zellulären Komplex zur Verfügung haben. Wir verschieben diese Betrachtungen auf später und versuchen zunächst, multiplikative Kohomologiefunktoren durch Spektren zu realisieren.

Dazu beginnen wir mit einem Kohomologiefunktor $\tilde{E}^\bullet = [\mathbb{S} \cdot, \mathbb{E}]_{-\bullet}$. Der Einfachheit halber sei \mathbb{E} ein ω -Spektrum, und $[\alpha] \in \tilde{E}^k(X)$ und $[\beta] \in \tilde{E}^\ell(Y)$ seien repräsentiert durch $\alpha: X \rightarrow E_k$ und $\beta: Y \rightarrow E_\ell$. Wir nehmen an, dass es ein externes Produkt auf \tilde{E}^\bullet analog zum Produkt aus Proposition 6.21 gibt. Wenn es unter Abbildungen von beliebigem Grad natürlich ist, dann folgt

$$[\alpha] \wedge [\beta] = (\alpha^*[\text{id}_{E_k}]) \wedge (\beta^*[\text{id}_{E_\ell}]) = (\alpha \wedge \beta)^*([\text{id}_{E_k}] \wedge [\text{id}_{E_\ell}]).$$

Zu bestimmen ist somit die Klasse

$$[\text{id}_{E_k}] \wedge [\text{id}_{E_\ell}] \in \tilde{E}^{k+\ell}(E_k \wedge E_\ell) = [E_k \wedge E_\ell, E_{k+\ell}].$$

Also suchen wir geeignete Abbildungen $\mu_{k,\ell}: E_k \wedge E_\ell \rightarrow E_{k+\ell}$ für alle $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Dann erhalten wir ein externes Produkt $[a] \wedge [b]$ als Verkettung

$$X \wedge Y \xrightarrow{\alpha \wedge \beta} E_k \wedge E_\ell \xrightarrow{\mu_{k,\ell}} E_{k+\ell}.$$

Sei jetzt $[b] \in \tilde{E}_{k+\ell}(X \wedge Y)$ repräsentiert durch $b: S^{k+\ell+m} \rightarrow E_m \wedge X \wedge Y$ und $[\alpha]$ wie oben, dann definieren das Schräg-Produkt $[b]/[\alpha] \in \tilde{E}_\ell(Y)$ als Verkettung

$$S^{k+\ell+m} \xrightarrow{b} E_m \wedge X \wedge Y \xrightarrow{\text{id} \wedge \alpha \wedge \text{id}} E_m \wedge E_k \wedge Y \xrightarrow{\mu_{m,k}} E_{m+k} \wedge Y .$$

Anschließend können wir wie in Definition 6.23 innere Produkte definieren.

Um die in Proposition 6.21 für die Produkte auf der gewöhnlichen Kohomologie gezeigten Eigenschaften allgemein zu erhalten, müssen die Abbildungen $\mu_{k,\ell}$ die entsprechenden Eigenschaften erfüllen. Am einfachsten lässt sich all das beschreiben, indem man zunächst ein Spektrum $\mathbb{E} \wedge \mathbb{E}$ konstruiert, und dann eine Abbildung $\mu: \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ von Spektren. Dadurch wird das externe Produkt stabil im Sinne von Proposition 6.21 (3). Wenn wir (Ko-) Homologie mit anderen Koeffizienten betrachten wollen, benötigen wir entsprechend auch ein reduziertes Produkt $\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$. Dieses Produkt soll bis auf Homotopie in kohärenter Weise assoziativ, unitär und graduiert kommutativ sein. Dazu folgen wir Adams [Ad] und Switzer [Sw] und beginnen mit einem ganzen Sammelsurium sogenannter naiver reduzierter Produkte.

Zur Vereinfachung betrachten wir zunächst nur Spektren $\mathbb{E} = (E_\bullet, s_\bullet)$ und $\mathbb{F} = (F_\bullet, t_\bullet)$ mit $E_n = F_n = \text{pt}$ für alle $n < 0$. Wir konstruieren ein ebensolches Spektrum \mathbb{G} , so dass $G_n = E_{k(n)} \wedge F_{\ell(n)}$ mit Funktionen $k, \ell: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ und $k(n) + \ell(n) = n$. Um Stabilisierungsabbildungen u_n definieren zu können, erlauben wir für jedes n nur zwei Fälle.

(1) Es gilt $k(n+1) = k(n) + 1$ und $\ell(n+1) = \ell(n)$, und wir setzen

$$u(n) = s_{k(n)} \wedge \text{id}_{F_{\ell(n)}}: S(E_{k(n)} \wedge F_{\ell(n)}) \cong (SE_{k(n)}) \wedge F_{\ell(n)} \longrightarrow E_{k(n)+1} \wedge F_{\ell(n)} .$$

(2) Es gilt $k(n+1) = k(n)$ und $\ell(n+1) = \ell(n) + 1$, und wir setzen

$$u(n) = \text{id}_{E_{k(n)}} \wedge ((-1)^{k(n)} t_{\ell(n)}): S(E_{k(n)} \wedge F_{\ell(n)}) \cong E_{k(n)} \wedge (SF_{\ell(n)}) \longrightarrow E_{k(n)} \wedge F_{\ell(n)+1} .$$

Hierbei nutzen wir aus, dass $SX = S^1 \wedge X$ und $X \wedge S^1$ natürlich homöomorph sind. Das Vorzeichen in (2) entspricht dem in Proposition 6.21 (3). Wir realisieren es, indem wir S^n künftig als Einpunktkompaktifizierung von \mathbb{R}^n betrachten, durch

$$-t_\ell(r, y) = t_\ell(-r, y) ,$$

so dass $-t_\ell$ zu t_ℓ in $[SF_\ell, F_{\ell+1}]$ invers ist. Generell stellen wir uns auf den Standpunkt, dass das reduzierte Produkt von Räumen (bis auf natürliche Homöomorphismen) assoziativ und kommutativ ist, und versehen nur Abbildungen mit Vorzeichen.

Die Abbildung $(k, \ell): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ beschreibt also einen Zickzack-Pfad nach rechts oben. Diese Zickzack-Pfade kodieren wir wie folgt. Es sei $B \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge, dann definieren wir $\varphi_A: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ durch

$$\varphi_A(n) = \#\{k \in A \mid k < n\} .$$

Beispielsweise ist $\varphi_{\mathbb{N}} = \text{id}_{\mathbb{N}}$ und $\varphi_\emptyset \equiv 0$. Falls $A = B \dot{\cup} C \subset \mathbb{N}$, erhalten wir

$$\varphi_A = \varphi_B + \varphi_C ,$$

und $\varphi_{B \cup C}(n) \mapsto (\varphi_B(n), \varphi_C(n))$ liefert einen Zickzack-Pfad wie oben falls A unendlich ist.

7.21. DEFINITION. Es sei $A = B \dot{\cup} C \subset \mathbb{N}$ eine unendliche Teilmenge, dann definieren wir ein *naives reduziertes Produkt* $\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F} = (G_k, u_k)_k$ durch

$$G_{\varphi_A(n)} = E_{\varphi_B(n)} \wedge F_{\varphi_C(n)} ,$$

$$u_{\varphi_A(n)} = \begin{cases} s_{\varphi_B(n)} \wedge \text{id} & \text{falls } \varphi_B(n+1) = \varphi_B(n) + 1, \text{ und} \\ \text{id} \wedge ((-1)^{\varphi_B(n)} t_{\varphi_C(n)}) & \text{falls } \varphi_C(n+1) = \varphi_C(n) + 1. \end{cases}$$

Falls A endlich ist, liefert die obige Definition immer noch den Anfang eines Spektrums; auch diesen Fall werden wir betrachten.

7.22. BEISPIEL. Es sei \mathbb{E} ein Spektrum und X ein Raum. Dann gilt

$$\mathbb{E} \wedge_{\mathbb{N}, \emptyset} \mathbb{S}X = \mathbb{E} \wedge X \quad (1)$$

wie in Beispiel 7.2 (2), hingegen ist

$$\mathbb{E} \wedge_{\emptyset, \mathbb{N}} \mathbb{S}X = E_0 \wedge \mathbb{S}X . \quad (2)$$

7.23. PROPOSITION. *Es seien $A = B \dot{\cup} C \subset \mathbb{N}$, und B und C seien unendlich. Dann ist das naive Produkt $\wedge_{B,C}: \mathcal{SCW}_0 \times \mathcal{SCW}_0 \rightarrow \mathcal{SCW}_0$ natürllich.*

BEWEIS. Wenn B unendlich ist und $\mathbb{U} \subset \mathbb{E}$ kofinal, dann ist $\mathbb{U} \wedge_{B,C} \mathbb{F} \subset \mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}$ kofinal. Denn sei c eine Zelle von \mathbb{E} mit $c_k \in U_k$ für ein k . Da B unendlich ist, gibt es ein n_0 , so dass B mindestens k Elemente kleiner n_0 enthält, somit taucht c in $U_{\varphi_B(n)}$ für alle $n \geq n_0$ auf.

Wenn B und C unendlich sind, können wir zu $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{P}$ und $g: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{Q}$ daher eine Abbildung

$$f \wedge_{B,C} g: \mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{P} \wedge_{B,C} \mathbb{Q}$$

definieren. Es gilt $\text{id}_{\mathbb{E}} \wedge_{B,C} \text{id}_{\mathbb{F}} = \text{id}_{\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}}$, und das naive reduzierte Produkt ist ebenfalls mit der Verkettung von Abbildungen verträglich. \square

Wenn B hingegen endlich ist, etwa $\#B = k$, und c eine Zelle, die in E_k bereits existiert, in U_k jedoch noch nicht, dann fehlt diese Zelle in $\mathbb{U} \wedge_{B,C} \mathbb{P}$. Also ist $\mathbb{U} \wedge_{B,C} \mathbb{P}$ nicht immer kofinal in $\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{P}$.

Abbildungen vom Grad ungleich 0 können wir noch nicht betrachten, denn seien $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{P}$ und $g: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{Q}$ vom Grad k beziehungsweise ℓ , dann erhielten wir

$$f_{\varphi_B(n)} \wedge g_{\varphi_C(n)}: E_{\varphi_B(n)} \wedge F_{\varphi_C(n)} \longrightarrow P_{\varphi_B(n)+k} \wedge Q_{\varphi_C(n)+\ell} ,$$

und die Räume rechts gehören unter Umständen nicht zum Spektrum $\mathbb{P} \wedge_{B,C} \mathbb{Q}$.

Wir fassen jetzt alle naiven Produkte in einem großen Spektrum zusammen. Die Konstruktion ähnelt dem Teleskop aus dem Beweis von Proposition 5.13, allerdings verwenden wir diesmal einen zweidimensionalen „Basisraum“. Zur Motivation: als n -ter Raum von $\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$ kommen alle Smash-Produkte $E_k \wedge F_\ell$ mit $k+\ell$ in Frage. Die Stabilisierungsabbildungen stellen zwischen diesen Räumen Beziehungen her. Wir können hier auch wieder Spektren mit $E_k \neq \text{pt}$ für $k < 0$ zulassen.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & E_{k-1} \wedge F_{\ell+1} & & & & \\ & & \uparrow \text{id} \wedge (-1)^{k-1} t_\ell & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & E_{k-1} \wedge F_\ell \wedge S^1 & \xrightarrow{s_{k-1} \wedge \text{id}} & E_k \wedge F_\ell & & \\ & & \uparrow \text{id} \wedge (-1)^{k-1} t_{\ell-1} & & \uparrow \text{id} \wedge (-1)^k t_{\ell-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & E_{k-1} \wedge F_{\ell-1} \wedge S^2 & \xrightarrow{s_{k-1} \wedge \text{id}} & E_k \wedge F_{\ell-1} \wedge S^1 & \xrightarrow{s_k \wedge \text{id}} & E_{k+1} \wedge F_{\ell-1} \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Dabei achten wir zunächst einmal nicht auf die genaue Reihenfolge der Faktoren in den einzelnen reduzierten Produkten. Mit $-t_\ell: F_\ell \wedge S^1 \rightarrow F_{\ell+1}$ bezeichnen wir wieder die Abbildung $y \wedge t \mapsto t_\ell(y \wedge (1-t))$.

Wir können sowohl in horizontaler als auch in vertikaler Richtung Teleskope bilden, die sich an den Ecken des Diagramms überschneiden. Dazu betrachten wir

$$\left(\bigvee_{k+\ell \leq n} (\{(k, \ell)\}_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^{n-k-\ell}) \vee \bigvee_{k+\ell \leq n-1} ([k, k+1]_+ \wedge \{\ell\}_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^{n-k-\ell}) \right. \\ \left. \vee \bigvee_{k+\ell \leq n-1} (\{k\}_+ \wedge [\ell, \ell+1]_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^{n-k-\ell}) \right) / \sim ,$$

dabei verkleben wir an den unteren Enden der Intervalle mit der Identität. Mit $S^{n-k-\ell} = S^1 \wedge S^{n-k-\ell-1}$ verkleben wir an den oberen Enden via

$$[k, k+1]_+ \wedge \{\ell\}_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^1 \wedge S^{n-k-\ell-1} \ni (k+1, \ell, x, y, u, z) \\ \sim (k+1, \ell, s(x, u), y, z) \in \{(k+1, \ell)\}_+ \wedge E_{k+1} \wedge F_\ell \wedge S^{n-k-\ell-1} \quad (7.1)$$

und

$$\{k\}_+ \wedge [\ell, \ell+1]_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^1 \wedge S^{n-k-\ell-1} \ni (k, \ell+1, x, y, u, z) \\ \sim (k, \ell+1, x, t(y, (-1)^k u), z) \in \{(k, \ell+1)\}_+ \wedge E_k \wedge F_{\ell+1} \wedge S^{n-k-\ell-1} . \quad (7.2)$$

Dadurch entstehen über den Quadraten $(k, k+1) \times (\ell, \ell+1)$ „Löcher“, die wir als nächstes stopfen wollen. Wir verschieben zunächst den Punkt $(k, \ell, x, y, u, v, z) \in \{(k, \ell)\}_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^1 \wedge S^1 \wedge S^{n-k-\ell-2}$ mit $k+\ell \leq n-2$ zunächst nach oben, dann nach rechts, und erhalten

$$(k, \ell, x, y, u, v, z) \mapsto (k, \ell+1, x, t(y, (-1)^k u), v, z) \mapsto (k+1, \ell+1, s(x, v), t(y, (-1)^k u), z) .$$

Umgekehrt verschieben wir $(k, \ell, x, y, v, -u, z) \in \{(k, \ell)\}_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^1 \wedge S^1 \wedge S^{n-k-\ell-2}$ zunächst nach rechts, dann nach oben, und erhalten wieder

$$(k, \ell, x, y, v, -u, z) \mapsto (k+1, \ell, s(x, v), y, -u, z) \mapsto (k+1, \ell+1, s(x, v), t(y, (-1)^k u), z) .$$

Wir können also nicht ganz naiv den Raum $[k, k+1]_+ \wedge [\ell, \ell+1]_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^{n-k-\ell}$ einkleben, sondern müssen die Koordinaten (u, v) von $S^2 = S^1 \wedge S^1$ beim Einkleben entlang $\partial([k, k+1] \times [\ell, \ell+1])$ um $\frac{\pi}{2}$ rotieren lassen. Dazu ersetzen wir $[k, k+1]_+ \wedge [\ell, \ell+1]_+ \wedge S^2$ durch den Thom-Raum MV eines festen zweidimensionalen reellen Vektorbündels $V \rightarrow I^2$. Welches wir wählen, ist egal, allerdings wählen wir über jedem Quadrat das gleiche. An dieser Stelle zeigt sich die Bedeutung der Vorzeichen in Definition 7.21 und (7.1), (7.2) — ohne sie würde sich beim Umlaufen um $\partial([k, k+1] \times [\ell, \ell+1])$ die Orientierung der S^2 ändern, und wir könnten nichts passendes einkleben.

Um die Notation zu vereinfachen, sei $e_{k, \ell}$ eine der Zellen $\{(k, \ell)\}$, $[k, k+1] \times \{\ell\}$, $\{k\} \times [\ell, \ell+1]$ oder $[k+1] \times [\ell+1]$ mit unterer linker Ecke (k, ℓ) , und d sei ihre Dimension. Wir betrachten also die Räume

$$P_n = \left(\bigvee_{\substack{e_{k, \ell} \\ k+\ell+d \leq n}} MV \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^{n-k-\ell-d} \right) / \sim , \quad (7.3)$$

wobei $V \rightarrow e_{k, \ell}$ jetzt ein d -dimensionales Vektorbündel sei. Als Stabilisierungsabbildungen wählen wir die Inklusionen $P_n \wedge S^1 \hookrightarrow P_{n+1}$, und haben ein Spektrum $\mathbb{P} = \mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$ definiert.

7.24. PROPOSITION. *Seien $B, C \subset \mathbb{N}$ disjunkte Teilmengen. Dann gibt es in den folgenden drei Fällen natürliche \mathcal{SHCW}_0 -Isomorphismen $\eta_{B, C}: \mathbb{E} \wedge_{B, C} \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$.*

- (1) Die Mengen B, C sind beide unendlich.
- (2) Die Menge B ist endlich, C ist unendlich, und $SE_k \cong E_{k+1}$ für alle $k \geq \#B$.
- (3) Die Menge B ist unendlich, C ist endlich, und $SF_\ell \cong F_{\ell+1}$ für alle $\ell \geq \#C$.

BEWEIS. Es sei \mathbb{G} ein Spektrum und \mathbb{TG} das Teleskop mit

$$TG_n = G_n \times \{n\} \vee \bigvee_{m=-\infty}^{n-1} S^{n-m} G_m \wedge [m, m+1]_+ / \sim .$$

Das Teleskop ist funktoriell, denn sei $g: \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{P}$ gegeben und auf einem kofinalen Unterspektrum $\mathbb{U} \subset \mathbb{G}$ strikt. Wir konstruieren Tg auf einem kofinalen Unterspektrum $\mathbb{V} \subset \mathbb{TG}$ Zelle für Zelle durch Induktion über die Schichtfiltrierung. Sei etwa c eine Zelle, die in E_k und in U_ℓ jeweils erstmalig auftritt, dann ist sie an Zellen angeklebt, die in E_k und U_ℓ bereits vorhanden sind. Dann nehmen wir die Zelle c über $[k, n]$ für alle $n \geq \ell$ zu $V_n \subset TG_n$ hinzu. Da g_n auf c für alle $n \geq \ell$ definiert ist, können wir $Tg: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{TP}$ definieren.

Es bezeichne $\pi_n: TG_n \rightarrow G_n \times \{n\}$ die offensichtliche Projektion; sie ist eine Deformationsretraktion vermöge einer Teleskophomotopie wie im Beweis von Satz 1.93, und liefert eine strikte Homotopieäquivalenz $\pi: \mathbb{TG} \rightarrow \mathbb{G}$. Wir konstruieren eine Homotopieinverse $f: \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{TG}$. Sei dazu c eine j -Zelle, die erstmals in G_n auftritt, mit charakteristischer Abbildung $\Phi: S^{n+j-1} \rightarrow G_n$. Alle Zellen im Rand von c trete ebenfalls spätestens in G_n auf, somit ist $f \circ \varphi: S^{n+j-1} \rightarrow TG_n$ bereits definiert, und wir nehmen an, dass $\pi_n \circ f \circ \varphi$ zur Anklebeabbildung $\varphi: S^{n+j-1} \rightarrow G_n \times \{n\}$ homotop ist. Da (D^{n+j}, S^{n+j-1}) eine Kofaserung ist, können wir diese Homotopie zu einer Homotopie von Φ fortsetzen, und erhalten so eine Fortsetzung von f auf c . Die so konstruierte Abbildung f ist dann sogar eine strikte Homotopieäquivalenz. Mit einem ähnlichen Argument sieht man, dass für alle $g: \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{P}$ das folgende Diagramm bis auf Homotopie kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G} & \xrightarrow{g} & \mathbb{P} \\ f \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \mathbb{TG} & \xrightarrow{Tg} & \mathbb{TP} . \end{array}$$

Als nächstes definieren wir $\gamma: \mathbb{T}(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$. Es beschreibe $(r(t), s(t)) \in \mathbb{R}^2$ den Zickzackpfad mit $r(\varphi_{B \cup C}(n)) = \varphi_B(n)$ und $s(\varphi_{B \cup C}(n)) = \varphi_C(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $(r, s)|_{[m, m+1]}$ für alle m linear sei. Es sei $k = \varphi_B(m)$ und $\ell = \varphi_C(m)$ mit $k + \ell \leq n$. Dann definieren wir γ_n auf

$$[k + \ell, k + \ell + 1]_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^{n-m} \subset TG_n$$

für $t \in [k + \ell, k + \ell + 1]$, $x \in E_k$, $y \in F_\ell$, $z \in S^{n-k-\ell}$ durch

$$\gamma_n(t, x, y, z) = (r(t), s(t), x, y, z) .$$

Diese stückweisen Definitionen legen γ_n stetig auf TG_n fest, und sind kompatibel mit Stabilisierung. Wir erhalten daher sogar eine strikte Abbildung $\gamma: \mathbb{T}(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$. Mit dem gleichen Argument wie in Proposition 7.23 ist diese Konstruktion unter den Bedingungen (1), (2) oder (3) natürlich.

Um zu zeigen, dass $\eta_{B,C} = \gamma \circ f: \mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$ eine stabile Homotopieäquivalenz ist, betrachten wir zunächst Bedingung (1). Wir konstruieren ein Unterspektrum $\mathbb{U} \subset \mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$, so dass $U_{k+\ell}$ für $k = \varphi_B(m)$, $\ell = \varphi_C(n)$ wie oben aus allen Zellen oberhalb von $(-\infty, k] \times (-\infty, \ell]$ besteht. Aufgrund der Bedingung (1) ist dieses Unterspektrum kofinal in $\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$. Der Raum $U_{k+\ell}$ enthält $\{(k, \ell)\}_+ \wedge E_k \wedge F_\ell$ als Deformationsretrakt. Ähnlich wie oben erhalten wir als Homotopieinverses von $\eta_{B,C}$ eine strikte Abbildung $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}$.

Im Fall (2) enthalte $U_{k+\ell}$ stattdessen alle Zellen oberhalb von $\mathbb{R} \times (-\infty, \ell]$, falls $k = \varphi_B(m) \geq \#B$. Dann ist \mathbb{U} wieder kofinal, und $U_{k+\ell}$ enthält $\{(k, \ell)\}_+ \wedge E_k \wedge F_\ell$ als Deformationsretrakt, da in allen E_r mit $r \geq k$ keine neuen Zellen hinzukommen. Der Fall (3) funktioniert analog. \square

7.25. BEMERKUNG. Aufgrund der Natürlichkeit von π und γ im vorangegangenen Beweis kommutiert für disjunkte Teilmengen $B, C, D \subset \mathbb{N}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge_{B \cup C, D} \mathbb{G} & \xleftarrow{\pi} & \mathbb{T}((\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge_{B \cup C, D} \mathbb{G}) & \xrightarrow{\gamma} & (\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G} \\
\uparrow \pi \wedge \text{id} & & \uparrow T(\pi \wedge \text{id}) & & \uparrow \pi \wedge \text{id} \\
(\mathbb{T}(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F})) \wedge_{B \cup C, D} \mathbb{G} & \xleftarrow{\pi} & \mathbb{T}((\mathbb{T}(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F})) \wedge_{B \cup C, D} \mathbb{G}) & \xrightarrow{\gamma} & (\mathbb{T}(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F})) \wedge \mathbb{G} \\
\downarrow \gamma \wedge \text{id} & & \downarrow T(\gamma \wedge \text{id}) & & \downarrow \gamma \wedge \text{id} \\
(\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge_{B \cup C, D} \mathbb{G} & \xleftarrow{\pi} & \mathbb{T}((\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge_{B \cup C, D} \mathbb{G}) & \xrightarrow{\gamma} & (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G} .
\end{array}$$

Wir werden später benutzen, dass dann das folgende Diagramm bis auf Homotopie kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge_{B \cup C, D} \mathbb{G} & \xrightarrow{\eta_{B \cup C, D}} & (\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G} \\
\eta_{B,C} \wedge \text{id} \downarrow & & \downarrow \eta_{B,C} \wedge \text{id} \\
(\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge_{B \cup C, D} \mathbb{G} & \xrightarrow{\eta_{B \cup C, D}} & (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G} .
\end{array}$$

Als nächstes erinnern wir uns an die Struktur einer monoidalen Kategorie aus Definition 4.26. Da wir hier zusätzlich eine Symmetrie zwischen $\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$ und $\mathbb{F} \wedge \mathbb{E}$ einführen wollen, benötigen wir natürliche *SHCW*-Isomorphismen

$$\begin{aligned}
& \alpha_{\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}}: (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge \mathbb{G}) , \\
& \tau_{\mathbb{E}, \mathbb{F}}: \mathbb{E} \wedge \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} , \quad \lambda_{\mathbb{E}}: \mathbb{S} \wedge \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E} \quad \text{und} \quad \rho_{\mathbb{E}}: \mathbb{E} \wedge \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{E} ,
\end{aligned}$$

die insgesamt acht Relationen zu erfüllen haben. Für die naiven reduzierten Produkte gibt es analoge Isomorphismen in *SCW*, die sogar strikt sind. Wir werden daher versuchen, die obigen *SHCW*-Isomorphismen so zu konstruieren, dass sie über die Abbildungen aus Proposition 7.24 mit den entsprechenden Isomorphismen naiver reduzierter Produkte verträglich sind.

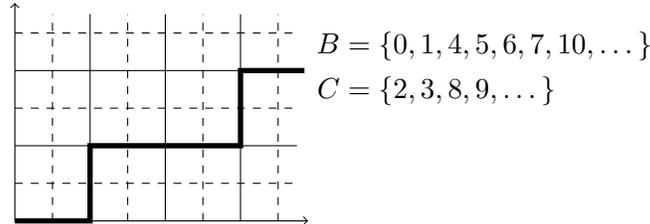
Wir erinnern uns an Beispiel 7.22 (1) und wählen für $\lambda_{\mathbb{E}}$ und $\rho_{\mathbb{E}}$ Homotopieinverse der Abbildungen

$$\eta_{\emptyset, \mathbb{N}}: \mathbb{E} = \mathbb{S} \wedge_{\emptyset, \mathbb{N}} \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{S} \wedge \mathbb{E} \quad \text{und} \quad \eta_{\mathbb{N}, \emptyset}: \mathbb{E} = \mathbb{E} \wedge_{\mathbb{N}, \emptyset} \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{E} \wedge \mathbb{S} .$$

Zur Konstruktion von $\tau_{\mathbb{E}, \mathbb{F}}$ überlegen wir uns zunächst, dass das reduzierte Produkt von Räumen nach Bemerkung 3.73 (2) kommutativ ist. Daher bestehen die naiven Produkte $\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}$ und $\mathbb{F} \wedge_{B,C} \mathbb{E}$ bis auf einen natürlichen Homöomorphismus aus den gleichen Räumen $E_{\varphi_B(n)} \wedge F_{\varphi_C(n)}$. Allerdings passen die Stabilisierungsabbildungen nicht unbedingt zusammen. Wenn etwa $\varphi_B(n+1) = \varphi_B(n) + 1$, betrachten wir

$$\begin{aligned}
& s_{\varphi_B(n)} \wedge \text{id}: SE_{\varphi_B(n)} \wedge F_{\varphi_C(n)} \longrightarrow E_{\varphi_B(n)+1} \wedge F_{\varphi_C(n)} \\
& \text{und} \quad \text{id} \wedge ((-1)^{\varphi_C(n)} s_{\varphi_B(n)}): F_{\varphi_C(n)} \wedge SE_{\varphi_B(n)} \longrightarrow F_{\varphi_C(n)} \wedge E_{\varphi_B(n)+1} .
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Wir müssen also vermeiden, dass $\varphi_C(n)$ ungerade ist, wenn $\varphi_B(n+1) = \varphi_B(n) + 1$.



Genauso vermeiden wir, dass $\varphi_B(n)$ ungerade ist, wenn $\varphi_C(n+1) = \varphi_C(n) + 1$, indem wir fordern, dass B und C von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen $2k, 2k+1 \in \mathbb{N}$ je entweder beide oder keines enthalten, denn dann verläuft unser Zickzackpfad immer je zwei Schritte in die gleiche Richtung. Unter dieser Bedingung erhalten wir einen strikten Isomorphismus $\tau_{B,C}: \mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F} \wedge_{C,B} \mathbb{E}$.

7.26. PROPOSITION. *Zu je zwei Spektren \mathbb{E} und \mathbb{F} gibt es ein Spektrum \mathbb{Q} und stabile Homotopieäquivalenzen $\iota_0: \mathbb{E} \wedge \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{Q}$ und $\iota_1: \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{Q}$ vom Grad 0, so dass für alle disjunkten Teilmengen $B, C \subset \mathbb{N}$, von denen jede für jedes $k \in \mathbb{N}$ jeweils entweder alle vier Zahlen $4k, 4k+1, 4k+2$ und $4k+3$ enthält oder keine von ihnen, das folgende Diagramm bis auf stabile Homotopie kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) & \longrightarrow & \mathbb{E} \wedge \mathbb{F} \\ \downarrow T\tau_{B,C} & & \searrow \iota_0 \\ \mathbb{T}(\mathbb{F} \wedge_{C,B} \mathbb{E}) & \longrightarrow & \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \iota_1 \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

Dann können wir $\tau_{\mathbb{E},\mathbb{F}} = \iota_1^{-1} \circ \iota_0 \in [\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}, \mathbb{F} \wedge \mathbb{E}]_0$ definieren.

BEWEIS. Wir konstruieren \mathbb{Q} als Zylinder von zweidimensionalen Teleskopen, betrachten in Q_n also Zellen über $[k, k+1] \times [\ell, \ell+1] \times I$ mit $k+\ell \leq n-2$. Für $r=0 \in I$ fügen wir eine Kopie von $\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$ ein, und für $r=1 \in I$ eine Kopie von $\mathbb{F} \wedge \mathbb{E}$, bei der die Rollen von k und ℓ vertauscht sind. Aufgrund der Vorzeichenwahlen in (7.1), (7.2) können wir für $2i+2j \leq n-2$ Zylinder der Form

$$[2i, 2i+2]_+ \wedge \{2j\}_+ \wedge I_+ \wedge E_{2i} \wedge F_{2j} \wedge S^{n-2i-2j} \quad \text{und} \quad \{2i\}_+ \wedge [2j, 2j+2]_+ \wedge I_+ \wedge E_{2i} \wedge F_{2j} \wedge S^{n-2i-2j}$$

einkleben, wobei E_{2i} und F_{2j} bei $r=1$ formal die Plätze tauschen.

Über dem Rand des Quaders $e = [2i, 2i+2] \times [2j, 2j+2] \times I$ für $2i+2j \leq n-4$ erhalten wir dadurch den Raum

$$MV' \wedge E_{2i} \wedge F_{2j} \wedge S^{n-2i-2j-4},$$

dabei ist MV' der Thom-Raum eines vierdimensionalen Vektorbündels $V' \rightarrow \partial e \cong S^2$, klassifiziert durch $\alpha \in \pi_2(BSO(4)) \cong \pi_1(SO(4)) \cong \mathbb{Z}/2$, siehe Satz 3.98 und Bemerkung 6.48 (3). Diese Bündel hängt nicht von n, i und j ab, sondern nur von der obigen Wahl von $V \rightarrow I^2$.

Wenn wir zu größeren Quadern $e' = [4i, 4i+4] \times [4j, 4j+4] \times I$ für $4i+4j \leq n-8$ übergehen, wird das analog konstruierte achtdimensionale Vektorbündel $V'' \rightarrow \partial e'$ durch $4\alpha = 0$ klassifiziert, lässt sich also auf e' fortsetzen. Wir fixieren eine solche Fortsetzung $W \rightarrow e$ und kleben den Raum

$$MW \wedge E_{4i} \wedge F_{4j} \wedge S^{n-4i-4j-8}$$

entsprechend ein.

Mit Lemma 6.37 erhalten wir die gesuchten Homotopieäquivalenzen ι_0 und ι_1 , definiert jeweils auf dem kofinalen Unterspektrum von $\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$ beziehungsweise $\mathbb{F} \wedge \mathbb{E}$, das jeweils nur aus Quadraten $[4i, 4i+4] \times [4j, 4j+4]$ und den Räumen E_{4i} und F_{4j} aufgebaut wurde. Aufgrund unserer Bedingung an die Mengen B und C reicht das, um die horizontalen Pfeile im obigen Diagramm zu erhalten. Da wir über den Intervallen $[4i, 4i+4] \times \{4j\}$ und $\{4i\} \times [4j, 4j+4]$ triviale Zylinder gebildet haben, kommutiert das obige Diagramm. \square

Es seien $B, C, D \subset \mathbb{N}$ paarweise disjunkte Teilmengen. Das reduzierte Produkt von Räumen ist nach Bemerkung 3.73 (2) bis auf einen natürlichen Homöomorphismus assoziativ. Wir erhalten Abbildungen

$$\alpha_{B,C,D}: (E_{\varphi_B(n)} \wedge F_{\varphi_C(n)}) \wedge G_{\varphi_D(n)} \cong E_{\varphi_B(n)} \wedge (F_{\varphi_C(n)} \wedge G_{\varphi_D(n)}).$$

Nach Konstruktion der naiven reduzierten Produkte liefern diese zusammen einen strikten Isomorphismus der Spektren $(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge_{B \cup C, D}$ und $\mathbb{E} \wedge_{B, C \cup D} (\mathbb{F} \wedge_{C, D})$, dazu überprüft man Verträglichkeit mit den Vorzeichen in (7.1) und (7.2).

7.27. PROPOSITION. Für alle Spektren $\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}$ existiert ein Spektrum \mathbb{P} und Homotopieäquivalenzen $\iota_0: \mathbb{P} \rightarrow (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G}$, und $\iota_1: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge \mathbb{G})$, so dass für alle Tripel paarweise disjunkter Teilmengen $B, C, D \subset \mathbb{N}$ mit $\#(B \cup C) = \#(C \cup D) = \infty$ das folgende Diagramm bis auf Homotopie kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G} & \xleftarrow{\pi \wedge \text{id}} & (\mathbb{T}(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F})) \wedge \mathbb{G} & \xrightarrow{\gamma \wedge \text{id}} & (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G} \\
\eta_{B \cup C, D} \uparrow & & \uparrow \gamma'_0 & & \uparrow \sim \iota_0 \\
(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge_{B \cup C, D} \mathbb{G} & \xleftarrow{\pi} & \mathbb{T}((\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge_{B \cup C, D} \mathbb{G}) & & \mathbb{P} \\
\alpha_{B,C,D} \downarrow & & T\alpha_{B,C,D} \downarrow & \nearrow \kappa_0 & \\
\mathbb{E} \wedge_{B, C \cup D} (\mathbb{F} \wedge_{C, D} \mathbb{G}) & \xleftarrow{\pi} & \mathbb{T}(\mathbb{E} \wedge_{B, C \cup D} (\mathbb{F} \wedge_{C, D} \mathbb{G})) & \searrow \kappa_1 & \\
\eta_{B, C \cup D} \downarrow & & \downarrow \gamma'_1 & & \downarrow \sim \iota_1 \\
\mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge_{C, D} \mathbb{G}) & \xleftarrow{\text{id} \wedge \pi} & \mathbb{E} \wedge (\mathbb{T}(\mathbb{F} \wedge_{C, D} \mathbb{G})) & \xrightarrow{\text{id} \wedge \gamma} & \mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge \mathbb{G}) .
\end{array}$$

BEWEIS. Das Produkt $\mathbb{K} = (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G}$ besteht aus vierdimensionalen Teleskopen der Form

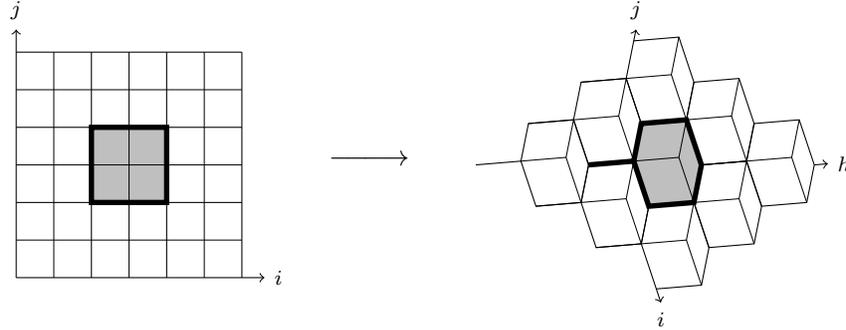
$$\begin{aligned}
K_n &= \left(\bigvee_{e_{i,j}, e_{h,k}} MW \wedge (MV \wedge E_i \wedge F_j \wedge S^{h-i-j-d}) \wedge G_k \wedge S^{n-h-k-\delta} \right) / \sim \\
&\cong \left(\bigvee_{e_{i,j}, e_{h,k}} M(V \boxplus W) \wedge E_i \wedge F_j \wedge G_k \wedge S^{n-i-j-k-d-\delta} \right) / \sim . \quad (7.5)
\end{aligned}$$

Hierbei sind $e_{i,j}, e_{h,k}$ wieder Zellen der Dimensionen $d, \delta \leq 2$ mit unterer linker Ecke (i, j) beziehungsweise (h, k) , wobei $i + j + d \leq h \leq n - k - \delta$. Außerdem sind $V \rightarrow e_{i,j}$ und $W \rightarrow e_{h,k}$ wieder reelle Vektorbündel vom Rang d beziehungsweise δ . Verklebt sind die einzelnen Blöcke wie in (7.3).

Wir konstruieren \mathbb{P}' aus dreidimensionalen Teleskopen, indem wir die überflüssige Richtung h eliminieren. Dazu betrachten wir den Komplex $C_n^3 \subset \mathbb{R}^3$ bestehend aus Würfeln der Kantenlänge 1 mit ganzzahligen Koordinaten und alle ihren Seiten, so dass die Summe aller Koordinaten $\leq n$ bleibt. Wir definieren eine Abbildung $\vartheta = \varphi \otimes \text{id}: C_n^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, die die Faktoren in Richtung von k unverändert lässt, so dass

$$\begin{aligned}
\text{im}(\varphi|_{\{(i,j)\}}) &= \{(i, j, i+j)\} , \\
\text{im}(\varphi|_{[i, i+1] \times \{j\}}) &= \{(i, j)\} \times [i+j, i+j+1] \cup [i, i+1] \times \{(j, i+j+1)\} , \\
\text{im}(\varphi|_{\{i\} \times [j, j+1]}) &= \{(i, j)\} \times [i+j, i+j+1] \cup \{i\} \times [j, j+1] \times \{i+j+1\} , \\
\text{im}(\varphi|_{[i, i+1] \times [j, j+1]}) &= \{(i, j)\} \times [i+j, i+j+1] \cup [i, i+1] \times \{j\} \times [i+j+1, i+j+2] \\
&\quad \cup \{i\} \times [j, j+1] \times [i+j+1, i+j+2] \cup [i, i+1] \times [j, j+1] \times \{i+j+2\} .
\end{aligned}$$

Hierbei legt φ auf den Rändern jeder Zelle die Abbildung im Inneren bis auf Homotopie eindeutig fest, und wir können vereinbaren, dass φ auf den Zellen halber Kantenlänge affin ist.



Das Bild von ϑ enthält nur Zellen der Dimension ≤ 3 und ist ein Deformationsretrakt der K_n zugrunde liegenden Teilmenge $C_n^4 \subset \mathbb{R}^4$. Wir vergessen Basispunkte für den Moment, ersetzen die reduzierten Produkte in der Konstruktion von K_n durch kartesische Produkte und stellen uns den so erhaltenen Raum als „Bündel“ $\bar{K}_n \rightarrow C_n^4$ vor. Dann ist die Einschränkung dieses Bündels auf im ϑ ein Deformationsretrakt, denn wegen Lemma 6.37 sind die Vektorbündel V und W auf jeder Zelle trivial. Es bezeichne $\bar{P}_n = \vartheta^* \bar{K}_n$ den Rückzug dieses Bündels nach C_n^3 und $\bar{\iota}_0: \bar{P}_n \rightarrow K_n$ die zugehörige Einbettung. Da C_n^3 zusammenziehbar ist, ist auch $P_n = \bar{P}_n/C_n^3$ homotopieäquivalent zu K_n , und $\iota_0: P_n \rightarrow K_n$ ist eine Homotopieäquivalenz.

Wir betrachten die Struktur des Raumes P_n , dabei bezeichne $e_{i,j,k} \cong I^d$ eine Zelle der Dimension $0 \leq d \leq 3$ mit linker unterer Ecke (i, j, k) .

- (0) Über den Null-Zellen haben wir den Raum $E_i \wedge F_j \wedge G_k \wedge S^{n-i-j-k}$.
- (1) Über den Eins-Zellen betrachten wir die Räume $I_+ \wedge E_i \wedge F_j \wedge G_k \wedge S^{n-i-j-k}$, die wir wie in (7.1), (7.2) mit den korrekten Vorzeichen an die obigen Räume ankleben.
- (2) Über den Zwei-Zellen betrachten wir $MV \wedge E_i \wedge F_j \wedge G_k \wedge S^{n-i-j-k-2}$. Dabei entspricht das Bündel $V \rightarrow e_{i,j,k}$ entweder dem Bündel $V \rightarrow I^2$ in (7.5), falls $e_{i,j,k}$ in i - j -Richtung liegt, oder dem isomorphen Bündel $W \rightarrow I^2$ in den anderen Fällen.
- (3) Über jeder Drei-Zelle betrachten wir $MV \wedge E_i \wedge F_j \wedge G_k \wedge S^{n-i-j-k-3}$, dabei ist $V \rightarrow I^3$ jetzt ein reelles Bündel vom Rang 3. Da $\pi_3(BSO(3)) = \pi_2(SO(3)) = 0$, hängt dieses Bündel bis auf Isomorphie nur von seiner Einschränkung auf ∂I^3 ab.

Wenn wir anstelle $\mathbb{K} = (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G}$ das Spektrum $\mathbb{L} = \mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge \mathbb{G})$ betrachten, erhalten wir einen genauso konstruierten Raum. Daher können wir auch eine Homotopieäquivalenz $\iota_1: P_n \rightarrow L_n$ angeben.

Als nächstes konstruieren wir $\kappa_0: \mathbb{T}((\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge_{B \cup C, D} \mathbb{G}) \rightarrow \mathbb{P}$ analog zu γ im Beweis von Proposition 7.24. Die Verkettung $i_0 \circ \kappa_0$ faktorisiert in natürlicher Weise über $(\mathbb{T}(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F})) \wedge \mathbb{G}$, und wir erhalten die Abbildungen γ'_0 . Analog konstruieren wir κ_1 und γ'_1 . Man überprüft leicht, dass das obige Diagramm dann bis auf Homotopie kommutiert. \square

Der folgende Satz fasst die wichtigsten Eigenschaften des reduzierten Produktes zusammen.

7.28. SATZ. Die Kategorie $(\mathcal{SHCW}, \wedge, \mathbb{S})$ ist eine graduiert symmetrische monoidale Kategorie. Insbesondere ist das reduzierte Produkt ein graduiertes Bifunktor, das heißt, für komponierbare Abbildungen f, g, p und q vom Grad k, ℓ, m beziehungsweise n gilt

$$(g \wedge q) \circ (f \wedge p) = (-1)^{kn} (g \circ f) \wedge (q \circ p),$$

und es existieren natürliche Isomorphismen

$$\alpha_{\mathbb{E},\mathbb{F},\mathbb{G}}: (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge \mathbb{G}),$$

$$\tau: \mathbb{E} \wedge \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F} \wedge \mathbb{E}, \quad \lambda: \mathbb{S} \wedge \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E} \quad \text{und} \quad \rho: \mathbb{E} \wedge \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{E},$$

so dass die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} ((\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G}) \wedge \mathbb{H} & \xrightarrow{\alpha_{\mathbb{E},\mathbb{F},\mathbb{G}} \wedge \text{id}_{\mathbb{H}}} & (\mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge \mathbb{G})) \wedge \mathbb{H} \\ \alpha_{\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}, \mathbb{G}, \mathbb{H}} \swarrow & & \downarrow \alpha_{\mathbb{E}, \mathbb{F} \wedge \mathbb{G}, \mathbb{H}} \\ (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge (\mathbb{G} \wedge \mathbb{H}) & & \mathbb{E} \wedge ((\mathbb{F} \wedge \mathbb{G}) \wedge \mathbb{H}) \\ \alpha_{\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G} \wedge \mathbb{H}} \searrow & \xleftarrow{\text{id}_{\mathbb{E}} \wedge \alpha_{\mathbb{F}, \mathbb{G}, \mathbb{H}}} & \mathbb{E} \wedge ((\mathbb{F} \wedge \mathbb{G}) \wedge \mathbb{H}) \end{array} \quad (1)$$

$$\mathbb{E} \wedge \mathbb{F} \xrightarrow{\tau_{\mathbb{E},\mathbb{F}}} \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \xrightarrow{\tau_{\mathbb{F},\mathbb{E}}} \mathbb{E} \wedge \mathbb{F},$$

$$\text{id}_{\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}}$$

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{F} \wedge \mathbb{E}) \wedge \mathbb{G} & \xrightarrow{\alpha_{\mathbb{F},\mathbb{E},\mathbb{G}}} & \mathbb{F} \wedge (\mathbb{E} \wedge \mathbb{G}) \\ \tau_{\mathbb{E},\mathbb{F}} \wedge \text{id}_{\mathbb{G}} \nearrow & & \text{id}_{\mathbb{F}} \wedge \tau_{\mathbb{E},\mathbb{G}} \searrow \\ (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G} & & \mathbb{F} \wedge (\mathbb{G} \wedge \mathbb{E}) \\ \alpha_{\mathbb{E},\mathbb{F},\mathbb{G}} \searrow & & \alpha_{\mathbb{F},\mathbb{G},\mathbb{E}} \nearrow \\ \mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge \mathbb{G}) & \xrightarrow{\tau_{\mathbb{E},\mathbb{F} \wedge \mathbb{G}}} & (\mathbb{F} \wedge \mathbb{G}) \wedge \mathbb{E} \end{array} \quad (3)$$

$$(\mathbb{S} \wedge \mathbb{E}) \wedge \mathbb{F} \xrightarrow{\alpha_{\mathbb{S},\mathbb{E},\mathbb{F}}} \mathbb{S} \wedge (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \xrightarrow{\lambda_{\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}}} \mathbb{E} \wedge \mathbb{F},$$

$$\lambda_{\mathbb{E}} \wedge \text{id}_{\mathbb{F}}$$

$$(\mathbb{E} \wedge \mathbb{S}) \wedge \mathbb{F} \xrightarrow{\alpha_{\mathbb{E},\mathbb{S},\mathbb{F}}} \mathbb{E} \wedge (\mathbb{S} \wedge \mathbb{F}) \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{E}} \wedge \lambda_{\mathbb{F}}} \mathbb{E} \wedge \mathbb{F},$$

$$\rho_{\mathbb{E}} \wedge \text{id}_{\mathbb{F}}$$

$$(\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{S} \xrightarrow{\alpha_{\mathbb{E},\mathbb{F},\mathbb{S}}} \mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge \mathbb{S}) \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{E}} \wedge \rho_{\mathbb{F}}} \mathbb{E} \wedge \mathbb{F},$$

$$\rho_{\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}}$$

$$\mathbb{S} \wedge \mathbb{E} \xrightarrow{\tau_{\mathbb{S},\mathbb{E}}} \mathbb{E} \wedge \mathbb{S} \xrightarrow{\rho_{\mathbb{E}}} \mathbb{E},$$

$$\lambda_{\mathbb{E}}$$

$$\mathbb{S} \wedge \mathbb{S} \xrightarrow{\tau_{\mathbb{S},\mathbb{S}}} \mathbb{S} \wedge \mathbb{S}.$$

$$\text{id}_{\mathbb{S} \wedge \mathbb{S}}$$

Üblicherweise werden diese acht Kohärenzbedingungen gemeinsam aufgeführt. Nach einem Satz von Mac Lane folgen alle anderen Kohärenzen (wenn sie denn gelten) aus den obigen. Allerdings braucht man von den Aussagen (4) und (6) nur eine.

BEWEIS. Aus den Proposition 7.23 und 7.24 folgt die Natürlichkeit des reduzierten Produktes unter Abbildungen vom Grad 0. Mit den Propositionen 7.24–7.27 können wir jede der Bedingungen (1)–(7) durch eine äquivalente Bedingung an naive Produkte ersetzen. Dazu wählen wir für jedes am Diagramm beteiligte Spektrum eine Teilmenge von \mathbb{N} mit folgenden Nebenbedingungen.

- Wenn ein Sphärenspektrum \mathbb{S} zusammen mit λ oder ρ auftritt, ordnen wir ihm stets die leere Menge zu, alle anderen Teilmengen seien unendlich.
- Jede Teilmenge enthalte für jedes $k \in \mathbb{N}$ entweder alle vier Zahlen $4k, \dots, 4k + 3$ oder keine von ihnen.
- Alle Teilmengen für ein festes Diagramm seien paarweise disjunkt.

Anschließend überprüfen wir, dass das so erhaltene Diagramm naiver Produkte strikt kommutiert. Nur Bedingung (8) überprüfen wir von Hand in Übung 7.64.

Es bleibt das Verhalten unter Abbildungen von verschiedenen Graden zu prüfen (später). \square

7.d. Ringspektren und Produkte

Wir benutzen das soeben eingeführte reduzierte Produkt von Spektra, um Produkte wie in den Propositionen 6.21 und Definition 6.23 zu formalisieren. Dadurch erhalten wir automatisch Stabilitätseigenschaften analog zu Proposition 6.21 (3).

7.29. DEFINITION. Ein *Ringspektrum* $(\mathbb{E}, \mu, \varepsilon)$ besteht aus einem Spektrum \mathbb{E} , einer *Multiplikation* $\mu: \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ und einer *Einheitsabbildung* $\varepsilon: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{E}$, so dass die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} & \xrightarrow{\mu \wedge \text{id}} & \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \\ \text{id} \wedge \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{E} \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{S} \wedge \mathbb{E} & \xrightarrow{\varepsilon \wedge \text{id}} & \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} & \xleftarrow{\varepsilon \wedge \text{id}} & \mathbb{E} \wedge \mathbb{S} \\ & \searrow \lambda & \downarrow \mu & \swarrow \rho & \\ & & \mathbb{E} & & \end{array} \quad (2)$$

in SHCW_0 kommutieren. Es heißt (*graduirt*) *kommutativ*, wenn auch das folgende Diagramm kommutiert:

$$\mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \xrightarrow{\tau} \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \xrightarrow{\mu} \mathbb{E} \quad (3)$$

Ein (*Rechts-*) *Modulspektrum* (\mathbb{F}, ν) über einem Ringspektrum $(\mathbb{E}, \mu, \varepsilon)$ besteht aus einem Spektrum \mathbb{F} und einer Multiplikation $\nu: \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$, so dass die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} & \xrightarrow{\nu \wedge \text{id}} & \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \\ \text{id} \wedge \mu \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} & \xrightarrow{\nu} & \mathbb{F} \end{array} \quad (4)$$

$$\mathbb{F} \wedge \mathbb{S} \xrightarrow{\text{id} \wedge \varepsilon} \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \xrightarrow{\nu} \mathbb{F} \quad (5)$$

in SHCW_0 kommutieren. Analog definiert man Linksmodulspektren über $(\mathbb{E}, \mu, \varepsilon)$.

Wir nehmen also wieder an, dass alle Ringspektren eine Eins haben, die auf allen Modulspektren durch die Identität wirkt. Im Folgenden schreiben wir kurz \mathbb{E} oder \mathbb{F} für Ring- beziehungsweise Modulspektren, wenn Multiplikation und Einheitsabbildung klar sind.

7.30. BEMERKUNG. Wenn wir Multiplikationsabbildungen $\mu_{k,\ell}: E_k \rightarrow E_\ell \rightarrow E_{k+\ell}$ und $\varepsilon_k: S^k \rightarrow E_k$ angeben können, die (1) und (2) im Sinne „naiver“ Produkte sowie die Stabilitätsbedingung

$$\mu_{k+1,\ell} \circ (s_k \wedge \text{id}_{F_\ell}) = s_{k+\ell} \circ S\mu_{k,\ell} = \mu_{k,\ell+1} \circ (\text{id}_{E_k} \wedge (-1)^k s_\ell)$$

für alle k und ℓ erfüllen, erhalten wir die obigen Abbildungen μ und ε sogar strikt wie in Übung 7.63 und haben ein Ringspektrum konstruiert.

Dabei tritt an Stelle von (3) die Bedingung

$$\mu_{\ell,k} = \mu_{k,\ell} \circ \tau_{\ell,k}.$$

Man beachte, dass $\tau_{k,\ell}: E_k \wedge E_\ell \rightarrow E_\ell \wedge E_k$ der natürlichen Abbildung aus Bemerkung 3.73 (2) nur bis auf das Vorzeichen $(-1)^{k\ell}$ entspricht; dies ergibt sich aus (7.4) und der obigen Stabilitätsbedingung. Daher sind kommutative Ringspektren in Wirklichkeit nur graduiert kommutativ.

Um ein Modulspektrum zu konstruieren, benötigen wir entsprechend Abbildungen $\nu_{k,\ell}: E_k \wedge F_\ell \rightarrow F_{k+\ell}$, die (4) und (5) im „naiven“ Sinne erfüllen.

7.31. BEISPIEL. Wir kennen bereits einige Ring- und Modulspektren.

- (1) Das Sphärenspektrum ist ein Ringspektrum, dabei ist $\mu_{k,\ell}: S^k \wedge S^\ell \rightarrow S^{k+\ell}$ der natürliche Homöomorphismus. Das Sphärenspektrum ist kommutativ, siehe Satz 7.28 8 und Übung 7.64. Jedes Spektrum \mathbb{E} ist ein Modulspektrum über \mathbb{S} mit $\nu = \lambda$.
- (2) Das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum $\mathbb{H}R$ über einem Ring R aus Abschnitt 5.d ist ein Ringspektrum, siehe Übung 7.65. Dabei sind Multiplikation und Einheitsabbildung von $\mathbb{H}R$ durch die Multiplikation und die Eins in R festgelegt. Es ist kommutativ, wenn R kommutativ ist, siehe Übung 7.66. Sei A ein Links- R -Modul, dann ist $\mathbb{H}A$ ein Linksmodulspektrum über $\mathbb{H}R$.
- (3) Zur reellen und komplexen K -Theorie gehören die Ringspektren \mathbb{K} und $\mathbb{K}\mathbb{O}$, siehe Bemerkung 6.49. Das Spektrum $\mathbb{K}Sp \cong \Sigma^4 \mathbb{K}\mathbb{O}$ zur quaternionischen K -Theorie ist ein $\mathbb{K}\mathbb{O}$ -Modulspektrum.
- (4) Die Thom-Spektren MO , MU , $M\mathbb{S}O$ zu den diversen Bordismus- und Kobordismusfunktoren sind ebenfalls Ringspektren.

7.32. BEMERKUNG. Es sei $(\mathbb{E}, \mu, \varepsilon)$ ein Ringspektrum und \mathbb{F} ein beliebiges Spektrum, dann ist $(\mathbb{F} \wedge \mathbb{E}, \text{id} \wedge \mu)$ ein Rechtsmodulspektrum über \mathbb{E} nach Übung 7.67. Insbesondere ist $\mathbb{E} \cong \mathbb{S} \wedge \mathbb{E} \cong \mathbb{E} \wedge \mathbb{S}$ selbst sowohl Links- als auch Rechtsmodulspektrum über sich selbst.

Als Beispiel für \mathbb{F} können wir das Moore-Spektrum $\mathbb{M}A$ zu einer abelschen Gruppe A aus Definition 5.68 wählen. Auf diese Weise erhalten wir \mathbb{E} -Homologie und -Kohomologie mit Koeffizienten in A , siehe Definition 5.71 und Bemerkung 7.17 (3), (4).

Im Folgenden können wir jederzeit (\mathbb{F}, ν) durch (\mathbb{E}, μ) , aufgefasst als Rechtsmodulspektrum, ersetzen.

7.33. DEFINITION. Es sei $(\mathbb{E}, \mu, \varepsilon)$ ein Ringspektrum und (\mathbb{F}, ν) ein Rechts- \mathbb{E} -Modulspektrum. Dann definieren wir zwei externe Produkte, das Smash-Produkt $\wedge: \tilde{F}^k(X) \times \tilde{E}^\ell(Y) \rightarrow \tilde{F}^{k+\ell}(X \wedge Y)$ und das Schräg-Produkt $/: \tilde{F}_{k+\ell}(X \wedge Y) \times \tilde{E}^k(X) \rightarrow \tilde{F}_\ell(Y)$ für alle $\alpha \in [\mathbb{S}X, \mathbb{F}]_{-k} = \tilde{F}^k(X)$, $\beta \in [\mathbb{S}Y, \mathbb{E}]_{-\ell} = \tilde{E}^\ell(Y)$, $\gamma \in [\mathbb{S}X, \mathbb{E}]_{-k} = \tilde{E}^k(X)$ und $b \in [\mathbb{S}, \mathbb{F} \wedge X \wedge Y]_{k+\ell} = \tilde{F}_{k+\ell}(X \wedge Y)$ durch

$$\alpha \wedge \beta: \mathbb{S} \wedge X \wedge Y \cong \mathbb{S} \wedge X \wedge \mathbb{S} \wedge Y \xrightarrow{\alpha \wedge \beta} \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \xrightarrow{\nu} \mathbb{F} \quad (1)$$

$$\text{und} \quad b/\gamma: \mathbb{S} \xrightarrow{b} \mathbb{F} \wedge X \wedge Y \cong \mathbb{F} \wedge \mathbb{S} \wedge X \wedge Y \xrightarrow{\text{id} \wedge \gamma \wedge \text{id}} \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \wedge Y \xrightarrow{\nu \wedge \text{id}} \mathbb{F} \wedge Y. \quad (2)$$

Im Fall von ω -Spektren entsprechen die obigen Definitionen genau der vorläufigen Beschreibung am Anfang von Abschnitt 7.c. Aus der Konstruktion der zellulären externen Produkte in Abschnitt 6.e kann man schließen, dass die obigen Produkte mit denen aus Proposition 6.21 übereinstimmen. Wie immer erhalten wir unreduzierte Varianten, indem wir X und Y durch X_+ und Y_+ ersetzen.

Wegen Satz 7.28 (5) ist es in (1) und (2) unerheblich, wie wir das neutrale Element \mathbb{S} des reduzierten Produktes einfügen. Genauso ist es wegen Satz 7.28 (1) unerheblich, wie wir in (2) klammern.

7.34. PROPOSITION. *Die externen Produkte sind natürlich und haben für alle $\alpha \in [\mathbb{S}X, \mathbb{F}]_{-k}$, $\beta \in [\mathbb{S}Y, \mathbb{E}]_{-\ell}$, $\gamma \in [\mathbb{S}Z, \mathbb{E}]_{-m}$ und alle $a \in [\mathbb{S}, \mathbb{F} \wedge X]$, $b \in [\mathbb{S}, \mathbb{F} \wedge Y \wedge X]_{k+\ell}$, $c \in [\mathbb{S}, \mathbb{F} \wedge Y \wedge Z \wedge X]$ die folgenden Eigenschaften.*

(1) Assoziativität. *Es gilt*

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \in \tilde{F}^{k+\ell+m}(X \wedge Y \wedge Z)$$

und $(c/\beta)/\gamma = c/(\beta \wedge \gamma) \in \tilde{F}_k(X)$.

(2) Einselement. *Für das Element $1 = [\varepsilon] \in [\mathbb{S}, \mathbb{E}]_0$ gilt*

$$\alpha \wedge 1 = \alpha \in \tilde{F}^k(X), \quad 1 \wedge \beta = \beta \in \tilde{E}^\ell(Y)$$

und $a/1 = a \in \tilde{F}_k(X)$.

(3) Stabilität. *Für die Stabilisierungs-Isomorphismen σ gilt*

$$(\sigma\alpha) \wedge \beta = \sigma(\alpha \wedge \beta) = (-1)^k \alpha \wedge (\sigma\beta) \in \tilde{F}^{k+\ell+1}(S(X \wedge Y)),$$

$(\sigma b)/(\sigma\beta) = b/\beta \in \tilde{F}_k(X)$ und $(\sigma b)/\beta = (-1)^k \sigma(b/\beta) \in \tilde{F}_{k+1}(X)$.

(4) Transposition. *Es sei $t: X \wedge Y \rightarrow Y \wedge X$ die Transpositionsabbildung. Wenn \mathbb{E} kommutativ ist, dann gilt*

$$t^*(\beta \wedge \gamma) = (-1)^{\ell m} \gamma \wedge \beta.$$

BEWEIS. Zur Natürlichkeit nutzen wir aus, dass das reduzierte Produkt von Spektren ein graduierter Bifunktor ist. Es seien $f: U \rightarrow X$ und $g: V \rightarrow Y$ stetig. Dann ist $(f^*\alpha) \wedge (g^*\beta) = (f \wedge g)^*(\alpha \wedge \beta)$ definiert durch

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{S} \wedge U \wedge V & \xleftarrow[\cong]{\text{id} \wedge \text{id} \wedge \lambda} & \mathbb{S} \wedge U \wedge \mathbb{S} \wedge V & & \\ \text{id} \wedge f \wedge g \downarrow & & \downarrow \text{id} \wedge f \wedge \text{id} \wedge g & & \\ \mathbb{S} \wedge X \wedge Y & \xleftarrow[\cong]{\text{id} \wedge \text{id} \wedge \lambda} & \mathbb{S} \wedge X \wedge \mathbb{S} \wedge Y & \xrightarrow{\alpha \wedge \beta} & \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \xrightarrow{\nu} \mathbb{F}. \end{array}$$

Für $x \in [\mathbb{S}, \mathbb{F} \wedge V \wedge U]_{k+\ell}$ wird $f_*(x/g^*\beta) = ((g \wedge f)_*x)/\beta$ dargestellt durch

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{S} & \xrightarrow{x} & \mathbb{F} \wedge V \wedge U & \xrightarrow[\cong]{\rho^{-1} \wedge g \wedge \text{id}} & \mathbb{F} \wedge \mathbb{S} \wedge Y \wedge U & \xrightarrow{\text{id} \wedge \beta \wedge \text{id}} & \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \wedge U \xrightarrow{\nu \wedge \text{id}} \mathbb{F} \wedge U \\ \text{id} \wedge g \wedge f \downarrow & & \downarrow \text{id} \wedge \text{id} \wedge \text{id} \wedge f & & \downarrow \text{id} \wedge \text{id} \wedge f & & \downarrow \text{id} \wedge f \\ \mathbb{F} \wedge Y \wedge X & \xleftarrow[\cong]{\text{id} \wedge \lambda \wedge \text{id}} & \mathbb{F} \wedge \mathbb{S} \wedge Y \wedge X & \xrightarrow{\text{id} \wedge \beta \wedge \text{id}} & \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \wedge X & \xrightarrow{\nu \wedge \text{id}} & \mathbb{F} \wedge X. \end{array}$$

Zu den restlichen Punkten betrachtet man wieder kommutative Diagramme und benutzt die passenden Eigenschaften aus Satz 7.28 und Definition 7.29, siehe Übung 7.69. \square

7.35. BEMERKUNG. Es sei \mathbb{E} ein Ringspektrum. Mithilfe der natürlichen Transformationen λ und ρ erhalten wir einen Isomorphismus $\mathbb{S} \wedge \mathbb{S} \cong \mathbb{S}$. Daher erhalten wir eine Multiplikation auf den Koeffizienten $\pi_\bullet(\mathbb{E}) \cong \tilde{E}^\bullet(S^0) \cong \tilde{E}_\bullet(S^0)$ durch

$$\alpha \wedge \beta: \mathbb{S} \cong \mathbb{S} \wedge \mathbb{S} \xrightarrow{\alpha \wedge \beta} \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \xrightarrow{\mu} \mathbb{E}.$$

Somit erhalten wir den Koeffizientenring

$$E^\bullet = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{E}^n(S^0)$$

von \mathbb{E} . Es handelt sich dabei um einen \mathbb{Z} -graduerten Ring, das heißt, jedes Element ist eine Summe homogener Elemente, also von Elementen mit einem wohldefinierten Grad in \mathbb{Z} , und beim Multiplizieren addieren sich die Grade. Sollte \mathbb{E} kommutativ sein, ist E^\bullet *graduert kommutativ*, das heißt,

$$ab = (-1)^{k\ell} ba \quad \text{falls } a \in E^k \text{ und } b \in E^\ell.$$

Sei \mathbb{F} ein \mathbb{E} -Modulspektrum, zum Beispiel $\mathbb{F} = \mathbb{E}$. Nach Definition 7.33 sind $\tilde{F}_\bullet(X)$ und $\tilde{F}^\bullet(X)$ für jeden Raum graduierte E^\bullet -Module, und für stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ sind $f_*: \tilde{F}_\bullet(X) \rightarrow \tilde{F}_\bullet(Y)$ und $f^*: \tilde{F}^\bullet(Y) \rightarrow \tilde{F}^\bullet(X)$ rechts- E^\bullet -lineare Abbildungen, siehe Übung 7.70. Wir erhalten somit Funktoren

$$\tilde{F}_\bullet, \quad \tilde{F}^\bullet: \mathcal{H}kw\mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{M}od_{E^\bullet}.$$

Schließlich überprüft man noch, dass die externen Produkte im zweiten Argument rechts- E^\bullet -linear sind. Wenn \mathbb{E} kommutativ ist, erhält man auch eine Linearität im ersten Argument.

7.36. BEISPIEL. Wir betrachten die Koeffizientenringe einiger Spektren.

- (1) Der Koeffizientenring des Eilenberg-Mac Lane-Spektrums $\mathbb{H}R$ ist $R = HR^0 = HR^\bullet$. Insbesondere können wir gewöhnliche Kohomologie mit Koeffizienten in einem R -Modul A jetzt endlich als $\mathcal{M}od_R$ -wertigen Funktor verstehen.
- (2) Aufgrund von Bott-Periodizität fasst man komplexe K -Theorie gern als $\mathbb{Z}/2$ -graduerten Funktor auf. Der Koeffizientenring ist dann $K^\bullet = K^0 = \mathbb{Z}$. Über \mathbb{Z} hingegen erhalten wir den Koeffizientenring

$$K^k = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k \text{ gerade ist, und} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Analog betrachten wir reelle K -Theorie als $\mathbb{Z}/8$ -graduerten Funktor.

- (3) Die diversen Bordismuskoeffizientenringe haben in der Regel kompliziertere Koeffizientenringe. Beispielsweise wird MU^\bullet frei erzeugt von je einem Erzeuger in Grad $2k$ für $k \geq 0$.

7.37. BEMERKUNG. Wie in Bemerkung 6.17 gibt es auch ein *Kronecker-Produkt* $\langle \cdot, \cdot \rangle: \tilde{E}_\bullet(X) \times \tilde{E}^\bullet(X) \rightarrow E^\bullet$, definiert durch $\langle a, \alpha \rangle = a/\alpha \in \tilde{E}_\bullet(S^0) = E^\bullet$. Die Rechenregeln aus Proposition 6.21 (4) übertragen sich entsprechend.

Es seien $A, B \subset X$ Teilmengen, so dass (X, A) , (X, B) und $(X, A \cup B)$ punktierte Kofaserungen sind. Dann definieren wir eine Diagonalabbildung

$$\Delta_{X;A,B}: X/(A \cup B) \longrightarrow X/A \wedge X/B.$$

7.38. DEFINITION. Es sei \mathbb{E} ein Ring- und \mathbb{F} ein Rechts- \mathbb{E} -Modulspektrum, es sei X ein topologischer Raum mit Teilmengen $A, B \subset X$, so dass (X, A) , (X, B) und $(X, A \cup B)$ punktierte Kofaserungen sind. Dann definieren wir die *inneren Produkte*, das *Cup-Produkt* $\smile: \tilde{F}^k(X/A) \times \tilde{E}^\ell(X/B) \rightarrow \tilde{F}^{k+\ell}(X/(A \cup B))$ und das *Cap-Produkt* $\frown: \tilde{F}_{k+\ell}(X/(A \cup B)) \times \tilde{E}^k(X/A) \rightarrow \tilde{F}_\ell(X/B)$ für alle $\alpha \in \tilde{F}^k(X/A)$, $\beta \in \tilde{E}^\ell(X/B)$ und $c \in \tilde{F}_{k+\ell}(X/(A \cup B))$ durch

$$\alpha \smile \beta = \Delta_X^*(\alpha \wedge \beta) \quad \text{und} \quad c \frown \alpha = (\Delta_{X*}c)/\alpha.$$

Wir bezeichnen $(\tilde{E}^\bullet(X), \smile)$ als die reduzierte E -Kohomologiealgebra von X .

Diese Definition ist also völlig analog zu Definition 6.23; die unreduzierten Varianten erhalten wir analog. Aufgrund der folgenden Eigenschaften können wir tatsächlich von Kohomologieringen und (Ko-) Homologiemoduln sprechen. Außerdem sind $(\tilde{F}^\bullet(X), \smile)$ und $(\tilde{F}_\bullet(X), \frown)$ Rechts- $(\tilde{E}^\bullet(X), \smile)$ -Moduln.

7.39. PROPOSITION. *Die inneren Produkte sind natürlich und haben folgende Eigenschaften.*

(1) Assoziativgesetz. *Es gilt*

$$(\alpha \smile \beta) \smile \gamma = \alpha \smile (\beta \smile \gamma) \quad \text{und} \quad (c \frown \alpha) \frown \beta = c \frown (\alpha \smile \beta).$$

(2) Einselement. *Sei $p: X \rightarrow \text{pt}$ die konstante Abbildung, dann ist $1 = p_+^*(\varepsilon) \in \tilde{H}^0(X_+; R) = H^0(X; R)$ neutrales Element für beide Produkte.*

(3) Adjunktion. *Es gilt*

$$\langle b \frown \alpha, \beta \rangle = \langle b, \alpha \smile \beta \rangle.$$

(4) *Wenn \mathbb{E} kommutativ ist, ist das Cup-Produkt graduiert kommutativ, das heißt, für alle $\alpha \in \tilde{E}^k(X; R)$ und $\beta \in \tilde{E}^\ell(X; R)$ gilt*

$$\beta \smile \alpha = (-1)^{k\ell} \alpha \smile \beta.$$

BEWEIS. Das ist eine unmittelbare Folgerung aus Proposition 7.34. \square

7.40. BEMERKUNG. Als erste Anwendung zeigen wir, dass das Cup-Produkt auf $\tilde{E}^\bullet(SX)$ verschwindet. Dazu sei

$$SX = X \wedge ([0, 1]/\{0, 1\}), \quad A = X \wedge ([0, \frac{1}{2}], 0), \quad \text{und} \quad B = X \wedge ([\frac{1}{2}, 1], 1).$$

Dann gilt $A \cup B = SX$. Außerdem sind $A, B \cong CX$ zusammenziehbar, und nach Proposition 3.62 sind die Quotientenabbildungen $p: SX \rightarrow SX/A$ und $q: SX \rightarrow SX/B$ Homotopieäquivalenzen. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E}^k(SX/A) \times \tilde{E}^\ell(SX/B) & \xrightarrow{\smile} & \tilde{E}^{k+\ell}(SX/SX) = 0 \\ p^* \times q^* \downarrow \cong & & \downarrow \\ \tilde{E}^k(SX) \times \tilde{E}^\ell(SX) & \xrightarrow{\smile} & \tilde{E}^{k+\ell}(SX). \end{array}$$

7.41. BEMERKUNG. Wie in Bemerkung 6.25 ist $\tilde{E}^\bullet(X)$ eine E^\bullet -Algebra ohne Eins. Wir können eine Eins hinzufügen und erhalten die unreduzierte Kohomologie-Algebra $E^\bullet(X)$. Während $\tilde{E}^\bullet(X)$ als E^\bullet -Modul unabhängig von der Wahl des Basispunktes ist, sieht $\tilde{E}^\bullet(X)$ als E^\bullet -Algebra zumindest die Zusammenhangskomponente des Basispunktes. Die unreduzierte Kohomologie-Algebra $E^\bullet(X)$ ist wiederum basispunktunabhängig.

7.42. DEFINITION. Es sei X ein zusammenhängender topologischer Raum und E^\bullet eine multiplikative Kohomologiefunktor. Wenn es $k \geq 0$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \tilde{E}^\bullet(X)$ gibt, so dass

- $\alpha_1 \smile \dots \smile \alpha_k \neq 0$ falls $k \geq 0$, und
- $\beta_1 \smile \dots \smile \beta_{k+1} = 0$ für alle $\beta_1, \dots, \beta_{k+1} \in \tilde{E}^\bullet(X)$,

dann hat X die E -Cup-Länge $\text{cl}_E(X) = k$, andernfalls $\text{cl}_E(X) = \infty$.

Wenn es ein $k \geq 0$ gibt, so dass $\text{cl}_E(X) \leq k$ für alle multiplikativen Kohomologiefunktoren E^\bullet und $\text{cl}_E(X) = k$ für mindestens einen, dann hat X die Cup-Länge $\text{cl}(X) = k$, andernfalls $\text{cl}(X) = \infty$.

Wir müssen in der obigen Definition auf jeden Fall mit der reduzierten E -Kohomologie arbeiten, andernfalls erhielten wir beliebig lange Produkte der Form $1 \cdots 1 \neq 0$.

7.43. BEISPIEL. Die Cup-Länge ist ein sehr grobes Maß für die Komplexität eines topologischen Raumes.

- (1) Jeder zusammenziehbare Raum X hat Cup-Länge $\text{cl}(X) = 0$. Sei umgekehrt X ein zusammenhängender, einfach zusammenhängender CW-Komplex mit $\text{cl}_H(X) = 0$ für die ganzzahlige Kohomologie, dann ist X zusammenziehbar nach Übung 6.62.
- (2) Nach Bemerkung 7.41 gilt $\text{cl}(SX) \leq 1$ für alle Suspensionen.
- (3) In Übung 7.73 sehen wir, dass $\text{cl}(\mathbb{C}P^n) = \text{cl}(\mathbb{H}P^n) = n$.

7.44. PROPOSITION. *Es sei X ein zusammenhängender CW-Komplex der Dimension m . Dann gilt $\text{cl}(X) \leq m$.*

BEWEIS. Wir nehmen an, dass das 0-Skelett X^0 nur aus dem Basispunkt besteht, indem wir Satz 4.51 auf $(X, \{x_0\})$ anwenden. Seien jetzt $1 \leq p, q \leq m$, und sei $\Delta'_{X;X^{p-1},X^{q-1}}$ eine zelluläre Approximation der Diagonalen $\Delta_{X;X^{p-1},X^{q-1}}$. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Delta} & X \wedge X \\ \downarrow & & \downarrow \\ X/X^{p+q-1} & \xrightarrow{\Delta'_{X;X^{p-1},X^{q-1}}} & (X \wedge X)/(X^{p-1} \wedge X \cup X \wedge X^{q-1}) = (X/X^{p-1}) \wedge (X/X^{q-1}). \end{array}$$

Für $\alpha \in \tilde{E}^k(X/X^{p-1})$ und $\beta \in \tilde{E}^\ell(X/X^{q-1})$ folgt $\alpha \smile \beta \in \tilde{E}^{k+\ell}(X/X^{p+q-1})$. Da $\tilde{E}^\bullet(X) = \tilde{E}^\bullet(X/X^0)$, liegen induktiv alle p -fachen Produkte in $\tilde{E}^\bullet(X/X^{p-1})$. \square

7.e. Allgemeine singuläre Homologie und Kohomologie

Bisher haben wir durch Spektren gegebene Homologie und -Kohomologie immer nur für CW-Komplexe betrachtet. Um Dualitätssätze für Mannigfaltigkeiten zu formulieren, benötigen wir eine allgemeinere Definition. Dazu ersetzen wir beliebige Paare von Räumen durch schwach äquivalente CW-Paare ähnlich wie in Abschnitt 4.d.

Sei (Z, U) ein beliebiges Paar topologischer Räume. Mit Satz 4.51 finden wir zunächst eine CW-Approximation $A \rightarrow U$. Sei $g: A \rightarrow Z$ die zusammengesetzte Abbildung, dann ersetzen wir Z durch den Abbildungszylinder Zg . Anschließend konstruieren wir ein CW-Modell (X, A) für (Zg, A) . Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Zg & \xrightarrow{\sim} & Z \\ & \searrow & \uparrow & \nearrow & \uparrow \\ & & A & \longrightarrow & U \end{array}$$

Dabei sind sowohl A als auch X jeweils bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig, und die Homotopieäquivalenzen selbst sind ebenfalls bis auf Homotopie eindeutig bestimmt. Wir nennen $(X, A) \rightarrow (Z, U)$ eine *Approximation* von (Z, U) durch ein CW-Paar.

Sei jetzt $f: (Z, U) \rightarrow (W, V)$ seine stetige Abbildung von Paaren und $(X, A) \rightarrow (Z, U)$, $(Y, B) \rightarrow (W, V)$ seien Approximationen durch CW-Paare. Mit Satz 4.51 konstruieren wir zunächst eine Abbildung $A \rightarrow B$, dann eine Abbildung $g: X \rightarrow Y$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & \longrightarrow & W \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & g \nearrow & & f \nearrow \\ X & \longrightarrow & Z & & V \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & B & \longrightarrow & V \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & U & & V \end{array}$$

bis auf Homotopie kommutiert. Wieder sind alle Abbildungen bis auf Homotopie eindeutig bestimmt. Da (X, A) eine Kofaserung ist, können wir g als Abbildung von Paaren $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ wählen.

7.45. DEFINITION. Es sei \mathbb{E} ein Spektrum. Es sei $f: (Z, U) \rightarrow (W, V)$ eine Abbildung von Paaren, und es sei $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine Approximation durch CW-Paare. Dann definieren wir die *singuläre E-Homologie* $E_\bullet(Z, U) = \tilde{E}_\bullet(X/A)$ und

$$f_* = g_*: E_\bullet(Z, U) = \tilde{E}_\bullet(X/A) \longrightarrow \tilde{E}_\bullet(Y/B) = E_\bullet(W, V),$$

und analog die *singuläre E-Kohomologie*.

Insbesondere ist auch $E_\bullet(Z) = E_\bullet(X) = \tilde{E}_\bullet(X_+)$ im Falle $U = \emptyset$. Im Spezialfall $\mathbb{E} = \mathbb{H}G$ sprechen wir einfach von *singulärer Homologie* und *Kohomologie*.

7.46. BEMERKUNG. Man überprüft die folgenden Behauptungen.

- (1) Nach Übung 7.71 sind singuläre E-Homologie und -Kohomologie Funktoren $\mathcal{H}Pair \rightarrow Ab$.
- (2) Für Tripel $U \subset V \subset W$ existieren natürliche exakte Sequenzen

$$\begin{aligned} \cdots \longleftarrow E_{n-1}(V, W) \xleftarrow{\partial} E_n(U, V) \longleftarrow E_n(U, W) \longleftarrow E_n(V, W) \longleftarrow \cdots, \\ \cdots \longrightarrow E^{n-1}(V, W) \xrightarrow{\delta} E^n(U, V) \longrightarrow E^n(U, W) \longrightarrow E^n(V, W) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

wie in Übung 6.68. Im Fall $W = \emptyset$ erhalten wir die langen exakten Sequenzen eines Paares; diese sind Bestandteil der Eilenberg-Steenrod-Axiome.

- (3) Singuläre E-Homologie und -Kohomologie sind invariant unter schwachen Äquivalenzen. Insbesondere sind die Homologie-Funktoren aus den Definitionen 5.38 und 7.45 natürlich isomorph. Für Kohomologie gilt das wegen Übung 6.67 jedoch nicht.

Punkt (1) entspricht den Eilenberg-Steenrod-Axiomen 1, 2 und 6 [ES, Section I.3]. Punkt (2) für $W = \emptyset$ entspricht den Axiomen 3 und 4. Das Ausschneidungsaxiom 5 behandeln wir im folgenden Satz, und das Dimensionsaxiom 7 verlangen wir nur für gewöhnliche singuläre (Ko-) Homologie.

7.47. SATZ (Ausschneidung, Mayer-Vietoris-Sequenz). *Es sei \mathbb{E} ein Spektrum, und es sei $X = U \cup V$ mit $U, V \subset X$ offen. Dann induziert die Inklusionsabbildung $(U, U \cap V) \hookrightarrow (X, V)$ Isomorphismen*

$$E_\bullet(U, U \cap V) \xrightarrow{\cong} E_\bullet(X, V) \quad \text{und} \quad E^\bullet(X, V) \xrightarrow{\cong} E^\bullet(U, U \cap V). \quad (1)$$

Unter den gleichen Voraussetzungen sind die folgenden Mayer-Vietoris-Sequenzen exakt:

$$\cdots \longleftarrow \tilde{E}_{n-1}(U \cap V) \xleftarrow{\partial} \tilde{E}_n(X) \longleftarrow \tilde{E}_n(U) \oplus \tilde{E}_n(V) \xleftarrow{-} \tilde{E}_n(U \cap V) \longleftarrow \cdots, \quad (2)$$

$$\cdots \longrightarrow \tilde{E}^{n-1}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} \tilde{E}^n(X) \longrightarrow \tilde{E}^n(U) \oplus \tilde{E}^n(V) \xrightarrow{-} \tilde{E}^n(U \cap V) \longrightarrow \cdots. \quad (3)$$

Allgemeiner dürfen wir beliebige Teilmengen $U, V \subset X$ mit $\overset{\circ}{U} \cup \overset{\circ}{V} = X$ zulassen. Ohne eine Bedingung geht es sicher nicht, dazu betrachte man etwa das Beispiel $[0, 1] = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$.

BEWEIS. Wir bestimmen zunächst eine CW-Approximation $C \rightarrow U \cap V$. Wie oben finden wir dann Approximationen $(A, C) \rightarrow (U, U \cap V)$ und $(B, C) \rightarrow (V, U \cap V)$. Zu zeigen ist, dass die natürliche Abbildung $A \cup_C B \rightarrow X$ eine schwache Äquivalenz ist. Dazu zerlegt man den Abbildungskegel der natürlichen Abbildung

$$D = A \cup_{C \times \{0\}} C \times [0, 1] \cup_{C \times \{1\}} B \longrightarrow X$$

geschickt in zwei offene Mengen, die jeweils den Abbildungskegel von $A \rightarrow U$ beziehungsweise $B \rightarrow V$ als Deformationsretrakt enthalten, und deren Durchschnitt den Abbildungskegel von $C \rightarrow U \cap V$ als Deformationsretrakt enthält. Diese drei kleinen Abbildungskegel sind nach Voraussetzung

schwach zusammenziehbar. Nach dem Ausschneidungssatz 3.38 von Blakers-Massey gilt das dann auch für den obigen Abbildungskegel von $D \rightarrow X$. Die natürliche Abbildung $D \rightarrow A \cup_C B$ ist eine Homotopieäquivalenz, also ist $(A \cup_C B, B)$ eine CW-Approximation von (X, V) .

Jetzt erhalten wir die gesuchten natürlichen Isomorphismen

$$\begin{aligned} E_\bullet(U, U \cap V) &\cong \tilde{E}_\bullet(A/C) = \tilde{E}_\bullet((A \cup_C B)/B) \cong E_\bullet(X, V), \\ E^\bullet(X, V) &\cong \tilde{E}^\bullet((A \cup_C B)/B) = \tilde{E}^\bullet(A/C) \cong E^\bullet(U, U \cap V). \end{aligned}$$

Die angegebenen Mayer-Vietoris-Sequenzen folgen daraus. Wir können sie auch direkt aus den Sätzen 5.6 und 6.3 ableiten. \square

7.48. PROPOSITION. *Es sei \mathbb{E} ein Spektrum, und es seien $(U_i)_i, (V_i)_i$ aufsteigende Folgen von Teilmengen von X mit $V_i \subset U_i$. Für das Paar $(U, V) = (\bigcup_i U_i, \bigcup_i V_i)$ gilt*

$$E_\bullet(U, V) = \varinjlim E_\bullet(U_i, V_i),$$

falls es zu jedem Paar $(K, L) \subset (U, V)$ kompakter Teilmengen ein $i \in \mathbb{N}$ mit $(K, L) \subset (U_i, V_i)$ gibt.

BEWEIS. Aufgrund der Definition des Kolimes gibt es eine natürliche Abbildung

$$\varphi: \varinjlim (U_i, V_i) \longrightarrow E_\bullet(U, V).$$

Wegen Bemerkung 7.46 (3) wird eine Homologieklass $[a] \in E_k(U, V)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ dargestellt durch eine Abbildung $a: S^{n+k} \rightarrow E_n \wedge (U//V)$. Es sei $\iota: V \rightarrow U$ die Inklusion, dann schreibe $U//V \cong Z \cup_V CV$. Da S^{n+k} kompakt ist, liegt das Bild von a in $K \cup_{K \cap V} ((K \cap V) \times I) \cup_L CL$ für geeignete Kompakta $K \subset U$ und $L \subset V \cap K$, und der obige Raum ist homotopieäquivalent zu $K//L$. Wenn es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $(K, L) \subset (U_i, V_i)$ gibt, folgt $[a] \in \text{im } \varphi$. Somit ist φ surjektiv. Die Injektivität wird analog bewiesen. \square

7.49. BEMERKUNG. Sei \mathbb{E} ein Ringspektrum und \mathbb{F} ein Rechts- \mathbb{E} -Modulspektrum. Man definiert externe Produkte auf der singulären (Ko-)Homologie, indem man alle betroffenen Raumpaare durch Paare von CW-Komplexen approximiert. Dazu überlegt man sich zunächst, dass das Produkt solcher Approximationen wieder das Produkt der ursprünglichen Räume approximiert, siehe Übung 7.72. Wir erhalten also externe Produkte

$$\begin{aligned} \wedge: F^k(Z, U) \times E^\ell(W, V) &\longrightarrow F^{k+\ell}(Z \times W, U \times W \cup Z \times V) \\ \text{und } /: F_{k+\ell}(Z \times W, U \times W \cup Z \times V) \times E^k(Z, U) &\longrightarrow F_\ell(W, V) \end{aligned}$$

wie in Definition 7.33. Mit dem gleichen Argument beweist man auch ein Analogon der Künneth-Formel aus Satz 6.20.

Anschließend überlegt man sich, dass Approximation durch Paare von CW-Komplexen auch mit der Diagonalabbildung verträglich ist, und erhält in Analogie zu Definition 7.38 die internen Produkte

$$\begin{aligned} \smile: F^k(Z, U) \times E^\ell(Z, V) &\longrightarrow F^{k+\ell}(Z, U \cup V) \\ \text{und } \frown: F_{k+\ell}(Z, U \cup V) \times E^k(Z, U) &\longrightarrow F_\ell(Z, V). \end{aligned}$$

7.50. BEMERKUNG. In den meisten Lehrbüchern wird nur gewöhnliche singuläre (Ko-) Homologie definiert, und zwar über Kettenkomplexe, die von singulären Simplizes oder Würfeln erzeugt werden. Man kann jetzt beweisen, dass diese Definition Funktoren liefert, die die gleichen Axiome erfüllen wie die singuläre (Ko-) Homologie aus Definition 7.45 zu den Eilenberg-Mac Lane-Spektren. Insbesondere ist auch die „klassische“ singuläre (Ko-) Homologie invariant unter schwachen Äquivalenzen. Zusammen mit den Sätzen 5.18 und 6.15 sehen wir, dass beide Herangehensweisen natürlich isomorphe Funktoren liefern.

7.51. DEFINITION. Es sei $X \neq \emptyset$ ein zusammenhängender topologischer Raum. Wenn es ein $k \geq 0$ und zusammenziehbare offene Teilmengen $U_1, \dots, U_k \subset X$ gibt, so dass

- $X = U_1 \cup \dots \cup U_{k+1}$, und
- es k zusammenziehbar offene Teilmengen $V_1, \dots, V_k \subset X$ mit $X = V_1 \cup \dots \cup V_k$ gibt,

dann hat X die *Lusternik-Shnirelman-Kategorie* $LS(X) = k$, andernfalls $LS(X) = \infty$.

Man beachte, dass das Wort Kategorie hier nicht die mittlerweile übliche Bedeutung hat.

7.52. BEISPIEL. Ähnlich der Cup-Länge aus Definition 7.42 ist die Lusternik-Shnirelman-Kategorie ein sehr grobes Maß für die Komplexität eines topologischen Raumes.

- (1) Ein Raum zusammenhängender Raum X hat genau dann $LS(X) = 0$, wenn X zusammenziehbar ist.
- (2) Es gilt $LS(SX_+) \leq 1$, denn SX_+ ist die Vereinigung zweier offener Kegel $CX \setminus X \times \{1\}$.
- (3) Es gilt $LS(\mathbb{R}P^n) = LS(\mathbb{C}P^n) = LS(\mathbb{H}P^n) = n$ nach Übung 7.73.

7.53. PROPOSITION. *Es sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Dann gilt die Ungleichung $cl(X) \leq LS(X)$.*

BEWEIS. Es sei $X = U_1 \cup \dots \cup U_{k+1}$, und $U_1, \dots, U_{k+1} \subset X$ seien offen und zusammenziehbar. Da X wegzusammenhängend ist, ist $\tilde{E}^\bullet(X)$ unabhängig vom Basispunkt x_0 . Wir dürfen also $x_0 \in U_i$ annehmen. Dann ist die natürliche Abbildung $E^\bullet(X, U_i) \rightarrow \tilde{E}^\bullet(X)$ ein Isomorphismus. Seien jetzt $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1} \in \tilde{E}^\bullet(X)$ gegeben, dann existieren Urbilder $\alpha_i \in E^\bullet(X, U_i)$. Es folgt

$$\alpha_1 \smile \dots \smile \alpha_{k+1} \in E^\bullet(X, U_1 \cup \dots \cup U_{k+1}) = E^\bullet(X, X) = 0. \quad \square$$

7.f. Übungen zu Kapitel 7

Übungen zu Abschnitt 7.a.

7.54. ÜBUNG. Beweisen Sie die folgende Aussagen über kofinale Unterspektren.

- (1) Es sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$ kofinal und $\mathbb{V} \subset \mathbb{E}$ kofinal, dann ist auch $\mathbb{U} \subset \mathbb{E}$ kofinal.
- (2) Es sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{E}$ kofinal und $\mathbb{V} \subset \mathbb{E}$ ein Unterspektrum, dann ist $\mathbb{U} \cap \mathbb{V} \subset \mathbb{V}$ kofinal.
- (3) Es sei $\mathbb{V} \subset \mathbb{F}$ kofinal und $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ eine strikte Abbildung, dann ist auch $f^{-1}(\mathbb{V}) \subset \mathbb{E}$ kofinal.

7.55. ÜBUNG. (1) Es seien $f, g: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ Abbildungen. Erklären Sie Definition 7.5 in Termen strikter Abbildungen auf kofinalen Unterspektren.

- (2) Zeigen Sie in dieser Sprache, dass Homotopie auf Abbildungen eine Äquivalenzrelation definiert.
- (3) Zeigen Sie in dieser Sprache, dass Verkettung von Abbildungen mit Homotopie verträglich ist.

7.56. ÜBUNG. Es sei $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ eine Abbildung vom Grad ℓ . Überlegen Sie sich, dass f für alle k eine Abbildung $f_*: \pi_k(\mathbb{E}) \rightarrow \pi_{k+\ell}(\mathbb{F})$ induziert. Folgern Sie, dass $\pi_\bullet: \mathcal{SHCW} \rightarrow \mathcal{GrAb}$ im Sinne von Bemerkung 5.16 einen graduierten Funktor definiert.

Übungen zu Abschnitt 7.b.

7.57. ÜBUNG. Es seien \mathbb{E}, \mathbb{F} CW-Spektren.

- (1) Definieren Sie ein geeignetes CW-Spektrum $\mathbb{E} \vee \mathbb{F}$ mit Abbildungen $i: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E} \vee \mathbb{F}$ und $j: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E} \vee \mathbb{F}$ vom Grad 0.
- (2) Zeigen Sie, dass es in der Kategorie \mathcal{SCW}_0 die universelle Eigenschaft eines Koproduktes erfüllt.

- (3) Konstruieren Sie Abbildungen $p: \mathbb{E} \vee \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$ und $q: \mathbb{E} \vee \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ vom Grad 0, so dass $p \circ i = \text{id}_{\mathbb{E}}$, $q \circ j = \text{id}_{\mathbb{F}}$ und $p \circ j = q \circ i = 0$.

7.58. ÜBUNG. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- (1) Es seien X und Y punktierte CW-Komplexe, dann ist $S^k X \vee S^k Y \hookrightarrow S^k X \times S^k Y$ eine $(2k - 2)$ -zusammenhängende Abbildung.
- (2) Es seien \mathbb{E} , \mathbb{F} und $\mathbb{E} \vee \mathbb{F}$ die Spektren aus Aufgabe 7.57. Zeigen Sie mit Teil (1) und Aufgabe 7.57, dass $\mathbb{E} \vee \mathbb{F}$ die universelle Eigenschaft eines Produkts in \mathcal{SHCW}_0 erfüllt.

7.59. ÜBUNG. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- (1) Die Verknüpfung von Abbildungen in der Kategorie \mathcal{SHCW}_0 ist bilinear bezüglich der Addition.
- (2) Das Koproduct aus Aufgabe 7.57 ist auch ein Koproduct in \mathcal{SHCW}_0 . Insbesondere existieren alle Koproducte in \mathcal{SHCW}_0 .
- (3) Schließen Sie hieraus mit Hilfe abstrakter Argumente (alternativ zu Aufgabe 7.58), dass jedes Koproduct gleichzeitig ein Produkt ist.

Zusatz: Formulieren Sie passende universelle Eigenschaften für das obige Biproduct (simultane Produkt und Koproduct), wenn wir Abbildungen von beliebigem Grad zulassen.

7.60. ÜBUNG. Es sei Ff die Homotopiefaser einer Abbildung $f: X \rightarrow Y$, und FSf die Homotopiefaser ihrer Einhängung. Konstruieren Sie mit der universellen Eigenschaft aus Bemerkung 4.71 (2) eine natürliche Abbildung $SFf \rightarrow FSf$. Zu einer Abbildung von Spektren $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$ erhalten wir also eine Folge von Räumen Ff_k mit natürlichen Abbildungen $Ff_k \rightarrow E_k$ und $SFf_k \rightarrow Ff_{k+1}$. Zeigen Sie, dass es ein CW-Spektrum \mathbb{F} , Abbildungen $g: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$ und schwache Homotopieäquivalenzen $h_k: F_k \rightarrow Ff_k$ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc}
 F_{k+1} & \xrightarrow{g_{k+1}} & E_{k+1} & & \\
 \uparrow & \searrow^{h_{k+1}} & \nearrow & & \uparrow \\
 SF_k & \xrightarrow{Sg_k} & SF_k & \xrightarrow{Sh_k} & SE_k \\
 & & \uparrow & & \\
 & & Ff_{k+1} & &
 \end{array}$$

7.61. ÜBUNG. Es sei $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$ eine Fasersequenz von Spektren. Konstruieren Sie analog zu Satz 4.72 eine natürliche lange Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \pi_k(\mathbb{F}) \longrightarrow \pi_k(\mathbb{E}) \longrightarrow \pi_k(\mathbb{B}) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(\mathbb{F}) \longrightarrow \cdots$$

und beweisen Sie ihre Exaktheit.

7.62. ÜBUNG. Betrachten Sie den soliden Teil des Diagramms aus CW-Spektren

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{G} & \longrightarrow & \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow \\
 \mathbb{F} & \longrightarrow & \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{B} ,
 \end{array}$$

wobei die obere Zeile eine Kofaser- und die untere eine Fasersequenz sei, und zeigen Sie:

- (1) Gegeben eine der beiden Abbildungen f oder h , so dass das entsprechende Rechteck bis auf Homotopie kommutiert, lässt sich die andere so konstruieren, dass das andere Rechteck ebenfalls bis auf Homotopie kommutiert.
- (2) Wenn zwei der Abbildungen f , g , h Homotopieäquivalenzen sind, dann auch die dritte.
- (3) Eine Sequenz von Spektren ist genauso dann eine Fasersequenz, wenn sie eine Kofasersequenz ist.

Übungen zu Abschnitt 7.c.

7.63. ÜBUNG. Es seien $\mathbb{E} = (E_k, s_k)_k$, $\mathbb{F} = (F_\ell, t_\ell)_\ell$, $\mathbb{G} = (G_m, u_m)_m$ CW-Spektren. Zeigen Sie:

- (1) Eine Folge von Abbildungen $\mu_{k,\ell}: E_k \wedge F_\ell \rightarrow G_{k+\ell}$ induziert genau dann für alle $A = B \dot{\cup} C \subset \mathbb{N}$ mit $\#A = \infty$ eine strikte Abbildung $\mu_{B,C}: \mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{G}$, wenn für alle k, ℓ gilt, dass

$$\mu_{k+1,\ell} \circ (s_k \wedge \text{id}_{F_\ell}) = u_{k+\ell} \circ S\mu_{k,\ell} = \mu_{k,\ell+1} \circ (\text{id}_{E_k} \wedge (-1)^k t_\ell).$$

- (2) Wenn die Bedingung aus (1) erfüllt ist, existiert eine bis auf Homotopie eindeutige Abbildung $\mu: \mathbb{E} \wedge \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{G}$, so dass $\mu_{B,C} \sim \mu \circ \eta_{B,C}$.

7.64. ÜBUNG. Konstruieren Sie Homotopieäquivalenzen $\mu_{k,\ell}: S^k \wedge S^\ell \rightarrow S^{k+\ell}$, die den Bedingungen aus Aufgabe 7.63 (1) genügen, mit $\mu_{0,0} = \text{id}_{S^0}: S^0 \wedge S^0 \rightarrow S^0$. Es bezeichne $\tau_{k,\ell}: S^k \wedge S^\ell \rightarrow S^\ell \wedge S^k$ den Vertauschungshomöomorphismus mit $\tau(x \wedge y) = y \wedge x$. Zeigen Sie, dass $\mu_{\ell,k} \circ \tau_{k,\ell}$ zu $(-1)^{k\ell} \mu_{k,\ell}$ homotop ist, wobei $-1: S^{k+\ell} \rightarrow S^{k+\ell}$ eine beliebige Abbildung vom Abbildungsgrad -1 bezeichne.

Übungen zu Abschnitt 7.d.

7.65. ÜBUNG. Es sei $\mathbb{HZ} = (HZ_k, s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum zu \mathbb{Z} , und es bezeichne $1_k \in \pi_k(HZ_k) \cong \mathbb{Z}$ den kanonischen Erzeuger mit $s_k \circ S1_k = s_{k+1}$.

- (1) Konstruieren Sie Abbildungen $\mu_{k,\ell}: HZ_k \wedge HZ_\ell \rightarrow HZ_{k+\ell}$, die den Bedingungen aus Aufgabe 7.63 (1) genügen, mit $\mu_{k,\ell}(1_k \wedge 1_\ell) = 1_{k+\ell}$, und beweisen Sie Eindeutigkeit bis auf Homotopie.
- (2) Zeigen Sie, dass für alle $k, \ell, m \geq 0$ die folgenden Paare von Abbildungen jeweils homotop sind:

$$\begin{aligned} \mu_{k+\ell,m} \circ (\text{id}_{HZ_k} \wedge \mu_{\ell,m}) &\sim \mu_{k,\ell+m} \circ (\mu_{k,\ell} \wedge \text{id}_{HZ_m}), \\ \mu_{0,k} \circ (1_0 \wedge \text{id}_{HZ_k}) &\sim \text{id}_{HZ_k}: S^0 \wedge HZ_k \longrightarrow HZ_k, \\ \text{und } \mu_{k,0} \circ (\text{id}_{HZ_k} \wedge 1_0) &\sim \text{id}_{HZ_k}: HZ_k \wedge S^0 \longrightarrow HZ_k. \end{aligned}$$

7.66. ÜBUNG. Es seien $\mu_{k,\ell}: HZ_k \wedge HZ_\ell \rightarrow HZ_{k+\ell}$ die Abbildungen aus Aufgabe 7.65. Es bezeichne $\tau_{k,\ell}: HZ_k \wedge HZ_\ell \rightarrow HZ_\ell \wedge HZ_k$ den Vertauschungshomöomorphismus mit $\tau(x \wedge y) = y \wedge x$. Zeigen Sie:

- (1) Es gibt für alle $k \geq 1$ eine bis auf Homotopie eindeutige Abbildung $-1: HZ_k \rightarrow HZ_k$, so dass $(-1)_* = -\text{id}_{\pi_k(HZ_k)}$.
- (2) Für alle $k, \ell \geq 0$ sind die Abbildungen $\mu_{\ell,k} \circ \tau_{k,\ell}$ und $(-1)^{k+\ell} \circ \mu_{k,\ell}: HZ_k \wedge HZ_\ell \rightarrow HZ_{k+\ell}$ homotop.

7.67. ÜBUNG. Es sei $(\mathbb{E}, \mu, \varepsilon)$ ein Ringspektrum und \mathbb{F} ein beliebiges Spektrum. Beweisen Sie mit Hilfe von Satz 7.28 und Definition 7.29, dass $(\mathbb{F} \wedge \mathbb{E}, \text{id} \wedge \mu)$ ein \mathbb{E} -Modulspektrum ist.

7.68. ÜBUNG. Es sei A eine abelsche Gruppe und $\mathbb{M}A$ ihr Moore-Spektrum. Zeigen Sie, dass

$$\pi_k(\mathbb{HZ} \wedge \mathbb{M}A) \cong \begin{cases} A & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Konstruieren Sie eine stabile Abbildung $\mathbb{H}A \rightarrow \mathbb{HZ} \wedge \mathbb{M}A$, die auf allen π_k Isomorphismen induziert.

7.69. ÜBUNG. Beweisen Sie mindestens einen der Punkte (1)–(4) aus Proposition 7.34 mit Hilfe von Satz 7.28 und Definition 7.29.

7.70. ÜBUNG. Es sei \mathbb{E} ein Ring- und \mathbb{F} ein Rechts- \mathbb{E} -Modulspektrum. Überprüfen Sie Bemerkung 7.35, wonach $\tilde{F}_\bullet(X)$ und $\tilde{F}^\bullet(X)$ für jeden Raum X graduierte Rechts- E^\bullet -Moduln sind, und stetige Abbildungen graduiert E^\bullet -lineare Abbildungen induzieren. Dabei bedeutet „graduiert“ wieder, dass sich bei der Multiplikation homogener Elemente die Grade addieren.

Übungen zu Abschnitt 7.e.

7.71. ÜBUNG. Es sei $f: (Z, U) \rightarrow (W, V)$ eine stetige Abbildung beliebiger Paare. Beweisen Sie die Definition 7.45 zugrunde liegende Behauptung, wonach $f^*: E^\bullet(W, V) \rightarrow E^\bullet(Z, U)$ nicht von der Wahl der Abbildung $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ von Approximationen durch Paare von CW-Komplexen abhängt. Zeigen Sie dann, dass E^\bullet ein homotopieinvarianter Funktor ist.

7.72. ÜBUNG. Es seien $(X, A) \rightarrow (Z, U)$ und $(Y, B) \rightarrow (W, V)$ Approximationen durch Paare von CW-Komplexen. Zeigen Sie, dass $(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$ eine Approximation von $(Z \times W, U \times W \cup Z \times V)$ durch Paare von CW-Komplexen ist.

Hinweis: Arbeiten Sie mit Abbildungskegeln, und beginnen Sie mit dem Spezialfall $U = V = \emptyset$.

7.73. ÜBUNG. Es sei $\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder \mathbb{H} .

- (1) Zeigen Sie, dass $\text{cl}(\mathbb{k}P^n) \geq n$, indem Sie ein geeignetes, nicht verschwindendes Cup-Produkt angeben.
- (2) Zeigen Sie, dass $LS(\mathbb{k}P^n) \leq n$.

Aus Proposition 7.53 folgt dann $LS(\mathbb{k}P^n) = \text{cl}(\mathbb{k}P^n) = n$.

Dualität

In allgemeinen monoidalen Kategorien gibt es einen Begriff von starker Dualität. In der stabilen Homotopiekategorie \mathcal{SHCW} der CW-Spektren ist das die sogenannte Spanier-Whitehead- oder S -Dualität. Beim Übergang von einem Raum zu seinem Dualraum vertauschen Homologie und Kohomologie ihre Rollen. Motiviert von unseren Überlegungen zur Poincaré-Dualität in der Bordismustheorie führen wir Orientierungen und Fundamentalklassen ein. Anschließend beweisen wir den Thom-Isomorphismussatz und Poincaré-Dualität, indem wir den Thom-Isomorphismus mit Spanier-Whitehead-Dualität kombinieren.

8.a. Spanier-Whitehead-Dualität

In diesem Kapitel führen wir eine stabile Dualität zwischen topologischen Räumen X und X^* ein, so dass die Homologie von X genau die Kohomologie von X^* ist und umgekehrt. Streng genommen handelt es sich um eine Dualität zwischen (Einhängungs-) Spektren. Sie funktioniert besonders gut für endliche Spektren, oder äquivalent für endliche CW-Komplexe. Kompakte glatte Mannigfaltigkeiten sind typische Beispiele hierfür, und wir können das Dual einer kompakten Mannigfaltigkeit explizit angeben als Thom-Spektrum ihres stabilen Normalenbündels; dazu folgen wir Dold und Puppe [DP]. Im nächsten Abschnitt beweisen wir den Thom-Isomorphismus-Satz und erhalten als Korollar verschiedene Dualitätssätze für glatte Mannigfaltigkeiten.

Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ eine monoidale Kategorie, siehe Abschnitt 4.c. Wir erinnern uns auch an die natürlichen Isomorphismen λ und ρ aus Definition 4.26. In einer monoidalen Kategorie heißt ein Objekt B *schwach dual* zu A , wenn es für alle Objekte C eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C \otimes A, E) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B) \quad (8.1)$$

gibt. Für $C = B$ entspricht dann $\mathrm{id}_B \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, B)$ der *schwachen Auswertungsabbildung*

$$\varepsilon = \varepsilon_A: B \otimes A \rightarrow E.$$

Wenn zu jedem Objekt A ein duales Objekt $DA = B$ existiert, erhält man durch Auswahl von DA einen kontravarianten Funktor $D: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$. Falls nicht, kann man zur vollen Unterkategorie \mathcal{C}^* der dualisierbaren Objekte übergehen. Dabei ist E dual zu sich selbst, wir setzen also $DE = E$. Der zu $f: A \rightarrow B$ *duale Morphismus* $Df: DB \rightarrow DA$ wird so definiert, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} DB \otimes A & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes f} & DB \otimes B \\ Df \otimes \mathrm{id} \downarrow & & \downarrow \varepsilon_B \\ DA \otimes A & \xrightarrow{\varepsilon_A} & E \end{array} \quad (8.2)$$

kommutiert.

Wenn auch DA ein schwaches Dual besitzt, können wir eine natürliche Abbildung $\delta_A: A \rightarrow DDA$ angeben, die gemäß (8.1) der Identität id_{DA} entspricht. Dann nennen wir A *reflexiv*, wenn δ_A ein Isomorphismus ist.

8.1. BEISPIEL. Es sei \mathcal{C} eine abgeschlossene monoidale Kategorie. Dann hat jedes Objekt C ein schwach duales Objekt $D = \text{hom}(C, E)$, und $\varepsilon_C = \text{ev}_{C,E}$ ist die schwache Auswertungsabbildung aufgrund der universellen Eigenschaft aus Bemerkung 4.28 (1). Der duale Morphismus zu $f: A \rightarrow B$ ist $\text{hom}(f, E): \text{hom}(B, E) \rightarrow \text{hom}(A, E)$.

Noch konkreter sei $\mathcal{C} = \mathcal{V}ec_{\mathbb{k}}$, dann ist $DV = V^*$ der Dualraum, $\varepsilon_V: V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{k}$ die Auswertungsabbildung mit $\alpha \otimes v \mapsto \alpha(v)$, und $f^*: W^* \rightarrow V^*$ ist der duale Morphismus zu $f: V \rightarrow W$. Ein Vektorraum V ist reflexiv, wenn $V \cong (V^*)^*$ gilt, also genau dann, wenn er endlich-dimensional ist. Daher heißen reflexive Objekte manchmal auch *endlich*.

8.2. PROPOSITION UND DEFINITION. *Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ eine monoidale Kategorie. Für Objekte A, B von \mathcal{C} und einen Morphismus $\varepsilon: B \otimes A \rightarrow E$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *Es gibt eine Ko-Auswertungsabbildung $\eta: E \rightarrow A \otimes B$, so dass*

$$\text{id}_A: A \xrightarrow{\lambda^{-1}} E \otimes A \xrightarrow{\eta \otimes \text{id}} A \otimes B \otimes A \xrightarrow{\text{id} \otimes \varepsilon} A \otimes E \xrightarrow{\rho} A, \quad (1a)$$

$$\text{id}_B: B \xrightarrow{\rho^{-1}} B \otimes E \xrightarrow{\text{id} \otimes \eta} B \otimes A \otimes B \xrightarrow{\varepsilon \otimes \text{id}} E \otimes B \xrightarrow{\lambda} B. \quad (1b)$$

(2) *Für alle Objekte C, D von \mathcal{C} ist die natürliche Abbildung $\varphi_{C,D}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D \otimes B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C \otimes A, D)$ bijektiv, wobei*

$$\varphi_{C,D}(f): C \otimes A \xrightarrow{f \otimes \text{id}} D \otimes B \otimes A \xrightarrow{\text{id} \otimes \varepsilon} D \otimes E \xrightarrow{\rho} D.$$

Falls eine dieser Aussagen gilt, heißt A stark dualisierbar mit starkem Dual B .

Später benutzen wir Eigenschaft (1) zum Nachweis der starken Dualität. In den Anwendungen arbeiten wir oft mit (2), siehe Bemerkung 8.5. Diese Aussage bedeutet, dass Tensorieren mit stark dualen Objekten adjungierte Funktoren liefert. Eigenschaft (2) impliziert, dass starke Duale insbesondere schwache Duale im Sinne von (8.1) sind.

In einer symmetrischen monoidalen Kategorie spielen A und B die gleiche Rolle. Also ist A genau dann starkes Dual von B , wenn B starkes Dual von A ist, und stark dualisierbare Objekte sind automatisch reflexiv.

BEWEIS. Die Behauptung ist die Äquivalenz zweier Definitionen adjungierter Funktoren, die folgenden Argumente sind daher Standard. Sei (1) erfüllt, dann definieren wir eine Umkehrabbildung $\psi_{C,D}$ zu $\varphi_{C,D}$ durch

$$\psi_{C,D}(g): C \xrightarrow{\rho^{-1}} C \otimes E \xrightarrow{\text{id} \otimes \eta} C \otimes A \otimes B \xrightarrow{g \otimes \text{id}} D \otimes B.$$

Um zu sehen, dass $\varphi_{C,D} \circ \psi_{C,D} = \text{id}$, benutzen wir (1a) im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} C \otimes A & \longrightarrow & C \otimes E \otimes A & \xrightarrow{\eta} & C \otimes A \otimes B \otimes A & \xrightarrow{g} & D \otimes B \otimes A \\ & & & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon \\ & & & & C \otimes A \otimes E & \xrightarrow{g} & D \otimes E \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & C \otimes A & \xrightarrow{g} & D. \end{array}$$

Entsprechend folgt $\psi_{C,D} \circ \varphi_{C,D} = \text{id}$ aus (1b).

Wenn umgekehrt (2) gilt, sei $\eta = \varphi_{E,A}^{-1}(\lambda)$. Dann folgt (1a) aus der Definition von $\varphi_{E,A}$, denn

$$\begin{array}{ccc} E \otimes A & \xrightarrow{\eta} & A \otimes B \otimes A \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ A & \xleftarrow{\rho} & A \otimes E. \end{array}$$

Nach Definition von $\varphi_{C,D}$ gilt $\varepsilon = \varphi_{B,E}(\lambda^{-1})$. Wir können jetzt $\psi_{C,D}$ wie oben definieren und $\varphi_{C,D} \circ \psi_{C,D} = \text{id}$ überprüfen. Da $\varphi_{C,D}$ bijektiv ist, ist $\psi_{C,D}$ die Umkehrabbildung. Also gilt $\psi_{B,E}(\varepsilon) = \lambda^{-1}$, und daraus folgern wir (1b) ähnlich wie oben. \square

8.3. BEISPIEL. Selbst in abgeschlossenen monoidalen Kategorien ist nicht immer jedes Objekt stark dualisierbar.

- (1) Ein \mathbb{k} -Vektorraum ist genau dann stark dualisierbar, wenn er endlich-dimensional ist.
- (2) Sei R kommutativer Ring mit Eins. Dann ist ein R -Modul genau dann stark dualisierbar, wenn er endlich erzeugt und projektiv ist.

Da $\mathcal{V}ec_{\mathbb{k}}$ und $\mathcal{M}od_R$ symmetrisch monoidal sind, ist Dualität hier eine symmetrische Relation.

8.4. DEFINITION. Das starke Dual in der stabilen Homotopiekategorie $(\mathcal{S}HCW, \wedge, \mathbb{S})$ heißt *Spanier-Whitehead-Dual* oder *S-Dual*. Wenn $\mathbb{S}X$ zu $\Sigma^{-n}\mathbb{S}X^*$ stark dual ist, heißt X^* ein Spanier-Whitehead-Dual vom Grad n mit *Auswertungsabbildung* $\varepsilon_n: X^* \wedge X \rightarrow S^n$.

8.5. BEMERKUNG. Da die monoidale Kategorie $\mathcal{S}HCW$ nach Satz 7.28 graduiert symmetrisch ist, ist dann X auch ein Spanier-Whitehead-Dual zu X^* . Dualisierbare Räume sind also reflexiv, was auch in der Kategorie $\mathcal{S}HCW$ eine starke Einschränkung ist. Immerhin kann man zeigen, dass endliche CW-Spektren immer ein ebenfalls endliches duales Spektrum besitzen.

Wir müssen etwas mit den Vorzeichen aufpassen. Es sei X^* ein Spanier-Whitehead-Dual von X vom Grad n . Zur Auswertungsabbildung $\varepsilon_n: X^* \wedge X \rightarrow S^n$ gehört nach Definition 8.2 (1) eine Koauswertungsabbildung $\eta_n: S^n \rightarrow X \wedge X^*$, so dass

$$\begin{aligned} \text{id}_{S^n X}: S^n \wedge X &\xrightarrow{\eta_n \wedge \text{id}} X \wedge X^* \wedge X \xrightarrow{\text{id} \wedge \varepsilon_n} X \wedge S^n \xrightarrow{\tau} S^n \wedge X, \\ \text{id}_{S^n X^*}: S^n \wedge X^* &\xrightarrow{(-1)^n \tau_0} X^* \wedge S^n \xrightarrow{\text{id} \wedge \eta_n} X^* \wedge X \wedge X^* \xrightarrow{\varepsilon_n \wedge \text{id}} S^n \wedge X^*. \end{aligned}$$

Hierbei sei τ_0 die „naive“ Transposition aus Bemerkung 3.73 (2). Da sowohl S^n als auch $C(\mathbb{R}^n|K)$ der n -te Raum des jeweiligen Spektrums sind, entspricht $\tau_{n,n} = (-1)^{n \cdot n} \tau_0$ genau der Transposition gemäß Satz 7.28.

Wir geben eine (ko-) homologische Interpretation der Bedingung (2) in Definition 8.2. Es sei \mathbb{E} ein Spektrum, das wir gemäß Beispiel 7.31 (1) als Linksmodulspektrum über dem Sphärenspektrum \mathbb{S} auffassen. Außerdem repräsentiert η_n eine Homologieklass $[\eta_n] \in \pi_n^{\mathbb{S}}(X \wedge X^*)$. Unter der Annahme, dass X ein endlicher CW-Komplex ist, sei $[a] \in E^k(X)$ gegeben durch $a: S^\ell X \rightarrow E_{k+\ell}$. Aus Definition 7.33 und der Konstruktion von ψ im Beweis von Proposition 8.2 ergibt sich, dass

$$\psi_{\mathbb{S}, \mathbb{E}}(a) = \eta_n / a: S^{n+\ell} \xrightarrow{S^\ell \eta_n} S^\ell X \wedge X^* \xrightarrow{a \wedge \text{id}} E_{k+\ell} \wedge X^*.$$

Das gleiche Argument funktioniert auch für stabile Abbildungen $a \in [\mathbb{S}X, \mathbb{E}]_{-k}$. Also erhalten wir eine (ko-) homologische Dualität

$$\psi_{\mathbb{S}, \mathbb{E}} = \eta_n / \cdot: E^k(X) \xrightarrow{\cong} E_{n-k}(X^*).$$

Um Spanier-Whitehead-Duale zu konstruieren, benötigen wir noch einen neuen Begriff.

8.6. DEFINITION. Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt *Umgebungsretrakt*, wenn es eine Umgebung $U \subset X$ von Y und eine Retraktion $p: U \rightarrow Y$ gibt. Letztere heißt dann auch *Umgebungsretraktion*.

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, wie wir Räume und Paare von Räumen durch Paare von CW-Komplexen approximieren können. Den Ausschneidungssatz 7.47 können wir als Satz über solche Approximationen verstehen. Wir arbeiten im Folgenden daher nicht mit CW-Komplexen, sondern mit Raumpaaren. Eine Approximation durch Paare von CW-Komplexen ist im Folgenden stets möglich, vereinfacht die Situation jedoch nicht. Wir erinnern uns an die Schreibweise $X|x = (X, X \setminus \{x\})$ aus Abschnitt 3.e. Allgemeiner sei $X|A = (X, X \setminus A)$ für jede Teilmenge $A \subset X$. Mit $C(X|x) = X//(X \setminus \{x\})$ und $C(X|A) = X//(X \setminus A)$ bezeichnen wir die zugehörigen Homotopiequotienten.

8.7. SATZ (Spanier-Whitehead-Dualität). *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Umgebungsretrakt. Dann ist $C(\mathbb{R}^n|K)$ ein Spanier-Whitehead-Dual von K_+ .*

BEWEIS. Wir fassen K als 0-ten Raum des Spektrums $\mathbb{S}K$ auf, und $C(\mathbb{R}^n|K)$ als n -ten Raum des dualen Spektrums. Eine Auswertungsabbildung $\varepsilon_n: C(\mathbb{R}^n|K) \wedge K_+ \rightarrow S^n$ wird gegeben durch

$$\varepsilon_n((x, t) \wedge k) = (x - k, t) \in C(\mathbb{R}^n|0) \xrightarrow{\sim} S^n .$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn sie bildet Basispunkt auf Basispunkt ab, und wenn (x, t) nicht in der Basis des Kegels liegt, also $t < 1$, gilt $x \notin K$, somit $x - k \neq 0$.

Es sei $R > 0$ so groß, dass $K \subset B_R(0)$. Mit dem Lemma 1.30 von Urysohn finden wir eine stetige Abschneidefunktion $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow I$ mit $\psi|_K \equiv 1$ und $\text{supp } \psi \subset U$. Außerdem sei $p: U \rightarrow K$ die Umgebungsretraktion. Wir konstruieren eine Koauswertungsabbildung $\eta_n: S^n \rightarrow K_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|K)$ für $(x, t) \in C(\mathbb{R}^n|B_R(0)) \sim S^n$ durch

$$\eta_n(x, t) = p(x) \wedge (x, \psi(x)t) .$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn da $\text{supp } \psi \subset U$, brauchen wir $p(x)$ nur auf Punkte $x \in U$ anzuwenden. Und schließlich ist $|x| \geq R$ falls $t < 1$, also insbesondere $x \notin K$. Sobald wir gezeigt haben, dass ε_n und η_n die Bedingungen aus Bemerkung 8.5 erfüllen, folgt auch die Eindeutigkeit von η_n bis auf stabile Homotopie.

Wir überprüfen die Bedingungen aus Proposition 8.2 (1). Zu (1a) betrachten wir die Verkettung

$$\begin{aligned} S^n \wedge K_+ \sim C(\mathbb{R}^n|B_R(0)) \wedge K_+ &\xrightarrow{\eta_n \wedge \text{id}} K_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|K) \wedge K_+ \xrightarrow{\text{id} \wedge \varepsilon_n} K_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|0) \sim K_+ \wedge S^n \\ (x, t) \wedge k &\longmapsto p(x) \wedge (x, \psi(x)t) \wedge k \longmapsto p(x) \wedge (x - k, \psi(x)t) . \end{aligned}$$

Um eine Homotopie zur Transpositionsabbildung $\tau: S^n \wedge K_+ \rightarrow K_+ \wedge S^n$ zu finden, ersetzen wir im Bild K zunächst durch U . Das Element $(x - k, \psi(x)t) \in C(\mathbb{R}^n|0)$ „sieht“ nur Punkte von kleinem Abstand $|x - k|$. Genauer gesagt, wählen wir $r > 0$ so klein, dass $x \in U$ falls $k \in K$ und $|x - k| < r$. Mit einer weiteren Abschneidefunktion erreichen wir, dass $(x, t) \wedge k$ auf den Basispunkt abgebildet wird, wenn $|x - k| \geq r$. Daher ist die obige Abbildung als Abbildung nach $U_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|0)$ homotop zu

$$C(\mathbb{R}^n|B_R(0)) \wedge K_+ \ni (x, t) \wedge k \longmapsto k \wedge (x - k, \psi(x)t) \in K_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|0) .$$

Mit Hilfe der Retraktionsabbildung p können wir diese Homotopie auf $K_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|0)$ „herunterdrücken“. Die obige Abbildung ist wiederum homotop zu

$$C(\mathbb{R}^n|B_R(0)) \wedge K_+ \ni (x, t) \wedge k \longmapsto k \wedge (x, \psi(x)t) \in K_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|0) ,$$

indem wir $x - k$ durch $x - sk$ ersetzen. Denn falls (x, t) nicht in der Basis des Kegels liegt (also falls $t < 1$), ist $|x| \geq R$, somit $x - sk \neq 0$ für alle $s \in I$.

Zu (1b) betrachten wir die Verkettung

$$\begin{aligned} C(\mathbb{R}^n|K) \wedge C(\mathbb{R}^n|B_R(0)) &\xrightarrow{\text{id} \wedge \eta_n} C(\mathbb{R}^n|K) \wedge K_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|K) \xrightarrow{\varepsilon_n \wedge \text{id}} C(\mathbb{R}^n|0) \wedge C(\mathbb{R}^n|K) \\ (y, u) \wedge (x, t) &\longmapsto (y, u) \wedge p(x) \wedge (x, \psi(x)t) \longmapsto (y - p(x), u) \wedge (x, \psi(x)t) . \end{aligned}$$

Wie im obigen Beweis dürfen wir annehmen, dass alle Punkte $(y, u) \wedge (x, t)$ auf den Basispunkt abgebildet werden, es sei denn $|y - p(x)| < r$ und $|x - p(x)| < r$; letzteres gilt bei geeigneter Wahl von r , da $p(x) = x$ für alle $x \in K$. Das nutzen wir aus, um zunächst im zweiten Faktor x in y zu deformieren. Anschließend homotopieren wir $y - p(x)$ im ersten Faktor zunächst zu $-p(x)$, dann zu $-x$. Die Abbildung $-\text{id}: C(\mathbb{R}^n|B_R(0)) \rightarrow C(\mathbb{R}^n|0)$ hat Abbildungsgrad $(-1)^n$ nach Folgerung 3.89, die obige Abbildung ist also homotop zu $(-1)^n \tau_0$. Mit Bemerkung 8.5 ist der Satz bewiesen. \square

Wir erinnern uns an den Whitney-Einbettungssatz 6.52, den Satz 6.51 von der Röhrenumgebung, die Definition 6.50 des Thom-Raumes eines Vektorbündels und die Definition 6.53 des stabilen Normalenbündels.

8.8. DEFINITION. Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Einbettung einer m -dimensionalen glatten geschlossenen Mannigfaltigkeit. Das *normale Thom-Spektrum* $\mathbb{M}\nu$ von f ist als Einhängungsspektrum definiert durch

$$M\nu_k = \begin{cases} \text{pt} & \text{falls } k < n, \text{ und} \\ S^{k-n}M\nu & \text{falls } k \geq n. \end{cases} \quad (1)$$

Wenn M einen Rand hat, definieren wir das *relative normale Thom-Spektrum* $\mathbb{M}\bar{\nu}$ durch

$$M\bar{\nu}_k = M\nu_k / M(\nu|_{\partial M})_k. \quad (2)$$

Der Raum $M\bar{\nu}_k$ heißt auch *relativer Thom-Raum*. Aus den Vorüberlegungen zu Definition 6.53 folgt, dass $\mathbb{M}\nu$ und $\mathbb{M}\bar{\nu}$ bis auf stabile Isomorphismen nicht von der Wahl der Einbettung f abhängen. An der folgenden Konstruktion erkennt man gut, dass Spanier-Whitehead-Dualität eine stabile Konstruktion ist.

8.9. FOLGERUNG. *Das relative normale Thom-Spektrum einer glatten kompakten Mannigfaltigkeit M mit Rand ist Spanier-Whitehead-dual zu M . Dabei faktorisiert die Koauswertungsabbildung $\eta_n: S^n \rightarrow M_+ \wedge M\bar{\nu}_n$ zu einer Einbettung $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ über die Kollaps-Abbildung $S^n \rightarrow M\bar{\nu}$.*

BEWEIS. Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Einbettung gemäß Satz 6.52, und es sei $D\nu_{\mathbb{R}^n}M \subset \mathbb{R}^n$ eine Röhrenumgebung gemäß Satz 6.51. Dann ist M Deformationsretrakt von $D\nu_{\mathbb{R}^n}M$, also ist $M \subset \mathbb{R}^n$ insbesondere ein Umgebungsretrakt. Wie im Beweis von Satz 8.7 ist $C(D\nu_{\mathbb{R}^n}M|M)$ ein Spanier-Whitehead-Dual von M vom Grad n , und $C(D\nu_{\mathbb{R}^n}M|M)$ ist homotopieäquivalent zum Thom-Raum $M\nu_{\mathbb{R}^n}M = M\nu_n$.

Wenn M einen Rand hat, können wir jede Einbettung $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ zu einer Einbettung

$$\bar{f}: \bar{M} = M \cup_{\partial M} (\partial M \times [0, \varepsilon]) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

fortsetzen, da ∂M kompakt ist. Dann ist M Retrakt einer Röhrenumgebung $D\bar{\nu}$ des Normalenbündels $\bar{\nu} \rightarrow \bar{M}$, und $C(D\bar{\nu}|M)$ ist homotopieäquivalent zu $M\bar{\nu}_n$. Die Abbildung η_n aus dem Beweis von Satz 8.7 lässt sich zerlegen als

$$\begin{aligned} \eta_n: C(\mathbb{R}^n|B_R(0)) &\xrightarrow{c} M\bar{\nu}_n \xrightarrow{(p \wedge \text{id}) \circ \Delta} M_+ \wedge M\bar{\nu}_n && \square \\ (x, t) &\longmapsto (x, \psi(x)t) \longmapsto p(x) \wedge (x, \psi(x)t), \end{aligned}$$

dabei ist $c: S^n \rightarrow M\bar{\nu}_n$ die Kollaps-Abbildung.

8.b. Orientierungen und Thom-Isomorphismen

Wir definieren einen geeigneten Orientierungsbegriff für topologische Mannigfaltigkeiten, und für eine bestimmte Art „Bündel“, und zwar als ganzzahlige Kohomologieklassen. Anschließend verallgemeinern wir diesen Begriff auf allgemeine multiplikative Kohomologiefunktoren. Danach beweisen wir den Thom-Isomorphismus-Satz.

Zur Motivation sei zunächst V ein reeller Vektorraum. Unter einer Orientierung von V versteht man eine Äquivalenzklasse gleich orientierter Basen, dabei heißen zwei Basen gleich orientiert, wenn die zugehörige Basiswechselmatrix positive Determinante hat. Ein Vektorraum mit Orientierung heißt *orientierter Vektorraum*. Der Raum \mathbb{R}^n trage fortan diejenige Orientierung, für die die Standardbasis (e_1, \dots, e_n) positiv orientiert ist. Ein linearer Isomorphismus $\varphi: V \rightarrow W$ orientierter Vektorräume heißt *orientiert*, wenn er orientierte Basen auf orientierte Basen abbildet.

Sei jetzt $p: V \rightarrow X$ ein reelles Vektorbündel vom Rang r wie in Abschnitt 6.f. Unter einer Orientierung von V verstehen wir eine Orientierung jeder einzelnen Faser, so dass es einen Atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ wie in Definition 6.33 gibt, für die alle $(\varphi_i|_{V_x})^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow V_x$ orientierte Isomorphismen sind, siehe Bemerkung 6.35 (2).

Für eine topologische Definition betrachten wir $g \in GL(r, \mathbb{R})$ als Abbildung $g: \mathbb{R}^r|0 \rightarrow \mathbb{R}^r|0$. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \cong \tilde{H}^{r-1}(\mathbb{R}^r) & \longrightarrow & \tilde{H}^{r-1}(\mathbb{R}^r \setminus \{0\}) & \xrightarrow[\cong]{\delta} & H^r(\mathbb{R}^r|0) & \longrightarrow & \tilde{H}^r(\mathbb{R}^r) \cong 0 \\ & & \downarrow g^* & & \downarrow g^* & & \\ 0 \cong \tilde{H}^{r-1}(\mathbb{R}^r) & \longrightarrow & \tilde{H}^{r-1}(\mathbb{R}^r \setminus \{0\}) & \xrightarrow[\cong]{\delta} & H^r(\mathbb{R}^r|0) & \longrightarrow & \tilde{H}^r(\mathbb{R}^r) \cong 0 \end{array}$$

für ganzzahlige Kohomologie. Die beiden mittleren Kohomologiegruppen sind jeweils isomorph zu \mathbb{Z} , da (D^r, S^{r-1}) ein Deformationsretrakt des Paares $\mathbb{R}^r|0$ ist. Nach Beispiel 3.47 hat die Abbildung g den Abbildungsgrad $\deg g = \text{sign det } g$, somit ist $g^* = \pm \text{id}$, je nachdem, ob g orientierungserhaltend ist oder nicht. Also verhalten sich die zwei Erzeuger von $H^r(\mathbb{R}^r|0) \cong \mathbb{Z}$ als \mathbb{Z} -Modul unter linearen Isomorphismen genau wie Orientierungen. Daher nennen wir einen Erzeuger von $H^r(\mathbb{R}^r|0)$ eine *Orientierung* des \mathbb{R}^r .

Um Orientierungen auf V zu erhalten, die stetig von Faser zu Faser variieren, identifizieren wir X mit dem Nullschnitt von V und erinnern uns an den Thom-Raum MV , der zu $C(V|X)$ homotopieäquivalent ist. Wir definieren eine \mathbb{Z} -Orientierung von V als eine Klasse $\omega \in H^\bullet(V|X)$, so dass $\iota_x^* \omega \in H^\bullet(V_x|0)$ den \mathbb{Z} -Modul $H^\bullet(V_x|0) \cong H^\bullet(\mathbb{R}^n|0) \cong \mathbb{Z}$ für alle $x \in X$ erzeugt; dabei sei $\iota_x: V_x \rightarrow V$ die Inklusionsabbildung.

Diesen Orientierungsbegriff verallgemeinern wir für beliebige multiplikative Kohomologiefunktor. Sei \mathbb{E} ein Ringspektrum. Wir nennen ein Element $\alpha \in E^\bullet(\mathbb{R}^r|0)$ einen *Erzeuger*, wenn die Abbildung

$$E_\bullet(\mathbb{R}^r|0) \longrightarrow E^\bullet \quad \text{mit} \quad a \longmapsto \langle a, \alpha \rangle$$

ein Isomorphismus ist. Zwei Erzeuger unterscheiden sich um eine Einheit des Koeffizientenrings E^\bullet . Im Falle gewöhnlicher Kohomologie ist α vom Grad r , aber das muss für allgemeine \mathbb{E} nicht so sein.

8.10. DEFINITION. Es sei E ein multiplikativer Kohomologiefunktor und $V \rightarrow X$ ein Vektorbündel vom Rang r . Eine *E-Orientierung* oder auch *Thom-Klasse* von V im Grad n ist ein Element $\omega \in E^n(V|X)$, so dass $\iota_x^* \omega$ für alle $x \in X$ den E^\bullet -Modul $E^\bullet(V_x|x)$ erzeugt.

Für einen Ring R sprechen wir von R -Orientierbarkeit, wenn Orientierungen bezüglich des Eilenberg-Mac Lane-Spektrums $\mathbb{H}R$ gemeint sind.

8.11. BEMERKUNG. Nicht jedes Vektorbündel ist orientierbar. Beispielsweise ist das Möbiusband nicht \mathbb{Z} -orientierbar, denn bei einem Umlauf um die Basis S^1 geht jeder Erzeuger in sein Negatives über.

Die obige Vorüberlegung legt nahe, eine Überlagerung $X_{V,\mathbb{E}} \rightarrow X$ der punktweisen E -Orientierungen von V einzuführen. Als Faser $X_{V,\mathbb{E},x}$ wählen wir die Menge aller Erzeuger von $E^\bullet(V_x|x) \cong E^{\bullet+m}$, und lokale Trivialisierungen von $X_{V,\mathbb{E}}$ konstruieren wir mit Hilfe der lokalen Trivialisierungen von V aus Definition 6.33. Dann liefert jede E^\bullet -Orientierung ω von V einen Schnitt $o: X \rightarrow X_{V,\mathbb{E}}$

mit $o(x) = \iota_x^* \omega$; diese Abbildung ist für allgemeine \mathbb{E} aber weder injektiv noch surjektiv. Für gewöhnliche Kohomologie erhalten wir Bijektivität mit Hilfe des Dimensionsaxioms, vergleiche [H1, Theorem 3.26].

Im folgenden Satz nutzen wir aus, dass $p: V \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz ist. In der relativen Situation $V \rightarrow (X, Y)$ betrachten wir wie in Definition 8.8 den relativen Thom-Raum

$$M\bar{V} = MV/M(p^{-1}(Y)) .$$

8.12. SATZ (Thom-Isomorphismus). *Es sei \mathbb{E} ein Ringspektrum und \mathbb{F} ein Rechts- \mathbb{E} -Modulspektrum. Es sei $p: V \rightarrow X$ ein Vektorbündel vom Rang r über einem endlichen CW-Komplex X , und es sei $\omega \in E^n(V|X)$ eine E -Orientierung. Für jeden Unterkomplex $Y \subset X$ gibt es Isomorphismen*

$$\vartheta_{k+n}: \tilde{F}_{k+n}(M\bar{V}) \xrightarrow{\smile \omega} F_k(V, V|_Y) \xrightarrow{p_*} \tilde{F}_k(X/Y) \quad (1)$$

$$\text{und} \quad \vartheta^k: \tilde{F}^k(X/Y) \xrightarrow{p^*} F^k(V, V_Y) \xrightarrow{\smile \omega} \tilde{F}^{n+k}(M\bar{V}) . \quad (2)$$

Die Voraussetzungen an X können weiter abgeschwächt werden; das erfordert allerdings zusätzliche Argumente. Für das Folgende reicht uns die obige Variante.

BEWEIS. Wir beginnen mit dem Fall $Y = \emptyset$. Wenn das Bündel $V \cong \mathbb{R}^r \times X$ trivial ist, dann ist der Thom-Raum homotopieäquivalent zu

$$C(V|X) = C(\mathbb{R}^r|0) \wedge X_+ \simeq S^r X_+ .$$

Es $\omega = s^r \omega_0$ mit $\omega_0 \in E^{n-r}(X)$. Fixiere $x_0 \in X$ und $\iota: \{x_0\} \rightarrow X$. Da $\iota^* \omega_0 \in E^{n-r}(\{x_0\}) \cong E^{n-r}$ nach Voraussetzung ein Erzeuger vom Grad $n-r$ ist, können wir auf beiden Seiten der Abbildungen (1), (2) mit seinem Inversem multiplizieren, und erhalten genau dann Isomorphismen, wenn die ursprünglichen Abbildungen Isomorphismen waren.

Wir dürfen in diesem Schritt daher $n = r$ und $\iota_+^* \omega_0 = 1$ annehmen. Es folgt $\omega_0 = 1 + \alpha \in E^0(X)$ mit $\alpha \in \ker \iota_+^* = \tilde{E}^0(X)$ und $\omega = s^r(1 + \alpha)$. Wir nehmen zunächst an, dass X zusammenhängend und m -dimensional ist. Nach Proposition 7.44 gilt $\alpha^{m+1} = 0$, daher ist $(1 + \alpha)$ invertierbar mit

$$(1 + \alpha)^{-1} = 1 - \alpha + \alpha^2 - \dots + (-1)^m \alpha^m ,$$

und die Abbildungen (1), (2) sind Isomorphismen. Wenn X nicht zusammenhängend ist, betrachten wir jede Zusammenhangskomponente einzeln und erhalten das gleiche Ergebnis.

Falls $V \rightarrow X$ nicht trivial ist, können wir die CW-Struktur auf X durch Unterteilen verfeinern und X als Vereinigung endlich vieler CW-Komplexe X_1, \dots, X_N schreiben, auf denen V trivial ist. Wir schließen durch Induktion über N ; den Fall $N = 1$ haben wir bereits behandelt. Seien also (1) und (2) Isomorphismen für alle CW-Komplexe, für die eine $(N-1)$ -fache Vereinigung $Y = X_1 \cup \dots \cup X_{N-1}$ ausreicht. Dann trifft das auch auf $Z = (X_1 \cup \dots \cup X_{N-1}) \cap X_N$ zu. Wir schreiben V_Y und V_Z für die Einschränkungen von V und betrachten ein kommutatives Diagramm aus Mayer-Vietoris-Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & F_{k+n}(V_Z|Z) & \longrightarrow & F_{k+n}(V_Y|Y) \oplus F_{k+n}(V_{X_N}|X_N) & \longrightarrow & F_{k+n}(V|X) & \xrightarrow{\partial} & F_{k+n-1}(V_Z|Z) & \longrightarrow \\ & \vartheta_{k+n} \downarrow \cong & & \vartheta_{k+n} \downarrow \cong & & \vartheta_{k+n} \downarrow & & \vartheta_{k+n} \downarrow \cong & \\ \longrightarrow & F_k(Z) & \longrightarrow & F_k(Y) \oplus F_k(X_N) & \longrightarrow & F_k(X) & \xrightarrow{\partial} & F_{k-1}(Z) & \longrightarrow . \end{array}$$

Aus dem Fünfer-Lemma folgt die Behauptung.

Für $Y \neq \emptyset$ folgt die Behauptung mit dem Fünferlemma aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & \tilde{F}_{k+n}(M(V|Y)) & \longrightarrow & \tilde{F}_{k+n}(MV) & \longrightarrow & \tilde{F}_{k+n}(M\bar{V}) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{F}_{k+n-1}(M(V|Y)) & \longrightarrow \\
& \vartheta_{k+n} \downarrow \cong & & \vartheta_{k+n} \downarrow \cong & & \vartheta_{k+n} \downarrow & & \vartheta_{k+n} \downarrow \cong & \\
\longrightarrow & F_k(Y) & \longrightarrow & F_k(X) & \longrightarrow & F_k(X, Y) & \xrightarrow{\partial} & F_{k-1}(Y) & \longrightarrow .
\end{array}$$

Genauso beweist man (2). □

Üblicherweise nennt man eine glatte Mannigfaltigkeit E -orientiert, wenn ihr Tangentialbündel eine E -Orientierung trägt. Wir haben bisher aber nur mit dem Normalenbündel gearbeitet. Sei $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Einbettung mit Normalenbündel $\nu M \rightarrow M$. Dann zerfällt \mathbb{R}^n für alle $x \in M$ als direkte Summe in $\nu_x M$ und $T_x M$. Für die Whitney-Summe gilt daher

$$\nu M \oplus TM \cong \underline{\mathbb{R}^n} \rightarrow M .$$

Das reicht, um mit Hilfe des Thom-Isomorphismus normale und tangentielle Orientierungen zu vergleichen. Denn das triviale Bündel lässt sich immer orientieren, indem man einen Erzeuger von E^\bullet mit der Abbildung $q: C(\mathbb{R}^n|X) \rightarrow C(\mathbb{R}^n|0)$ zurückzieht. Wenn nichts anderes gesagt wird, wählen wir dazu die *Standardorientierung* $\omega_{\mathbb{R}^n} = q^*(s^n \varepsilon)$.

8.13. FOLGERUNG. *Es sei X ein endlicher CW-Komplex, und es seien $V, W \rightarrow X$ reelle Vektorbündel. Wenn zwei der drei Bündel V, W und $U = V \oplus W$ Orientierungen ω_V, ω_W beziehungsweise ω_U tragen, dann lässt sich die dritte Orientierung eindeutig so festlegen, dass*

$$\omega_U = q^* \omega_V \smile p^* \omega_W \in C(U|X) .$$

BEWEIS. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
U & \longrightarrow & V \\
\downarrow & & \downarrow p \\
W & \xrightarrow{q} & X .
\end{array}$$

Es gilt $DU \cong p^*DW = q^*DV$ und $SU \cong q^*SV \cup p^*SW$. Es folgt, dass $DU_x/SU_x \cong DV_x/SV_x \wedge DW_x/SW_x$ für alle $x \in X$. Der Thom-Raum $MV = DV/SV$ ist zu den relativen Thom-Räumen von $p^*W \rightarrow (DV, SV)$ und von $q^*V \rightarrow (DW, SW)$ homöomorph. Wir ziehen eine gegebene Orientierung $\omega_W \in \tilde{E}^m(MW)$ längs $p: DV \rightarrow X$ zurück zu $p^* \omega_W \in \tilde{E}^m(M(p^*W))$ und betrachten den relativen Thom-Isomorphismus

$$\cdot \smile (p^* \omega_W): \tilde{E}^k(MV) \longrightarrow \tilde{E}^{k+m}(MU) .$$

Gegeben ω_V erhalten wir ein eindeutiges ω_U wie in der Proposition und umgekehrt. Indem wir auf die Fasern an der Stelle $x \in X$ einschränken, sehen wir, dass mit zweien auch die dritte Klasse eine Orientierung ist. □

8.c. Poincaré-Lefschetz-Dualität

Aus Spanier-Whitehead-Dualität leiten wir mit Hilfe des Thom-Isomorphismus Poincaré-Dualität ab. Wir diskutieren einige Schlussfolgerungen. Insbesondere betrachten wir die Schnittform. Da wir Thom-Isomorphismen unter sehr restriktiven Bedingungen konstruiert haben, können wir Poincaré-Dualität nur für glatte geschlossene Mannigfaltigkeiten beweisen. Dazu benötigen wir ein weiteres Resultat aus der Differentialtopologie.

8.14. SATZ (Morse). *Jede glatte Mannigfaltigkeit trägt eine CW-Struktur.*

Es sei jetzt M eine E -orientierte glatte kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand und $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Einbettung. Gemäß Folgerung 8.13 gibt es also eine normale Orientierung $\omega_\nu \in E^{n-r}(M\nu)$. Da ν vom Rang $n - m$ ist, wird in vielen Fällen $r = m$ gelten, das muss aber nicht zwangsläufig so sein. Außerdem induziert die Spanier-Whitehead Dualität aus Folgerung 8.9 eine Klasse $\eta_n \in \pi_n^s(M_+ \wedge M\bar{\nu}_n)$ wie in Bemerkung 8.5. Die Verkettung der kohomologischen Spanier-Whitehead-Dualität mit den relativen Thom-Isomorphismen aus Satz 8.12 ergibt Isomorphismen

$$F^k(M) \xrightarrow{\eta_n/} \tilde{F}_{n-k}(M\bar{\nu}_n) \xrightarrow{\sim\omega} F_{r-k}(M, \partial M) \quad \text{mit} \quad \alpha \mapsto ([\eta_n]/\alpha) \frown \omega,$$

und

$$F^k(M, \partial M) \xrightarrow{\sim\omega} \tilde{F}^{k+n-r}(M\bar{\nu}_n) \xrightarrow{\eta_n/} F_{r-k}(M) \quad \text{mit} \quad \beta \mapsto (\tau_*[\eta_n]) / (\beta \smile \omega).$$

Diese Isomorphismen heißen (bis auf das Vorzeichen) Poincaré-Dualität ($\partial M = \emptyset$) oder Lefschetz-Dualität. Die Hauptaufgabe in diesem Abschnitt besteht darin, eine Darstellung der Form $\alpha \mapsto [M] \frown \alpha$ für beide Isomorphismen zu finden, wobei $[M] \in \tilde{E}^r(M, \partial M)$ nur von der gewählten E -Orientierung abhängt. Dann erhält man in beiden Fällen Isomorphismen von Rechts- $E^\bullet(M)$ -Modulen.

8.15. DEFINITION. Es sei M eine kompakte, E -orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand. Eine E -Fundamentalklasse von M ist eine Klasse $a \in E_r(M/\partial M)$, so dass das Bild $a|x \in E_r(M|x)$ von a unter der induzierten Abbildung $E_r(M) \rightarrow E_r(M|x)$ für alle $x \in \overset{\circ}{M}$ ein Erzeuger ist.

Sei $\omega \in E^{n-r}(M\nu)$ eine normale Orientierung. Mit Bemerkung 8.5 sieht man, dass das Spanier-Whitehead-Dual

$$[M] = ([\eta_n]/1) \frown \omega \in E_r(M/\partial M)$$

von ω eine Fundamentalklasse ist; dazu schränkt man ω zunächst auf eine zu D^m homöomorphe Untermannigfaltigkeit ein.

8.16. SATZ (Poincaré-Lefschetz-Dualität). *Es sei \mathbb{E} ein kommutatives Ringspektrum und \mathbb{F} ein \mathbb{E} -Modulspektrum. Es sei M eine kompakte glatte m -dimensionale, E -orientierte Mannigfaltigkeit mit Fundamentalklasse $[M] \in E_r(M, \partial M)$. Es sei $\partial M = A \cup B$, wobei $A \cap B$ eine $(m - 2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von ∂M sei. Dann induziert das Cap-Produkt mit $[M]$ einen Isomorphismus von Rechts- $E^\bullet(M)$ -Modulen, der für alle k gegeben ist durch*

$$\varphi = [M] \frown \cdot : F^k(M, A) \longrightarrow F_{r-k}(M, B).$$

Wir haben aus rein technischen Gründen vorausgesetzt, dass M glatt ist. Falls M nicht glatt ist, erhält man Poincaré-Lefschetz-Dualität ohne den Umweg über Spanier-Whitehead-Dualität und Thom-Isomorphismus, muss jedoch etwas mehr arbeiten. Ohne die Voraussetzung, dass \mathbb{E} kommutativ ist, erhält man immer noch Isomorphismen von abelschen Gruppen für jedes k , siehe [Ad], wenn man \mathbb{F} als Links- \mathbb{E} -Modulspektrum auffasst. Wir führen den ganzen Beweis mit den obigen Annahmen, was ihn etwas vereinfacht.

BEWEIS. Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Einbettung, und es sei $\omega \in E^{n-r}(M\nu)$ die zur E -Orientierung von M passende Thom-Klasse des Normalenbündels. Nach Folgerung 8.9 faktorisiert die Koauswertungsabbildung $\eta_n: S^n \rightarrow M_+ \wedge M\bar{\nu}_n$ über $\bar{\eta}_n: S^n \rightarrow M\bar{\nu}_n$. Mit $1 \in [M_+, S^0]$ folgt

$$[\eta_n]/1 = [\bar{\eta}_n] \quad \text{und} \quad [M] = p_*([\bar{\eta}_n] \frown \omega).$$

Im Fall $A = \emptyset$, $\alpha \in F^k(M)$ erhalten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_n(M\bar{\nu}_n) & \xleftarrow{\sim 1} & \pi_n(M\bar{\nu}_n) & \xrightarrow{\sim\omega} & \tilde{E}_r(D\nu/D(\nu\partial M)) & \xrightarrow[\cong]{p_*} & E_r(M, \partial M) \\ \uparrow /p^*1 & & \Delta_* \swarrow & & \downarrow \sim p^*\alpha & & \downarrow \frown\alpha \\ \pi_n(D\nu_+ \wedge M\bar{\nu}_n) & \xrightarrow{/p^*\alpha} & \tilde{F}_{n-k}(M\bar{\nu}_n) & \xrightarrow{\sim\omega} & \tilde{E}_r(D\nu/D(\nu\partial M)) & \xrightarrow[\cong]{p_*} & F_{r-k}(M, \partial M), \end{array}$$

(-1)^{k(n-r)} (-1)^{k(n-r)}

in dem das mittlere Quadrat bis auf das angegebene Vorzeichen kommutiert. Dabei haben wir benutzt, dass $p: D\nu_+ \rightarrow M_+$ eine Homotopieäquivalenz ist. Nach Vorüberlegung erhalten wir den gesuchten Isomorphismus

$$\varphi: F^k(M) \xrightarrow{\cong} F_{r-k}(M, \partial M) \quad \text{mit} \quad \alpha \mapsto (-1)^{k(n-r)}([\eta_n]/\alpha) \frown \omega = [M] \frown \alpha .$$

Im Fall $B = \emptyset$, $\beta \in F^k(M, \partial M)$ betrachten wir analog das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} & & \tilde{E}_r(D\nu/D(\nu_{\partial M})) & & & & \\ & \nearrow \frown p^*\omega & & \searrow \frown p^*\beta & & & \\ \pi_n(M\bar{\nu}_n) & \xrightarrow{\frown p^*\beta} & F_{n-k}(M\nu_n) & \xrightarrow{\frown p^*\omega} & F_{r-k}(D\nu) & \xrightarrow[p_*]{\cong} & F_{r-k}(M) \\ \Delta_* \downarrow & & \Delta_* & \nearrow /p^*(\beta \smile \omega) & & & \\ \pi_n(D\nu_+ \wedge M\bar{\nu}_n) & \xrightarrow{\tau_*} & \pi_n(M\bar{\nu}_n \wedge D\nu_+) & & & & \end{array}$$

und erhalten einen Isomorphismus

$$\varphi: F^k(M, \partial M) \xrightarrow{\cong} F_{r-k}(M) \quad \text{mit} \quad \beta \mapsto (1)^{k(n-r)}(\tau_*[\eta_n]) / (\beta \smile \omega) = [M] \frown \beta .$$

Fortsetzung folgt ... □

Wir betrachten jetzt gewöhnliche (Ko-) Homologie mit Koeffizienten \mathbb{Z} . Als erstes geben wir ein kohomologisches Kriterium für die Existenz einer Orientierung an. Dabei bedeutet „Orientierung“ ohne Angabe eines Ringes oder Spektrums immer \mathbb{Z} - oder genauer $H\mathbb{Z}$ -Orientierung.

8.17. PROPOSITION. *Es sei M eine zusammenhängende glatte m -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann trägt M genau dann eine \mathbb{Z} -Orientierung, wenn $H_m(M, \partial M) \cong \mathbb{Z}$ gilt. In diesem Fall ist M bezüglich jeder gewöhnlichen Homologietheorie orientierbar. Falls M keine \mathbb{Z} -Orientierung trägt, gilt $H_m(M, \partial M) = 0$.*

Des weiteren ist M bezüglich jeder gewöhnlichen R -Homologietheorie orientierbar, falls R nur 2-Torsionselemente enthält.

BEWEIS. Falls M eine Orientierung trägt, folgt aus Poincaré-Lefschetz-Dualität 8.16, dass

$$H_m(M, \partial M) \cong H^1(M) \cong \mathbb{Z} .$$

Sei umgekehrt $H_m(M, \partial M) \cong \mathbb{Z}$, und sei $[M]$ ein Erzeuger als \mathbb{Z} -Modul. Fortsetzung folgt ... □

8.18. BEISPIEL. Sphären, Tori, komplex und quaternionisch projektive Räume sind stets orientierbar.

Der reell projektive Raum $\mathbb{R}P^m$ ist nach Beispiel 5.21 genau dann orientierbar, wenn m ungerade ist.

In den folgenden Überlegungen dürfen wir \mathbb{Z} durch einen beliebigen Hauptidealring R ersetzen. Es sei A ein endlich erzeugter \mathbb{Z} -Modul. Aus den Übungen 5.103–5.106 schließen wir, dass es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_{\mathbb{Z}} A \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A / \text{Tor}_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow 0$$

gibt, in der $A / \text{Tor}_{\mathbb{Z}} A$ ein freier Modul ist. Mit dem universellen Koeffiziententheorem 6.16 erhalten wir natürliche Isomorphismen

$$\begin{aligned} H^k(M) / \text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^k(M) &\xrightarrow[\cong]{\langle \cdot, \cdot \rangle} \text{hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(M), \mathbb{Z}) \xrightarrow[\cong]{\varphi^*} \text{hom}_{\mathbb{Z}}(H^{m-k}(M) / \text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{m-k}(M), \mathbb{Z}) \quad (8.3) \\ [\alpha] &\longmapsto \langle \cdot, \alpha \rangle \longmapsto \langle [M] \frown \cdot, \alpha \rangle = \langle [M], \cdot \smile \alpha \rangle . \end{aligned}$$

Im mittleren Schritt haben wir ausgenutzt, dass jeder Homomorphismus nach \mathbb{Z} auf dem Torsionsuntermodul verschwindet. Dabei heißt „natürlich“ hier allerdings nur, dass die Isomorphismen verträglich sind mit Abbildungen $f: M \rightarrow N$ zwischen orientierten Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension vom Abbildungsgrad 1, das heißt, mit $f_*[M] = [N]$.

8.19. FOLGERUNG. *Es sei M eine glatte, geschlossene, orientierbare Mannigfaltigkeit. Wenn eine Klasse $\alpha \in H^k(M)$ primitiv ist in dem Sinne, dass es keine Klasse γ und kein $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ mit $\alpha = n\gamma$ gibt, dann existiert eine Klasse $\beta \in H^{m-k}(M)$, so dass $\alpha \smile \beta$ ein Erzeuger von $H^m(M) \cong \mathbb{Z}$ ist.*

BEWEIS. Wenn M nicht zusammenhängend ist, betrachten wir die Zusammenhangskomponenten einzeln. Als erstes überlegt man sich, dass Torsionsklassen nie primitiv sind, denn aus $n\alpha = 0$ folgt $(n+1)\alpha = \alpha$. Wenn α primitiv ist, dann kann man α zu einer Basis von $H^k(M)/\text{Tor}_{\mathbb{Z}}(M)$ ergänzen. Aufgrund der obigen Isomorphismen gibt es ein Element β in der dazu dualen Basis von $H^{m-k}(M)/\text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H^{m-k}(M))$, so dass $\langle [M], \beta \smile \alpha \rangle = 1$. Aufgrund von Poincaré-Dualität ist $\beta \smile \alpha = \pm \alpha \smile \beta$ dann ein Erzeuger des \mathbb{Z} -Moduls $H^m(M)$. \square

8.20. BEMERKUNG. Es sei \mathbb{k} ein Körper. Wir erinnern uns an die Definition der Betti-Zahlen und der Eulerzahl aus Definition 5.30, betrachten hier allerdings *unreduzierte* Betti-Zahlen $b_k(M; \mathbb{k}) = \dim H_k(M; \mathbb{k})$.

(1) Nach dem universellen Koeffiziententheorem 6.16 gilt

$$b_k(M; \mathbb{k}) = \dim H_k(M; \mathbb{k}) = \dim H^k(M; \mathbb{k}) .$$

Wenn M orientiert ist, ist wegen Folgerung 8.19 die Paarung $H^k(M; \mathbb{k}) \times H^{m-k}(M; \mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k}$ mit $(\alpha, \beta) \mapsto \langle [M], \alpha \smile \beta \rangle$ nicht ausgeartet. Folglich gilt

$$b_k(M; \mathbb{k}) = b_{m-k}(M; \mathbb{k}) .$$

(2) Wenn M außerdem zusammenhängend ist, gilt $\tilde{H}_k(M; \mathbb{k}) = 0$ für alle $k \leq 0$ nach Proposition 5.45. Wegen Bemerkung 5.5 (3) folgt $H_k(M) \cong 0$ für $k < 0$ und $H_0(M) \cong \mathbb{Z}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} b_k(M; \mathbb{k}) &= 0 && \text{für alle } k < 0 \text{ und alle } k > m, \text{ und} \\ b_0(M; \mathbb{k}) &= b_m(M; \mathbb{k}) = 1 . \end{aligned}$$

Wir dürfen $\langle [M], \cdot \smile \cdot \rangle$ auf $H^k(M) \times H^{m-k}(M)$ betrachten. Wegen Proposition 7.39 (4) gilt

$$\langle [M], \beta \smile \alpha \rangle = (-1)^{k(m-k)} \langle [M], \alpha \smile \beta \rangle$$

für $\alpha \in H^k(M; R)$ und $\beta \in H^{m-k}(M; R)$. Das Produkt verschwindet, wenn einer der beiden Faktoren ein Torsionselement ist. Auch dieses Produkt lässt sich für geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeiten definieren, die nicht glatt sein müssen.

8.21. DEFINITION. Es sei M eine orientierte, geschlossene, glatte Mannigfaltigkeit, und R ein Hauptidealring oder ein Körper, dann heißt

$$\langle [M], \cdot \smile \cdot \rangle: H^k(M)/\text{Tor}_R H^k(M) \times H^k(M)/\text{Tor}_R H^k(M) \rightarrow R$$

das *Schnittprodukt* auf $H^\bullet(M; R)/\text{Tor}_R H^\bullet(M; R)$.

Es sei $m = \dim M = 2n$ gerade, dann ist die *Schnittform* Q_R von M gerade die Einschränkung des Schnittproduktes auf $H^n(M; R)/\text{Tor}_R H^n(M; R)$. Wenn $4|m$ gilt, seien $b_n^\pm(M) = b_n^\pm(M; \mathbb{R})$ die maximalen Dimensionen von Unterräumen von $H^n(M; \mathbb{R})$, auf denen $Q_{\mathbb{R}}$ positiv beziehungsweise negativ definit ist. Dann heißt $\sigma(M) = b_n^+(M) - b_n^-(M)$ die *Signatur* von M .

Man beachte, dass $Q_{\mathbb{R}}$ nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz, durch $\sigma(M)$ bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt ist.

8.22. BEMERKUNG. Es sei M eine orientierbare, geschlossene, glatte Mannigfaltigkeit der Dimension m .

(1) Wenn m ungerade ist, verschwindet die Eulerzahl, denn

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^m (-1)^k b_k(M; \mathbb{k}) = \sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}} ((-1)^k + (-1)^{m-k}) b_k(M; \mathbb{k}) = 0.$$

(2) Wenn $m = 2n$ und n gerade ist, haben $\chi(M)$, $\sigma(M)$ und $b_n(M; \mathbb{R})$ die gleiche Parität, denn

$$\chi(M) - b_n(M; \mathbb{R}) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} b_k(M; \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad b_n(M; \mathbb{R}) - \sigma(M) = 2b_n^-(M).$$

(3) Wenn $m = 2n$ und n ungerade ist, ist $b_n(M; \mathbb{R})$ gerade, denn nur auf gerade-dimensionalen \mathbb{R} -Vektorräumen gibt es nicht-ausgeartete antisymmetrische Bilinearformen.

8.23. BEISPIEL. Die *zusammenhängende Summe* $M = M_1 \# M_2$ zweier m -dimensionaler glatter Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 wird konstruiert, indem man aus jeder Mannigfaltigkeit eine zu $D^m \subset \mathbb{R}^m$ diffeomorphe Teilmenge wählt, ihr Inneres B^m entfernt, und beide Mannigfaltigkeiten entlang der entstandenen Ränder S^{m-1} mit einer Isometrie verklebt. Das Resultat ist wieder eine glatte Mannigfaltigkeit. Wenn M_1 und M_2 zusammenhängend sind, hängt das Resultat bis auf Diffeomorphie nicht von der Wahl der Teilmenge D^m ab, jedoch unter Umständen davon, welche der beiden Homotopieklasse von Isometrien $S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ man wählt. Deshalb fixiert man Orientierungen von M_1 und M_2 und verklebt so, dass M eine Orientierung trägt, die sich zu der gegebenen Orientierung auf $M_i \setminus D^m$ einschränkt.

Es sei $\mathbb{C}P^2$ die komplex projektive Ebene mit einer festen Orientierung, so dass $\mathbb{C}P^2$ Signatur 1 hat. Mit $\overline{\mathbb{C}P^2}$ bezeichnen wir die entgegengesetzt orientierte projektive Ebene. Es gibt keinen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus zwischen ihnen, da $\overline{\mathbb{C}P^2}$ Signatur -1 hat.

Wir betrachten $M = \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ und $M' = \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$. Mit der Mayer-Vietoris-Sequenz 6.3 überprüft man, dass

$$H^k(M) \cong H^k(M') \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k = 0 \text{ oder } k = 4, \\ \mathbb{Z}^2 & \text{falls } k = 2, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dennoch sind M und M' nicht diffeomorph, denn M hat eine definite und M' eine indefinite Schnittform (Übung).

Es gibt auch ein Analogon zu (8.3) für Torsions-Elemente. Dazu sei A ein \mathbb{Z} -Modul und $\alpha \in \text{Ext}(A, \mathbb{Z})$. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$ und stellen M mit Satz 8.14 als endlichen CW-Komplex dar. Wir erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^k(M; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & C^k(M; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & C^k(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \\ & & \delta \downarrow & & \delta \downarrow & & \delta \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C^{k+1}(M; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & C^{k+1}(M; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & C^{k+1}(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0. \end{array}$$

von Kokettenkomplexen. Es sei jetzt $\beta \in C^{k+1}(M; \mathbb{Z})$ geschlossen mit $[\beta] \in \text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{k+1}(M; \mathbb{Z})$, und es sei $n > 0$ minimal mit $n[\beta] = 0$. Dann existiert $\gamma \in C^k(M; \mathbb{Z})$ mit $\delta\gamma = n\beta$, und wir betrachten

das Bild $\bar{\beta}$ von $\frac{\gamma}{n}$ in $C^k(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Es gilt $\delta\bar{\beta} = 0 \in C^{k+1}(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Somit repräsentiert $[\bar{\beta}] \in H^k(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ein Urbild von $[\beta]$ unter δ in der Kohomologie-Sequenz

$$\cdots \longrightarrow H^k(M; \mathbb{Q}) \longrightarrow H^k(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(M; \mathbb{Z}) \longrightarrow \underbrace{H^{k+1}(M; \mathbb{Q})}_{\cong \text{hom}_{\mathbb{Z}}(H_{k+1}(M), \mathbb{Q})} \longrightarrow \cdots .$$

Da \mathbb{Q} und \mathbb{Q}/\mathbb{Z} divisibel sind, gilt nach Proposition 5.66 und dem universellen Koeffiziententheorem 6.16, dass

$$H^k(M; \mathbb{Q}) \cong \text{hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(M), \mathbb{Q}) \quad \text{und} \quad H^k(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \text{hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) .$$

Nun ist $\bar{\beta}$ nur bis auf ein Element von $\text{hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(M), \mathbb{Q})$ bestimmt, aber diese Abbildungen verschwinden auf $\text{Tor}_{\mathbb{Z}} H_k(M)$. Zusammen mit Poincaré-Dualität 8.16 erhalten wir ein wohldefiniertes Produkt

$$(\cdot, \cdot): \text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{m-k}(M) \times \text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{k+1}(M) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad (\alpha, \beta) = \langle [M] \frown \alpha, \bar{\beta} \rangle . \quad (8.4)$$

8.24. DEFINITION. Es sei M eine glatte, geschlossene, orientierte m -dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann heißt das obige Produkt $(\cdot, \cdot): \text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{m-k}(M) \times \text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{k+1}(M) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ das *Verschlingungsprodukt* auf $\text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{\bullet}(M)$. Falls $\dim M = 2n - 1$ ungerade ist, ist die *Verschlingungsform* q von M die Einschränkung des Verschlingungsproduktes auf $\text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^n(M)$.

8.25. PROPOSITION. *Es sei M eine glatte, geschlossene, orientierte Mannigfaltigkeit. Das Verschlingungsprodukt ist nicht ausgeartet, das heißt, zu jedem $\alpha \in \text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{k+1}(M) \setminus \{0\}$ existiert ein $\beta \in \text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{m-k}(M)$ mit $(\alpha, \beta) \neq 0$. Seien $p, q > 0$ minimal mit $p\alpha = q\beta = 0$, dann gilt $(\alpha, \beta) \in (\frac{1}{\text{ggT}(p,q)}\mathbb{Z})/\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Für $\alpha \in H^{k+1}(M)$ und $\beta \in H^{m-k}(M)$ gilt*

$$(\beta, \alpha) = -(-1)^{km}(\alpha, \beta) .$$

Insbesondere ist die Verschlingungsform symmetrisch, wenn $m \equiv 3 \pmod{4}$, und antisymmetrisch, wenn $m \equiv 1 \pmod{4}$. Anstelle des „unnatürlichen“ Isomorphismus zwischen $\text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{m-k}(M) \cong \text{Tor}_{\mathbb{Z}} H_k(M)$ und $\text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{k+1}(M)$ liefert das Verschlingungsprodukt eine nicht ausgeartete Paarung, ähnlich wie es das Schnittprodukt für die freien Anteile tut.

BEWEIS. Als erstes überlegt man sich, dass es eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{aligned} H^k(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) / \text{im } H^k(M; \mathbb{Q}) &\cong \text{hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) / \text{im } \text{hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(M), \mathbb{Q}) \\ &\longrightarrow \text{hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Tor}_{\mathbb{Z}} H_k(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

gibt, da \mathbb{Q} -wertige Abbildungen auf Torsionselementen verschwinden. Dann überprüft man, dass die Abbildung ein Isomorphismus ist. Da $0 \neq \bar{\alpha} \in H^k(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) / \text{im } H^k(M; \mathbb{Q})$, existiert also ein $b \in \text{Tor}_{\mathbb{Z}} H_k(M)$ mit $\langle b, \bar{\alpha} \rangle \neq 0$, und wir wählen $\beta = \varphi^{-1}b$.

Es seien $\alpha \in C^{k+1}(M; \mathbb{Z})$, $\beta \in C^{m-k}(M; \mathbb{Z})$ und p, q wie oben gegeben. Wir betrachten $\bar{\alpha} \in C^k(M; \mathbb{Q})$ und $\bar{\beta} \in C^{m-k-1}(M; \mathbb{Z})$, so dass $p\bar{\alpha}$ und $q\bar{\beta}$ ganzzahlig sind mit $\delta(p\bar{\alpha}) = p\alpha$ und $\delta(q\bar{\beta}) = q\beta$. Dann gilt

$$0 = \langle [M], \delta(\bar{\alpha} \smile \bar{\beta}) \rangle = \langle [M], \alpha \smile \bar{\beta} \rangle + (-1)^k \langle [M], \bar{\alpha} \smile \beta \rangle = (\alpha, \beta) + (-1)^{k(m-k-1)}(\beta, \alpha) ,$$

außerdem ist $(-1)^{k(k+1)} = 1$.

Um die letzte Behauptung zu zeigen, schreiben wir $\text{ggT}(p, q) = ap + bq$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und berechnen

$$\text{ggT}(p, q) \cdot (\alpha, \beta) = a(p\alpha, \beta) + b(\alpha, q\beta) = 0 . \quad \square$$

8.26. BEMERKUNG. Wir können außerdem den Satz 5.48 von Hurewicz benutzen, um die erste nichtverschwindende reduzierte Homologiegruppe zu bestimmen. Sei etwa M eine geschlossene, orientierbare, zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit. Dann gilt $H_1(M) \cong \pi_1(M)^{\text{ab}} \cong H^2(M)$, und $H^1(M) \cong \text{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z}) \cong H_2(M)$ sind isomorph zum freien Anteil $H_1(M)/\text{Tor}_{\mathbb{Z}} H_1(M)$. Also werden alle (Ko-) Homologiegruppen bis auf Isomorphie von $\pi_1(M)$ festgelegt. Ein gutes Beispiel ist $\mathbb{R}P^3$ mit $\pi_1(\mathbb{R}P^3) \cong \mathbb{Z}/2$, siehe Übung 2.89 und Beispiel 5.21.

8.d. Eulerklasse und Gysin-Sequenz

In diesem Abschnitt definieren wir die Euler-Klasse eines orientierten Vektorbündels. Sie stellt ein Hindernis gegen die Existenz eines nirgends verschwindenden Schnitts dar.

Es sei $p: V \rightarrow X$ ein Vektorbündel. Wir erinnern uns an den Begriff eines Schnittes aus Bemerkung 3.29, also einer Abbildung $s: X \rightarrow V$ mit $p \circ s = \text{id}_X$. Jedes Vektorbündel hat einen kanonischen Schnitt, den Nullschnitt s_0 mit $s_0(x) = 0 \in V_x$ für alle $x \in X$. Wir identifizieren X mit $\text{im } s_0$. Je zwei Schnitte s_0, s_1 eines Vektorbündels sind homotop vermöge $s(x, t) = (1-t)s_0(x) + t s_1(x)$, insbesondere ist jeder Schnitt zum Nullschnitt homotop. Wenn s_0 und s_1 auf einem Unterraum $Y \subset X$ übereinstimmen, erhalten wir eine Homotopie relativ zu Y .

Sei s ein Schnitt ohne Nullstellen von V , das heißt, es gilt $s(x) \neq 0$ für alle $x \in X$. Gegeben eine Metrik auf V wie in Definition 6.50, ist s zu einem Schnitt s_1 des Sphärenbündels $SV \rightarrow X$ mit $s_1(x) = \frac{s(x)}{|s(x)|}$ homotop. Wir schreiben auch kurz $s_1 = \frac{s}{|s|}$. Sei schließlich X ein CW-Komplex und Y ein Unterkomplex. Mit ähnlichen Methoden wie im Beweis von Lemma 6.37 können wir dann jeden Schnitt $s_Y: Y \rightarrow V$ von $V|_Y$ zu einem Schnitt von ganz V fortsetzen. Und wir haben gerade gesehen, dass je zwei solche Fortsetzungen relativ Y homotop sind. Daher ist die folgende Definition möglich. Allgemeiner sei X normal und parakompakt, dann lässt sich jeder Schnitt von einem abgeschlossenen Unterraum $Y \subset X$ auf ganz X fortsetzen.

8.27. DEFINITION. Es sei $V \rightarrow X$ ein Vektorbündel mit einer E -Thom-Klasse $\omega \in \tilde{E}^r(MV)$, und es sei $s: X \rightarrow V$ ein Schnitt. Dann heißt $e(V) = s^*\omega \in E^r(X)$ die *Eulerklasse* von V zur durch ω gegebenen Orientierung.

Sei jetzt $Y \subset X$ ein Unterraum, und sei $s_Y: Y \rightarrow SV$ ein Schnitt des Sphärenbündels $SV|_Y$ über Y . Sei $s: Y \rightarrow V$ eine Fortsetzung von s_Y , dann heißt $e(V, s_Y) = s^*\omega \in E^r(X, Y)$ die *relative Eulerklasse* von V zu ω und s_Y .

Im Falle $\mathbb{E} = \mathbb{H}R$ sprechen wir auch von der R -Eulerklasse, oder kurz von der Eulerklasse, falls $R = \mathbb{Z}$. Die Eulerklasse ist natürlich in folgendem Sinne. Sei $f: (Z, W) \rightarrow (X, Y)$ eine Abbildung, sei

$$\begin{array}{ccc} f^*V & \xrightarrow{F} & V \\ \downarrow & & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

das zurückgeholte Bündel mit Thom-Klasse $F^*\omega$ und Schnitt $f^*s_Y: W \rightarrow f^*V$, dann gilt

$$e(f^*V, f^*s_Y) = f^*e(V, s_Y).$$

8.28. PROPOSITION. Sei M eine glatte, kompakte, m -dimensionale Mannigfaltigkeit, sei $V \rightarrow M$ ein reelles Vektorbündel vom Rang m mit Thom-Klasse $\omega \in \tilde{H}^m(MV)$, und sei $s_\partial: \partial M \rightarrow SV$ ein Schnitt von $V|_{\partial M}$. Dann existiert eine Fortsetzung von s_∂ zu einem Schnitt von SV auf ganz X genau dann, wenn $e(V, s_\partial) = 0 \in H^m(M, \partial M)$.

Im Falle, dass M keinen Rand hat, ist die Eulerklasse also das Hindernis gegen einen Schnitt ohne Nullstellen.

BEWEIS. Falls eine Fortsetzung s ohne Nullstellen existiert, gilt offensichtlich $s^*\omega = 0$.

Sei umgekehrt $s^*\omega = 0$. Wir dürfen annehmen, dass M zusammenhängend ist, da wir ansonsten jede Zusammenhangskomponente einzeln betrachten können. Nach dem Transversalitätssatz ?? dürfen wir annehmen, dass s transversal zum Nullschnitt s_0 ist. Insbesondere hat s nur endlich viele Nullstellen, da M kompakt ist. Da M zusammenhängend ist, finden wir eine offene Umgebung $B^m \cong U \subset M \setminus \partial M$ aller Nullstellen mit Abschluss $\bar{U} \cong D^m$. Da s außerhalb U keine Nullstellen hat, reicht es, $s|_{\bar{U}}$ zu betrachten. Zurückziehen von $s^*\omega$ auf $(\bar{U}, \partial U) \cong (D^m, S^{m-1})$ liefert die Klasse $(s|_{\bar{U}})^*\omega = 0 \in H^m(\bar{U}, U)$. Wir dürfen also $(M, \partial M)$ durch $(\bar{U}, \partial U) \cong (D^m, S^{m-1})$ ersetzen.

Nach Lemma 6.37 ist $V|_{\bar{U}}$ trivial, und wir identifizieren $(DV|_{\bar{U}}, SV|_{\bar{U}})$ mit $\bar{U} \times (D^m, S^{m-1})$. Der Schnitt s induziert dann eine Abbildung $\bar{s}: S^m \rightarrow S^m$, und es gilt

$$0 = e(V|_{\bar{U}}, s_{\partial U}) = \deg \bar{s} \in \mathbb{Z} \cong H^m(D^m, S^{m-1}).$$

Falls $m \geq 2$, entspricht das Element $\partial[s] \in \pi_{m-1}(S^{m-1})$ in der Homotopiesequenz des Paares (D^m, S^{m-1}) gerade der Einschränkung $s_{\partial U}$ von s auf ∂U . Insbesondere ist $s_{\partial U}$ homotop zu einer konstanten Abbildung, und wir können $s_{\partial U}$ zu einer konstanten Abbildung ohne Nullstellen fortsetzen. Im Fall $m = 1$ funktioniert ein ähnliches Argument. \square

8.29. SATZ (Gysin-Sequenz). *Es sei \mathbb{E} ein Ring- und \mathbb{F} ein Rechts- \mathbb{E} -Modulspektrum und $p: V \rightarrow X$ ein Vektorbündel mit einer E -Thom-Klasse $\omega \in E^r(MV)$ über einem CW-Komplex X . Es sei $Y \subset X$ ein Unterkomplex, und es sei $s: Y \rightarrow V$ ein Schnitt von $V|_Y$. Dann gibt es natürliche exakte Sequenzen*

$$\begin{aligned} \cdots \longleftarrow F_{k+r-1}(SV, SV|_Y) \longleftarrow F_k(X, Y) \xleftarrow{\smile e(V)} F_{k+r}(X, Y) \xleftarrow{p^*} F_{k+r}(SV, SV|_Y) \longleftarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow F^{k+r-1}(SV, SV|_Y) \longrightarrow F^k(X, Y) \xrightarrow{\smile e(V)} F^{k+r}(X, Y) \xrightarrow{p^*} F^{k+r}(SV, SV|_Y) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

In der Regel ist r gerade der Rang von V . Die Abbildung $F^{k+r-1}(SV, SV|_Y) \rightarrow F^k(X, Y)$ heißt auch *Gysin-Abbildung* oder *Integration über die Faser*. Der letztere Name rührt von der Beschreibung dieser Abbildung in der de Rham-Kohomologie her, wo tatsächlich über die Fasern von p integriert wird und sich der Formengrad daher um die Faserdimension $(r - 1)$ verringert.

BEWEIS. Im Falle $Y = \emptyset$ betrachten wir die F -Kohomologiesequenz des Paares (DV, SV) und wenden Homotopieinvarianz und den relativen Thom-Isomorphismus aus Satz 8.12 an. Außerdem sei $s: X \rightarrow DV$ ein Schnitt. Für F -Kohomologie kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \tilde{F}^{k+r-1}(SV_+) & \xrightarrow{\delta} & \tilde{F}^{k+r}(MV) & \longrightarrow & \tilde{F}^{k+r}(DV_+) \xrightarrow{t^*} \tilde{F}^{k+r}(SV_+) \longrightarrow \cdots \\ & & \parallel & & \smile \omega \uparrow \cong & \nearrow & \parallel \\ & & & & \tilde{F}^k(DV_+) & & \downarrow s^* \cong \uparrow p^* \\ & & & & p^* \uparrow \cong \downarrow s^* & & \\ \cdots & \longrightarrow & \tilde{F}^{k+r-1}(SV_+) & \longrightarrow & \tilde{F}^k(X_+) & \xrightarrow{\smile s^*\omega} & \tilde{F}^{k+r}(X_+) \xrightarrow{p^*} \tilde{F}^{k+r}(SV_+) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Den relativen Fall beweist man mit der Homologiesequenz des Tripels $(DV, SV \cup DV|_Y, DV|_Y)$. Der Beweis für Homologie verläuft ebenfalls analog. \square

8.30. BEISPIEL. Die Hopf-Faserung $p: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ aus Beispiel 3.43 ist das Einheitssphärenbündel des tautologischen Vektorbündels $\tau \rightarrow \mathbb{C}P^n$ mit

$$\tau_{[z_0: \dots: z_n]} = \mathbb{C} \cdot (z_0, \dots, z_n) \subset \mathbb{C}^{n+1}.$$

Da τ ein komplexes Geradenbündel ist, ist τ als reelles Vektorbündel vom Rang 2 orientierbar. Aus der Gysin-Sequenz

$$\begin{aligned}
\cdots \longrightarrow \underbrace{H^{-2}(\mathbb{C}P^n)}_{=0} \longrightarrow H^0(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{p^*} \underbrace{H^0(S^{2n+1})}_{\cong \mathbb{Z}} \longrightarrow \underbrace{H^{-1}(\mathbb{C}P^n)}_{=0} \longrightarrow \underbrace{H^1(\mathbb{C}P^n)}_{=0} \longrightarrow \\
\longrightarrow \underbrace{H^1(S^{2n+1})}_{=0} \longrightarrow \underbrace{H^0(\mathbb{C}P^n)}_{\cong \mathbb{Z}} \xrightarrow{\smile e(\tau)} H^2(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{p^*} \underbrace{H^2(S^{2n+1})}_{=0} \longrightarrow \cdots \\
\cdots \longrightarrow \underbrace{H^{2n-1}(S^{2n+1})}_{=0} \longrightarrow \underbrace{H^{2n-2}(\mathbb{C}P^n)}_{\cong \mathbb{Z}} \xrightarrow{\smile e(\tau)} H^{2n}(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{p^*} \underbrace{H^{2n}(S^{2n+1})}_{=0} \longrightarrow \\
\longrightarrow \underbrace{H^{2n-1}(\mathbb{C}P^n)}_{=0} \longrightarrow H^{2n+1}(\mathbb{C}P^n) \longrightarrow \underbrace{H^{2n+1}(S^{2n+1})}_{\cong \mathbb{Z}} \longrightarrow \underbrace{H^{2n}(\mathbb{C}P^n)}_{\cong \mathbb{Z}} \longrightarrow \underbrace{H^{2n+2}(\mathbb{C}P^n)}_{=0} \longrightarrow \cdots
\end{aligned}$$

können wir nicht nur die gesamte Kohomologie des Raumes $\mathbb{C}P^n$ ablesen. Wir sehen auch, dass Multiplikation $\smile e(\tau): H^{2k}(\mathbb{C}P^n) \rightarrow H^{2k+2}(\mathbb{C}P^n)$ für $0 \leq k \leq n-1$ ein Isomorphismus ist, erhalten also auch das Cup-Produkt, siehe Beispiel 6.26. Es folgt außerdem, dass $e(\tau)^k$ ein additiver Erzeuger von $H^{2k}(\mathbb{C}P^n)$ für alle $k \leq n$ ist. Analog verfahren wir mit dem quaternionisch projektiven Raum.

8.e. Euler- und Lefschetzzahl

Falls X stark dualisierbar ist, definieren wir die Lefschetz-Zahl einer Abbildung $F: X \rightarrow X$ mit Hilfe der Spanier-Whitehead-Dualität. Der Lefschetz-Fixpunktsatz erlaubt es, aus der Lefschetz-Zahl Aussagen über die Fixpunkte von F abzuleiten. Schließlich stellen wir eine Beziehung zwischen Lefschetz-Zahl und Euler-Klasse her.

8.31. DEFINITION. Ein Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zwischen zwei (symmetrischen) monoidalen Kategorien $(\mathcal{C}, \otimes, E_{\mathcal{C}})$ und $(\mathcal{D}, \otimes, E_{\mathcal{D}})$ heißt (*symmetrisch*) *monoidal*, wenn $FE_{\mathcal{C}} = E_{\mathcal{D}}$, und wenn es eine natürliche Transformation $\mu: FX \otimes FY \rightarrow F(X \otimes Y)$ gibt, die mit den natürlichen Transformationen aus Definition 4.26 (und der Transposition τ) verträglich ist.

Wir werden uns insbesondere für solche Funktoren F interessieren, für die μ ein Isomorphismus ist. In dem Fall sagen wir, dass F *Tensorprodukte erhält*.

8.32. BEISPIEL. Wir erinnern uns an die Kategorien $\mathcal{G}rMod_R$ und Ch_R der graduierten R -Moduln der R -Kettenkomplexe aus Definition 5.15 und Bemerkung 5.16.

- (1) Aufgrund der algebraischen Künneth-Formel 5.80 ist Homologie $H: Ch_R \rightarrow \mathcal{G}rMod_R$ ein monoidaler Funktor. Er erhält Tensorprodukte, wenn $R = \mathbb{k}$ ein Körper ist, da dann alle Torsionsprodukte verschwinden.
- (2) Aufgrund der topologischen Künneth-Formel 5.76 ist reduzierte Homologie $HR: \mathcal{H}Top_+ \rightarrow \mathcal{G}rMod_R$ ein monoidaler Funktor. Entsprechend liefert unreduzierte Homologie einen monoidalen Funktor $\mathcal{H}Top \rightarrow \mathcal{G}rMod_R$. Beide erhalten Tensorprodukte, wenn $R = \mathbb{k}$ ein Körper ist.
- (3) Die Homologie zu einem Ringspektrum liefert einen monoidalen Funktor, siehe Übung 8.49.
- (4) Wir können Homologie auch für Spektren definieren, und erhalten einen monoidalen Funktor $HR: \mathcal{S}HCW \rightarrow \mathcal{G}rMod_R$, der Tensorprodukte erhält, falls $R = \mathbb{k}$ ein Körper ist.

Da nicht alle monoidalen Funktoren Tensorprodukte erhalten, betrachten wir stark dualisierbare Objekte A , so dass $FA \otimes FX \cong F(A \otimes X)$ für alle X .

8.33. PROPOSITION UND DEFINITION. Es sei $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein monoidaler Funktor, und A besitze ein starkes Dual A^* mit Auswertungsabbildung $\varepsilon_A: A^* \otimes A \rightarrow E$ und Koauswertungsabbildung $\eta_A: E \rightarrow A \otimes A^*$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) für alle Objekte X von \mathcal{C} ist $\mu_{A,X}: FA \otimes FX \rightarrow F(A \otimes X)$ ein Isomorphismus;
- (2) die Abbildung $\mu_{A,A^*}: FA \otimes FA^* \rightarrow F(A \otimes A^*)$ ist ein Isomorphismus;
- (3) es existiert eine Abbildung $g: E_{\mathcal{D}} \rightarrow FA \otimes FA^*$ mit $\mu \circ g = F\eta_A: E_{\mathcal{D}} \rightarrow F(A \otimes A^*)$;
- (4) es ist FA^* starkes Dual von FA in \mathcal{D} , so dass $\varepsilon_{FA} = F\varepsilon_A \circ \mu_{A^*,A}$ und $\mu_{A,A^*} \circ \eta_{FA} = F\eta_A$.

In diesem Fall heißt A ein F -flaches Objekt.

Die Bezeichnung F -flach erinnert an den Begriff „flach“ in der kommutativen Algebra, der Moduln beschreibt, mit denen das Tensorprodukt exakt ist.

BEWEIS. Die Richtungen (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) sind klar. Zu (3) \Rightarrow (4) setzen wir $\varepsilon_{FA} = F\varepsilon_A \circ \mu_{A^*,A}$ und $\eta_{FA} = g$, und betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 FA & \xrightarrow{\lambda^{-1}} & FE_C \otimes FA & \xrightarrow{g \otimes \text{id}} & FA \otimes FA^* \otimes FA & & \\
 \downarrow F\lambda^{-1} & & \downarrow F\eta_A \otimes \text{id} & & \downarrow & \searrow \text{id} \otimes \varepsilon_{FA} & \\
 F(E_C \otimes A) & & F(A \otimes A^*) \otimes FA & & FA \otimes F(A^* \otimes A) & \xrightarrow{\text{id} \otimes F\varepsilon_A} & FA \otimes FE_C \\
 & \searrow F(\eta_A \otimes \text{id}) & \downarrow & \swarrow & \downarrow & & \downarrow \rho \\
 & & F(A \otimes A^* \otimes A) & \xrightarrow{F(\text{id} \otimes \varepsilon_A)} & F(A \otimes E_C) & \xrightarrow{F\rho} & FA
 \end{array}$$

zu Definition 8.2 (1a), in dem alle unbezeichneten Pfeile Anwendungen von μ sind. Zu 8.2 (1b) erhalten wir ein analoges Diagramm.

Zu (4) \Rightarrow (1) sei X ein beliebiges Objekt. Dann betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned}
 F(A \otimes X) & \xrightarrow{\lambda^{-1}} E_{\mathcal{D}} \otimes F(A \otimes X) \xrightarrow{\eta_{FA} \otimes \text{id}} FA \otimes FA^* \otimes F(A \otimes X) \xrightarrow{\text{id} \otimes \mu} \\
 & \rightarrow FA \otimes F(A^* \otimes A \otimes X) \xrightarrow{\text{id} \otimes F(\varepsilon \otimes \text{id})} FA \otimes F(E_C \otimes X) \xrightarrow{\text{id} \otimes F\lambda} FA \otimes FX.
 \end{aligned}$$

Mit Proposition 8.2 überprüft man, dass diese Abbildung zu $\mu_{A,X}$ invers ist. \square

8.34. DEFINITION. Es sei \mathcal{C} eine symmetrische monoidale Kategorie, und es sei A^* ein starkes Dual eines Objektes A . Dann definieren wir die *Spur* $\text{tr}_A f \in \text{End}_{\mathcal{C}} E$ eines Endomorphismus $f \in \text{End}_{\mathcal{C}} A$ als Verkettung

$$\text{tr}_A f: E \xrightarrow{\eta} A \otimes A^* \xrightarrow{\tau} A^* \otimes A \xrightarrow{\text{id} \otimes f} A^* \otimes A \xrightarrow{\varepsilon} E.$$

Wenn klar A aus dem Kontext klar ist, schreiben wir für tr_A auch kurz tr .

8.35. BEISPIEL. Diese Definition verallgemeinert den klassischen Begriff aus der linearen Algebra.

- (1) Es sei V ein endlich-dimensionaler \mathbb{k} -Vektorraum und V^* sein Dualraum. Nach Wahl von dualen Basen (v_1, \dots, v_n) von V und $(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ von V^* erfüllt $\eta: \mathbb{k} \rightarrow V \otimes V^*$ mit

$$\eta(r) = \sum_{i=1}^n r v_i \otimes \alpha^i$$

genau die Bedingungen aus Definition 8.2 (1). Mithin wird die Spur von $f \in \text{End}_{\mathbb{k}} V$ gegeben durch Multiplikation mit der üblichen Spur:

$$\text{tr}_V : r \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha^i(r f(v_i)) = r \text{Tr} f .$$

- (2) Genauso erhalten wir eine Spur für endlich erzeugte freie Moduln R^n über einem beliebigen kommutativen Ring R . Ein endlich erzeugter projektives Modul A ist stets direkter Summand eines endlich erzeugten freien Moduls R^n . Sei $p: R^n \rightarrow A$ die Projektion auf A , und sei $\tilde{f}: R^n \rightarrow R^n$ eine beliebige Fortsetzung von $f \in \text{End}_R A$, dann gilt

$$\text{tr}_A(f) = \text{tr}_{R^n}(p\tilde{f}) \in R .$$

Da die Spur durch Definition 8.34 eindeutig bestimmt ist, gilt die obige Formel unabhängig von den Abbildungen $A \hookrightarrow R^n \twoheadrightarrow A$.

- (3) Falls R ein Hauptidealring (beispielsweise \mathbb{Z}) und A ein endlich erzeugter R -Modul ist, erhalten wir eine natürliche exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_R A \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A/\text{Tor}_R A \longrightarrow 0 ,$$

siehe Übung 5.106. Jeder Endomorphismus $f \in \text{End}_R A$ bildet Torsionselemente auf Torsionselemente ab und induziert daher $\bar{f} \in \text{End}_R(A/\text{Tor}_R A)$. Also können wir die obige Definition der Spur erweitern zu

$$\text{tr}_A(f) = \text{tr}_{A/\text{Tor}_R A}(\bar{f}) .$$

- (4) Wir erinnern uns an das Tensorprodukt auf der Kategorie \mathcal{Ch}_R der Kettenkomplexe über R aus Definition 5.75. Die Transposition $\tau: C_{\bullet} \otimes D_{\bullet} \rightarrow D_{\bullet} \otimes C_{\bullet}$ definieren wir für $c \in C_k$ und $d \in D_{\ell}$ durch

$$\tau(c \otimes d) = (-1)^{k\ell} d \otimes c .$$

Der Vorzeichenfaktor sorgt für Verträglichkeit mit den Differentialen auf $C_{\bullet} \otimes D_{\bullet}$ und $D_{\bullet} \otimes C_{\bullet}$.

Ein Kettenkomplex C_{\bullet} der Form

$$\cdots \longleftarrow 0 \longleftarrow C_i \xleftarrow{\partial_{i+1}} C_{i+1} \longleftarrow \cdots \longleftarrow C_{j-1} \xleftarrow{\partial_j} C_j \longleftarrow 0 \longleftarrow \cdots$$

ist stark dualisierbar, wenn die Moduln C_i, \dots, C_j projektiv und endlich erzeugt sind. In diesem Fall ist das starke Dual C_{\bullet}^* der Komplex

$$\cdots \longleftarrow 0 \longleftarrow C_j^* \xleftarrow{\partial_j^*} C_{j-1}^* \longleftarrow \cdots \longleftarrow C_{i+1}^* \xleftarrow{\partial_{i+1}^*} C_i^* \longleftarrow 0 \longleftarrow \cdots ,$$

wobei der Modul C_k^* jeweils an der Stelle $-k$ steht. Das neutrale Element ist der Komplex E_{\bullet} mit $E_0 = R$ und $E_k = 0$ für $k \neq 0$. Wir erhalten Auswertungs- und Koauswertungsabbildung jeweils als

$$\varepsilon(\alpha \otimes c) = \delta_{k\ell \in C_k, C_k^*}(\alpha, c) = \alpha(c) \in R \quad \text{für } \alpha \in C_k^*, c \in C_{\ell}, \text{ und}$$

$$\eta(r) = (\eta_{C_k, C_k^*}(r))_k \in \bigoplus_{k=i}^j C_k \otimes C_k^* \cong (C_{\bullet} \otimes C_{\bullet}^*)_0 .$$

Mit diesen Vorbereitungen können wir die Spur einer Kettenabbildung $f_{\bullet}: C_{\bullet} \rightarrow C_{\bullet}$ zwischen endlichen erzeugten, projektiven Kettenkomplexen mit Hilfe von (1) angeben als

$$\text{tr}_{C_{\bullet}}(f_{\bullet}) = \sum_{k=i}^j (-1)^k \text{Tr}(f_i) .$$

Dabei rührt das Vorzeichen vom Vorzeichen der Transposition τ auf $C_k \otimes C_k^*$. Aufgrund des Vorzeichenfaktors wird diese Spur manchmal auch als *Superspur* bezeichnet.

- (5) Wir betrachten die Kategorie $GrMod_R$ der \mathbb{Z} -graduierten R -Moduln als volle Unterkategorie von Ch_R . Damit die Einbettung $GrMod_R \hookrightarrow Ch_R$ und der vergessliche Funktor $Ch_R \rightarrow GrMod_R$ monoidal werden, definieren wir τ mit dem gleichen Vorzeichen wie oben. Dann gelten die gleichen Formeln für das starke Dual und die Spur.

Auch die folgenden Eigenschaften der Spur sind ähnlich wie in der linearen Algebra.

8.36. PROPOSITION. *Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ eine symmetrische monoidale Kategorie, und es seien A, B stark dualisierbar. Die Spur hat dann folgende Eigenschaften.*

- (1) *Es gilt $\text{tr}_E(f) = f$ für alle $f: E \rightarrow E$.*
- (2) *Es gilt $\text{tr}_A(f^*) = \text{tr}_{A^*}(f)$ für alle $f: A \rightarrow A$, dabei sei $f^*: A^* \rightarrow A^*$ die duale Abbildung, siehe (8.2).*
- (3) *Für $f: A \rightarrow A$ und $g: B \rightarrow B$ gilt $\text{tr}_{A \otimes B}(f \otimes g) = \text{tr}_A(f) \circ \text{tr}_B(g)$.*
- (4) *Für $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow A$ gilt $\text{tr}_A(g \circ f) = \text{tr}_B(f \circ g)$.*

BEWEIS. Dieser Beweis ist Übung 8.51. □

8.37. PROPOSITION. *Es sei $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein monoidaler Funktor zwischen symmetrischen monoidalen Kategorien, es sei A ein F -flaches Objekt und $f \in \text{End}_{\mathcal{C}} A$. Dann gilt*

$$\text{tr}_{FA}(Ff) = F(\text{tr}_A f) .$$

BEWEIS. Wir wenden F auf die Definition der Spur an und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{tr}_{FA}(Ff): E_{\mathcal{D}} & \xrightarrow{g} & FA \otimes FA^* & \xrightarrow{\tau} & FA^* \otimes FA & \xrightarrow{\text{id} \otimes Ff} & FA^* \otimes FA & \xrightarrow{\varepsilon} & E_{\mathcal{D}} \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & \downarrow \mu & & \downarrow \mu & & \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ F(\text{tr}_A f): FE_{\mathcal{C}} & \xrightarrow{F\eta} & F(A \otimes A^*) & \xrightarrow{F\tau} & F(A^* \otimes A) & \xrightarrow{F(\text{id} \otimes f)} & F(A^* \otimes A) & \xrightarrow{F\varepsilon} & FE_{\mathcal{C}} \end{array}$$

aufgrund der Natürlichkeit von μ und der Eigenschaften (2), (3) aus Definition 8.33. □

8.38. BEMERKUNG. Wir betrachten einen endlich erzeugten, freien Kettenkomplex $(C_{\bullet}, d_{\bullet})$ über einem Körper \mathbb{k} und eine Kettenabbildung $F_{\bullet}: (C_{\bullet}, d_{\bullet}) \rightarrow (C_{\bullet}, d_{\bullet})$. Dann induziert F_{\bullet} eine Abbildung $F_* \in \text{End}(H_{\bullet}(C_{\bullet}, d_{\bullet}))$, und wegen Beispiel 8.32 (2) und obiger Proposition gilt

$$\text{tr}_{H_{\bullet}(C_{\bullet})}(F_*) = \text{tr}_{C_{\bullet}}(F_{\bullet}) \in \text{End}_{\mathbb{k}} \mathbb{k} \cong \mathbb{k} .$$

Da $\text{tr}_{\mathbb{k}^n}(\text{id}_{\mathbb{k}^n}) = n$, entspricht der Spezialfall $F_{\bullet} = \text{id}_{C_{\bullet}}$ gerade dem algebraischen Teil von Satz 5.31.

Wir erinnern uns an Spanier-Whitehead-Dualität. Sei K^* ein Spanier-Whitehead-Dual von K_+ vom Grad n , dann haben wir Auswertungs- und Koauswertungsabbildungen $\varepsilon: K^* \wedge K_+ \rightarrow S^n$ und $\eta: S^n \rightarrow K_+ \wedge K^*$. Insbesondere nimmt die Spur tr_{K_+} Werte in den Endomorphismen von S im Grad 0 an, also in $\pi_0^s(S^0) \cong \mathbb{Z}$.

8.39. DEFINITION. Es sei K_+ ein stark dualisierbarer topologischer Raum und $f: K \rightarrow K$ eine stetige Abbildung. Dann heißt $\text{tr}_{K_+}(f) \in \pi_0(S) \cong \mathbb{Z}$ die *Lefschetz-Zahl* von F .

Sei etwa K^* ein Spanier-Whitehead-Dual von K_+ im Grad n , dann ist die Lefschetz-Zahl der Abbildungsgrad der gemäß Definition 8.34 konstruierten Abbildung

$$S^n \xrightarrow{\eta_n} K_+ \wedge K^* \xrightarrow{\tau} K^* \wedge K_+ \xrightarrow{\text{id} \wedge f} K^* \wedge K_+ \xrightarrow{\varepsilon_n} S^n .$$

8.40. FOLGERUNG. Es sei K ein stark dualisierbarer topologischer Raum und $f: K \rightarrow K$ stetig. Für einen Körper \mathbb{k} bezeichne $j: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{k}$ den Ringhomomorphismus mit $j(1) = 1$. Dann ist $H_k(K; \mathbb{k})$ endlich dimensional und nur für endlich viele k nicht 0, und es gilt

$$j(\mathrm{tr}_K(f)) = \mathrm{tr}_{H_\bullet(K; \mathbb{k})}(f_*) = \sum_k (-1)^k \mathrm{tr}_{H_k(K; \mathbb{k})}(f_{*k}) \in \mathbb{k}.$$

Falls K ein endlicher CW-Komplex und f zellulär ist, gilt

$$j(\mathrm{tr}_K(f)) = \mathrm{tr}_{C_\bullet^{\mathrm{CW}}(K; \mathbb{k})}(f_\#) = \sum_k (-1)^k \mathrm{tr}_{C_k^{\mathrm{CW}}(K; \mathbb{k})}(f_{\#k}).$$

Insbesondere gilt $\mathrm{tr}_K(\mathrm{id}_K) = j(\chi(K))$ für die Eulerzahl aus Definition 5.30.

Für Körper der Charakteristik 0 wie $\mathbb{k} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} ist j injektiv, also geht durch Übergang zur \mathbb{k} -Homologie keine Information verloren. Über \mathbb{Z} erhalten wir mit der modifizierten Spur aus Beispiel 8.35 (3) das gleiche Ergebnis (Übung). Wir können die Definitionen 8.31 und 8.33 auch für kontravariante Funktoren formulieren. In diesem Fall erhalten wir (Übung)

$$j(\mathrm{tr}_K(f)) = \mathrm{tr}_{H^\bullet(K; \mathbb{k})}(f^*) = \sum_k (-1)^k \mathrm{tr}_{H^k(K; \mathbb{k})}(f^{*k}),$$

und analog im zellulären Fall.

BEWEIS. Das folgt aus den Beispielen 8.32 (1) und (2), 8.35 (4) und Proposition 8.37. \square

Um den Lefschetzchen Fixpunktsatz zu formulieren, müssen wir erst den Fixpunktindex einer Abbildungen definieren. Da Fixpunktmenge nicht immer schön sein müssen, folgen wir Dold [D, VII.5], arbeiten allerdings mit Abbildungsgraden, nicht mit Fundamentalklassen. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, dann bezeichnen wir die *Fixpunktmenge* von f mit

$$U_f = \{ x \in U \mid f(x) = x \}.$$

8.41. DEFINITION. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, so dass $U_f \subset U$ kompakt ist. Es sei $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow I$ eine Abschneidefunktion mit $\mathrm{supp} \psi \subset U$ und $\psi|_{U_f} = 1$, dann induziert ψ eine Abbildung $\bar{\psi}: S^n \rightarrow C(U|U_f)$ mit $x \mapsto (x, \psi(x))$. Der *Fixpunktindex* $\mathrm{ind}(f)$ von f auf U_f ist der Abbildungsgrad der Abbildung

$$F: S^n \xrightarrow{\bar{\psi}} C(U|U_f) \xrightarrow{\mathrm{id}-f} C(\mathbb{R}^n|0) \xrightarrow{\sim} S^n. \quad (1)$$

Sei $X \subset U \subset \mathbb{R}^n$ ein Umgebungsretrakt mit Retraktion $p: U \rightarrow X$ wie in Definition 8.6, und sei $f: X \rightarrow X$ eine Abbildung mit kompakter Fixpunktmenge X_f . Dann definieren wir den Fixpunktindex von f als

$$\mathrm{ind}(f) = \mathrm{ind}(f \circ p: U \rightarrow X \hookrightarrow \mathbb{R}^n). \quad (2)$$

Insgesamt erhalten wir in (1) die Abbildung

$$x \mapsto (x - f(x), \psi(x)).$$

Es ist leicht zu sehen, dass unterschiedliche Abschneidefunktionen homotope Abbildungen liefern. Für die Konstruktion einer Abschneidefunktion ist aber wichtig, dass $U_f \subset U$ kompakt ist.

8.42. BEISPIEL. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ wie oben.

- (1) Falls f auf U keine Fixpunkte hat, nimmt die Abbildung F in Definition 8.41 den Wert 0 nie an, also folgt $\mathrm{ind}(f) = \mathrm{deg}(F) = 0$.
- (2) Es gelte $0 \in U$, und es sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine Matrix, für die 1 kein Eigenwert ist, so dass $U_f = \{0\}$. Dann hat f den Fixpunktindex $\mathrm{ind} f = \mathrm{sign} \det(E_n - A)$ nach Beispiel 3.47.

8.43. PROPOSITION. *Der Fixpunktindex hat folgende Eigenschaften, dabei seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $U_f \subset U$ kompakt wie oben.*

(1) Additivität. *Es gelte $U = V \cup W$ mit $V, W \subset \mathbb{R}^n$ offen, so dass $U_f = V_f \dot{\cup} W_f$. Dann gilt*

$$\text{ind}(f) = \text{ind}(f|_V) + \text{ind}(f|_W) .$$

(2) Homotopieinvarianz. *Es sei $h: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Homotopie, so dass die Menge*

$$U_h = \{ (x, t) \mid h(x, t) = x \in U \} \subset U \times I$$

kompakt ist. Dann haben alle $f_t = h(\cdot, t)$ den gleichen Fixpunktindex.

(3) Einheit. *Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f(x) = x_0$ die konstante Abbildung. Dann gilt $\text{ind } f = 1$, falls $x_0 \in U$, und 0 sonst.*

(4) Multiplikativität. *Es sei $g: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine weitere Abbildung mit $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $V_g \subset V$ kompakt. Dann gilt $\text{ind}(f \times g) = \text{ind}(f) \cdot \text{ind}(g)$.*

(5) Stabilität. *Es bezeichne $p: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \{0\}$ die Projektionsabbildung. Dann hat die Abbildung $f \circ p: U \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ den gleichen Fixpunktindex wie f .*

Eigenschaft (1) impliziert auch, dass der Index lokal in einer Umgebung der Fixpunkte berechnet werden kann. Dazu sei $V \subset U$ eine kleine Umgebung von U_f und $W = U \setminus U_f$.

BEWEIS. Zu (1) wählen wir ψ_1, ψ_2 mit $\text{supp } \psi_1 \in V$, $\text{supp } \psi_2 \in W$ und $\psi_1|_{V_f} = 1 = \psi_2|_{W_f}$. Da \mathbb{R}^n normal ist, können wir sogar $\text{supp } \psi_1 \cap \text{supp } \psi_2 = \emptyset$ verlangen. Dann sind $\psi = \psi_1 + \psi_2$, ψ_1, ψ_2 Abschneidefunktionen für $f, f|_V, f|_W$ wie in Definition 8.41. Seien $F, F_1, F_2: S^n \rightarrow S^n$ die zugehörigen Abbildungen, dann gilt $[F] = [F_1] + [F_2] \in \pi_n(S^n)$, und es folgt die Behauptung.

Zu (2) wählen wir eine Abschneidefunktion $\bar{\psi}: \mathbb{R}^n \times I \rightarrow I$ mit $\text{supp } \bar{\psi} \subset U \times I$ und $\bar{\psi}|_{U_h} = 1$. Analog zur obigen Konstruktion von F erhalten wir jetzt eine Abbildung

$$H: S^n \times I \xrightarrow{\bar{\psi}} C(U \times I|_{U_h}) \xrightarrow{p-h} C(\mathbb{R}^n|0) \xrightarrow{\sim} S^n ,$$

wobei $p: C(U \times I|_{U_h}) \rightarrow C(\mathbb{R}^n|0)$ von der Projektion $\mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ induziert sei. Dann ist für jedes t die Einschränkung F_t von H auf $S^n \times \{t\}$ das Analogon zu F für die Einschränkung f_t von h auf $U \times \{t\}$. Insbesondere sind alle F_t homotop, und es folgt die Behauptung.

Im Falle $x_0 \notin U$ folgt Behauptung (3) bereits aus Beispiel 8.42 (1). Wir nehmen jetzt $x_0 = 0 \in U$ an. Dann ist die zugehörige Abbildung F homotop zur Identität, und es folgt die Behauptung.

Zu (4) überlegt man sich, dass die zu $f \times g$ konstruierte Abbildung $H: S^{n+m} \rightarrow S^{n+m}$ zu $F \wedge G$ homotop ist, und dass $\text{deg}(F \wedge G) = \text{deg}(F) \cdot \text{deg}(G)$ (Übung).

Schließlich ist (5) eine direkte Folgerung aus (3) und (4) mit $g = p$. □

8.44. SATZ (Lefschetzscher Fixpunktsatz). *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Umgebungsretrakt, und es sei $f: K \rightarrow K$ stetig. Es bezeichne K_f die Menge der Fixpunkte von f , dann gilt*

$$\text{tr}_{K_+}(f) = \text{ind}(f) \in \mathbb{Z} .$$

Mit anderen Worten lässt sich die Lefschetzzahl von f in einer kleinen Umgebung von K_f bereits bestimmen. Wenn die Lefschetzzahl nicht verschwindet, muss f daher mindestens einen Fixpunkt haben. Man beachte, dass beide Seiten strenggenommen Werte in $\pi_0(\mathbb{S})$ annehmen. Die linke Seite der Gleichung hat nach Folgerung (8.40) eine homologische Beschreibung. Für die rechte Seite geben wir für Mannigfaltigkeiten unten eine explizitere Formel an.

BEWEIS. Wir betrachten die Konstruktion im Beweis von Satz 8.7 und folgen Dold und Puppe [DP]. Nach Definition 8.34 ist die Lefschetz-Zahl der Grad der Abbildung

$$S^n \sim C(\mathbb{R}^n | B_R(0)) \xrightarrow{\tau \circ \eta_n} C(\mathbb{R}^n | K) \wedge K_+ \xrightarrow{\text{id} \wedge f} C(\mathbb{R}^n | K) \wedge K_+ \xrightarrow{\varepsilon_n} C(\mathbb{R}^n | 0) \sim S^n$$

$$\text{mit } (x, t) \longmapsto (x, \psi(x)t) \wedge p(x) \longmapsto (x, \psi(x)t) \wedge f(p(x)) \longmapsto (x - f(p(x)), \psi(x)t) .$$

Diese Abbildung ist homotop zur Abbildung F zu $f \circ p$, also folgt die Behauptung mit Definition 8.41 (2). \square

8.45. BEMERKUNG. Besonders interessant ist der Fall einer kompakten Mannigfaltigkeit M , die wir nach dem Whitney'schen Einbettungssatz 6.52 und dem Satz 6.51 von der Röhrenumgebung als Umgebungsretrakt in einen \mathbb{R}^n einbetten können. Durch Stabilisierung können wir n beliebig groß wählen. Wenn n ausreichend groß ist, sind alle Einbettungen zueinander als Einbettungen homotop. Somit hat jede Abbildung $f: M \rightarrow M$ wegen der Punkte (2) und (5) einen wohldefinierten Fixpunktindex nach Definition 8.41 (2), unabhängig von allen obigen Wahlen.

Wenn auf der anderen Seite die Fixpunktmenge M_f als Vereinigung disjunkter kompakter Mengen M_i geschrieben werden kann, so dass es Kartenumgebungen U_i von M_i gibt, dann existieren kleinere Umgebungen $W_i \subset U_i$ der M_i mit $\text{im}(f|_{W_i}) \subset U_i$. Sei $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^{\dim M}$ Karten, dann gibt es Abbildungen $f_i: \text{im}(\varphi_i|_{W_i}) \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{array}{ccc} W_i & \xrightarrow{f} & U_i \\ \varphi_i \downarrow & & \downarrow \varphi_i \\ \text{im}(f|_{W_i}) & \xrightarrow{f_i} & V_i . \end{array}$$

Aufgrund der Additivität erhalten wir eine intrinsische Formel für den Index (Übung)

$$\text{ind}(f) = \sum_i \text{ind}(f_i) .$$

8.46. BEISPIEL. In Kombination mit Folgerung 8.40 erlaubt der Lefschetz'sche Fixpunktsatz interessante Aussagen.

- (1) Für jeden kompakten Umgebungsretrakt $K \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\text{ind}(\text{id}_K) = \chi(K)$. Das gleiche gilt wegen der Homotopieinvarianz des Fixpunktindex auch für Abbildungen, die zur Identität homotop sind. Solche Abbildungen haben also immer Fixpunkte, wenn $\chi(K) \neq 0$.
- (2) Es sei $f: S^n \rightarrow S^n$ stetig. Indem wir zur reduzierten Homologie übergehen, sehen wir, dass f_* auf $H_0(S^n) \cong \mathbb{Z}$ als Identität wirkt; dieses Argument funktioniert für alle zusammenhängenden Räume. Aufgrund der Natürlichkeit des Hurewicz-Homomorphismus aus Definition 5.47 kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(S^n) & \xrightarrow{f_*} & \pi_n(S^n) \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ H_n(S^n) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n) , \end{array}$$

also wirkt f_* auf $H_n(S^n)$ durch Multiplikation mit dem Abbildungsgrad $\text{deg}(f)$. Insgesamt erhalten wir

$$\text{ind}(f) = \text{Tr}_{H_0(S^n; \mathbb{Q})}(f_*) + (-1)^n \text{Tr}_{H_n(S^n; \mathbb{Q})}(f_*) = 1 + (-1)^n \text{deg}(f) .$$

Da der Abbildungsgrad nach dem Satz 3.42 von Brouwer-Hopf die Abbildung f bis auf Homotopie festlegt, sehen wir, dass eine Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ ohne Fixpunkte zur

Identität homotop ist, wenn n ungerade ist, und zur Antipodenabbildung, wenn n gerade ist. Ähnlich hatten wir bereits im Beweis des Satzes 3.48 vom Igel argumentiert.

8.f. Übungen zu Kapitel 8

Übungen zu Abschnitt 8.a.

8.47. ÜBUNG. Es sei \mathbb{E} ein Ringspektrum und \mathbb{F} ein Rechts- \mathbb{E} -Modulspektrum. Beweisen Sie die Eigenschaften des Produktes “ \setminus ” aus Bemerkung 8.5.

Übungen zu Abschnitt 8.b.

8.48. ÜBUNG. Es sei \mathbb{E} ein Ringspektrum und $\alpha \in E^n(\mathbb{R}^m|0)$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(1) Es sei $\epsilon \in E^0$ die Eins des Ringspektrums und $\delta S^{m-1}\epsilon$ ihr Bild unter dem Isomorphismus

$$E^0 = \tilde{E}^0(S^0) \xrightarrow{S} \dots \xrightarrow{S} \tilde{E}^{m-1}(S^{m-1}) \xrightarrow{\delta} E^m(D^m, S^{m-1}) \cong E^m(\mathbb{R}^m|0).$$

Dann gibt es eine Einheit $\beta \in E^\bullet$, so dass $\alpha = \beta \wedge \delta S^{m-1}\epsilon$.

(2) Das Kronecker-Produkt $\langle \cdot, \alpha \rangle: E_\bullet(\mathbb{R}^m|0) \rightarrow E_\bullet$ ist ein Isomorphismus.

(3) Für jedes Rechts- \mathbb{E} -Modulspektrum \mathbb{F} ist $\langle \cdot, \alpha \rangle: F_\bullet(\mathbb{R}^m|0) \rightarrow F_\bullet$ ein Isomorphismus.

Übungen zu Abschnitt 8.e.

8.49. ÜBUNG. (1) Es sei (\mathbb{E}, μ, E) ein Ringspektrum. Wir definieren ein externes Produkt $\wedge: \tilde{E}_k(X) \times E_\ell(Y) \rightarrow E_{k+\ell}(X \wedge Y)$, durch

$$a \wedge b: \mathbb{S} \cong \mathbb{S} \wedge \mathbb{S} \xrightarrow{a \wedge b} \mathbb{E} \wedge X \wedge \mathbb{E} \wedge Y \xrightarrow{\cong} \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \wedge X \wedge Y \xrightarrow{\mu \wedge \text{id}} \mathbb{E} \wedge X \wedge Y.$$

Zeigen Sie, dass das einen monoidalen Funktor $\mathcal{H}k\mathcal{W}\mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{G}r\mathcal{A}b$ induziert.

(2) Es sei \tilde{h}^\bullet ein reduzierter multiplikativer Kohomologiefunktor wie in Definition 7.19. Zeigen Sie, dass \tilde{h}^\bullet dann ebenfalls ein monoidaler Funktor ist.

8.50. ÜBUNG.

8.51. ÜBUNG. Beweisen Sie Proposition 8.36.

8.52. ÜBUNG. Es sei $k \geq 0$. Wir betrachten die Abbildung $f: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ mit $f(z : w) = (z^k : w^k)$. Bestimmen Sie ihre Fixpunkte und ihren Abbildungsgrad in Abhängigkeit von k .

8.53. ÜBUNG. Es sei $n \geq 2$ und $k \geq 0$. Analog zur obigen Aufgabe definieren wir $f: \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$ durch $f(z_0 : \dots : z_n) = (z_0^k : \dots : z_n^k)$. Bestimmen Sie wieder die Fixpunkt Mengen und den Abbildungsgrad. Dazu gehen Sie zur Kohomologie über und benutzen die multiplikative Struktur aus Beispiel 6.26.

Simpliziale Theorie

Viele wichtige topologische Räume lassen sich auf rein kombinatorische Weise aus Simplex konstruieren. In diesem Kapitel führen wir simpliziale Objekte in Kategorien ein.

9.a. Simpliziale Komplexe

Wir beginnen mit klassischen simplizialen Komplexen im \mathbb{R}^N . Eine Menge $A = \{x_0, \dots, x_n\}$ von Punkten im \mathbb{R}^N ist in *allgemeiner Lage*, wenn die n Vektoren $x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0$ linear unabhängig sind. In diesem Fall nennen wir die konvexe Hülle der Punkte x_0, \dots, x_n das von A aufgespannte geometrische Simplex

$$|A| = \{ t_0 x_0 + \dots + t_n x_n \mid 0 \leq t_0, \dots, t_n \text{ und } t_0 + \dots + t_n = 1 \} \subset \mathbb{R}^N,$$

und $\overset{\circ}{A} = \{ t_0 x_0 + \dots + t_n x_n \mid 0 < t_0, \dots, t_n \text{ und } t_0 + \dots + t_n = 1 \} \subset |A|$

heißt das (*geometrische*) *Innere* von $|A|$. Sei $B \subset A$, dann nennen wir B eine *Seite* von A . Es folgt

$$|A| = \bigcup_{B \subset A} \overset{\circ}{B}.$$

Der Einfachheit halber lassen wir auch die leere Menge zu und setzen $|\emptyset| = \overset{\circ}{\emptyset} = \emptyset$.

9.1. BEMERKUNG. Wir nennen

$$\Delta^n = \{ (t_1, \dots, t_n) \in I^n \mid 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1 \}$$

den (*geometrischen*) *Standardsimplex*.

- (1) Wenn wir die Elemente von A wie oben anordnen, erhalten wir eine affine Abbildung $\Delta^n \rightarrow |A|$ durch

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto t_1 x_0 + (t_2 - t_1) x_1 + \dots + (1 - t_n) x_n.$$

Insbesondere entspricht der k -ten Ecke das Tupel $x_k^n = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$, bei dem die ersten k Einträge 0 sind.

- (2) Sei jetzt $B \subset A$ eine Teilmenge, dann erhalten wir eine Inklusionsabbildung $|B| \rightarrow |A|$. Wir ordnen die Elemente von A wie oben an, dann entspricht der Teilmenge B ein Tupel von Indizes $0 \leq i_0 < \dots < i_k \leq n$, so dass $B = \{x_{i_0}, \dots, x_{i_k}\}$. Dann betrachten wir die lineare Abbildung $f_{i_0, \dots, i_k}: \Delta^k \rightarrow \Delta^n$ mit $f_{i_0, \dots, i_k}(s_1, \dots, s_k) = (t_1, \dots, t_n)$, so dass

$$t_j = \begin{cases} 0 & \text{falls } j < i_0, \\ s_{i_\ell} & \text{falls } i_{\ell-1} \leq j < i_\ell, \text{ und} \\ 1 & \text{falls } i_k \leq j. \end{cases}$$

Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Delta^k & \xrightarrow{f_{i_0, \dots, i_k}} & \Delta^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ |A| & \hookrightarrow & |B| \end{array} .$$

- (3) Wir betrachten die obige Sammlung von Indizes als monotone Abbildung $\varphi: \{0, \dots, k\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$, dabei müssen wir nicht verlangen, dass φ injektiv ist. Die gleiche Konstruktion wie oben liefert das analoge kommutative Diagramm. Allerdings ist die Abbildung $\Delta^k \rightarrow |A|$ nur injektiv, wenn φ injektiv ist. Anderfalls werden mehrere aufeinanderfolgende Ecken auf eine abgebildet. In diesem Fall nennt man die Abbildung $\Delta^k \rightarrow |A|$ *entartet*.

Für eine Menge M bezeichne $\mathcal{P}_{\text{fin}}M \subset \mathcal{P}M$ die Teilmenge alle endlichen Teilmengen von M .

9.2. DEFINITION. Ein *simplizialer Komplex* im \mathbb{R}^N besteht aus einer diskreten Menge $E \subset \mathbb{R}^N$ von *Ecken* und einer Teilmenge $S \subset \mathcal{P}_{\text{fin}}E$ von *Simplizes*, mit folgenden Eigenschaften:

- (1) die Ecken eines jeden Simplexes $A \in S$ sind in allgemeiner Lage;
- (2) für jeden Simplex $A \in S$ gilt $\mathcal{P}A \subset S$;
- (3) für $A \neq B \in S$ gilt $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset$.

Als *geometrische Realisierung* von S bezeichnen wir den Unterraum

$$|S| = \bigcup_{A \in S} |A| = \bigcup_{A \in S} \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}^N .$$

Bedingung (1) ist unnötig: wenn die Ecken von A nicht in allgemeiner Lage sind, dann gibt es zwei verschiedene Teilmengen $B, C \subset A$ mit $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \neq \emptyset$.

9.b. Simpliciale Objekte

Wir verallgemeinern die obige Konstruktion in folgender Hinsicht.

- Wir lassen auch entartete Simplizes zu, das sind affine Simplizes, bei denen aufeinanderfolgende Eckpunkte übereinstimmen. Wir brauchen sie beispielsweise, um simpliciale Abbildungen zu konstruieren, die keine Einbettungen sind.
- Wir betrachten die k -Simplizes nicht mehr als geometrische Objekte, sondern nur noch die Menge der k -Simplizes als Objekt in *Set*.
- Wir erlauben anstelle der Kategorie *Set* jede beliebige Kategorie \mathcal{C} .

Dazu bezeichne Δ die kleine Kategorie mit Objekten $[n] = \{0, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und mit Morphismen

$$\text{Hom}_{\Delta}([m], [n]) = \{ f: [m] \rightarrow [n] \mid f(0) \leq \dots \leq f(m) \} .$$

Den Randoperatoren entsprechen die injektiven Morphismen $\delta^i: [n-1] \rightarrow [n]$ für $0 \leq i \leq n$, die i im Bild auslassen, somit

$$\delta^i(0) = 0, \dots, \delta^i(i-1) = i-1, \quad \delta^i(i) = i+1, \dots, \delta^i(n-1) = n .$$

Hinzu kommen surjektive Entartungsmorphismen $\sigma^i: [n+1] \rightarrow [n]$ für $0 \leq i \leq n$, die gerade i verdoppeln, somit

$$\sigma^i(0) = 0, \dots, \sigma^i(i) = i, \quad \sigma^i(i+1) = i, \dots, \sigma^i(n+1) = n .$$

9.3. BEMERKUNG. Jeder Morphismus in Δ kann als Verkettung von Rand- und Entartungsoperatoren dargestellt werden. Je zwei solche Darstellungen gehen durch sukzessive Anwendung der folgenden Vertauschungsregeln ineinander über.

$$\begin{aligned}\delta^i \delta^j &= \begin{cases} \delta^{j+1} \delta^i & \text{falls } i \leq j, \\ \delta^j \delta^{i-1} & \text{falls } i > j, \end{cases} \\ \sigma^i \sigma^j &= \begin{cases} \sigma^{j-1} \sigma^j & \text{falls } i < j, \\ \sigma^j \sigma^{i+1} & \text{falls } i \geq j, \end{cases} \\ \sigma^i \delta^j &= \begin{cases} \delta^{j-1} \sigma^i & \text{falls } i < j - 1, \\ \delta^j \sigma^{i-1} & \text{falls } i > j, \text{ und} \\ \text{id} & \text{falls } i \in \{j - 1, j\}. \end{cases}\end{aligned}$$

9.4. DEFINITION. Es sei \mathcal{C} eine Kategorie. Ein *simpliciales Objekt* in \mathcal{C} ist ein kontravarianter Funktor $X_\bullet: \Delta \rightarrow \mathcal{C}$. Wir schreiben $X_n = X_\bullet([n]) \in \text{Obj } \mathcal{C}$, $d^i = d_X^i = X_\bullet(\delta^i): X_n \rightarrow X_{n-1}$ und $s^i = s_X^i = X_\bullet(\sigma^i): X_n \rightarrow X_{n+1}$. Für beliebige $\varphi \in \text{Hom}_\Delta([m], [n])$ schreiben wir $\varphi^* = \varphi_X^*$ für $X_\bullet(\varphi): X_n \rightarrow X_m$.

Ein *simplicialer Morphismus* zwischen zwei simplicialen Objekten X_\bullet, Y_\bullet in \mathcal{C} ist eine natürliche Transformation f_\bullet zwischen X_\bullet und Y_\bullet . Wir schreiben $f_n \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_n, Y_n)$ für $f_\bullet([n])$.

Es bezeichne $s\mathcal{C}$ die Kategorie der simplicialen Objekte und Morphismen in \mathcal{C} .

9.5. BEMERKUNG. Wir bringen diese Definition mit der obigen Konstruktion in Verbindung.

- (1) Eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Objekten in \mathcal{C} mit Abbildungen $d^i: X_n \rightarrow X_{n-1}$ und $s^i: X_n \rightarrow X_{n+1}$ für alle n und alle $i \in \{0, \dots, n\}$ definiert genau dann ein simpliciales Objekt, wenn die folgenden dualen Vertauschungsregeln gelten:

$$\begin{aligned}d^j d^i &= \begin{cases} d^i d^{j+1} & \text{falls } i \leq j, \\ d^{i-1} d^j & \text{falls } i > j, \end{cases} \\ s^j s^i &= \begin{cases} s^j s^{j-1} & \text{falls } i < j, \\ s^{i+1} s^j & \text{falls } i \geq j, \end{cases} \\ d^j s^i &= \begin{cases} s^i d^{j-1} & \text{falls } i < j - 1, \\ s^{i-1} d^j & \text{falls } i > j, \text{ und} \\ \text{id} & \text{falls } i \in \{j - 1, j\}. \end{cases}\end{aligned}$$

- (2) Eine Folge (f_n) von Abbildungen $f_n: X_n \rightarrow Y_n$ definiert genau dann einen simplicialen Morphismus, wenn die folgenden zwei Diagramme für alle n und alle $0 \leq i \leq n$ kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{f_n} & Y_n & & X_n & \xrightarrow{f_n} & Y_n \\ d^i \downarrow & & \downarrow d^i & \text{und} & s^i \downarrow & & \downarrow s^i \\ X_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & Y_{n-1} & & X_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & Y_{n+1} \end{array}$$

- (3) Wir erhalten tatsächlich eine Kategorie $s\mathcal{C}$ mit $\text{id}_{X_\bullet} = (\text{id}_{X_n})_n$ und $(f_n) \circ (g_n) = (f_n \circ g_n)$.

9.6. BEMERKUNG. Der simpliciale Standard- n -Simplex $\Delta_\bullet^n = \text{Hom}_\Delta(\cdot, [n]) \in s\text{Set}$ ist definiert als

$$\Delta_k^n = \text{Hom}_\Delta([k], [n]) = \{ a: \{0, \dots, k\} \rightarrow \{0, \dots, n\} \mid a(0) \leq \dots \leq a(k) \}.$$

Die nicht entarteten Simpleses entsprechen genau den nichtleeren Teilmengen von $\{0, \dots, n\}$, also den Seiten eines geometrischen n -Simplexes Δ^n , und man überprüft leicht, dass $|\Delta_\bullet^n| \cong \Delta^n$. Das

Element $\delta_n = \text{id}_{[n]} \in \Delta_n^n$ entspricht dem Inneren des geometrischen n -Simplexes. Alle Simplizes von Δ_\bullet^n entsprechen gerade Abbildungen zwischen simplizialen Simplizes, also

$$\text{Hom}_{s\text{Set}}(\Delta_\bullet^m, \Delta_\bullet^n) = \text{Hom}_\Delta([m], [n]) = \Delta_m^n.$$

Insgesamt erhalten wir also einen kovarianten Funktor $\Delta_\bullet: \Delta \rightarrow s\text{Set}$.

Sei X_\bullet eine simpliziale Menge, dann gibt es eine natürliche Bijektion

$$X_n \cong \text{Hom}_{s\text{Set}}(\Delta_\bullet^n, X_\bullet),$$

dabei entspricht $a \in X_n$ gerade dem Bild von δ_n unter $f \in \text{Hom}_{s\text{Set}}(\Delta_\bullet^n, X_\bullet)$. Wir vergleichen die Situation mit Bemerkung 4.29. Dort hatten wir Kategorien mit einem ausgezeichneten Objekt E betrachtet, so dass $\text{Hom}_\mathcal{C}(E, X)$ das Objekt X als Menge beschreibt. In $s\text{Set}$ reicht ein Objekt nicht — wir brauchen die Folge $(X_n)_n = (\text{Hom}_{s\text{Set}}(\Delta_\bullet^n, X_\bullet))_n$, um ein Objekt $X_\bullet \in s\text{Set}$ zu beschreiben.

Der letzte Sachverhalt ist ein Spezialfall des folgenden Sachverhalts. Hierbei erinnern wir uns, dass simpliziale Abbildungen gerade natürliche Transformationen zwischen kontravarianten Funktoren $\Delta \rightarrow \text{Set}$ sind.

9.7. LEMMA (Yoneda). *Es sei \mathcal{C} eine lokal kleine Kategorie und C ein Objekt von \mathcal{C} .*

(1) (Kovariante Fassung) *Es gibt einen kovarianten Funktor $\text{Hom}_\mathcal{C}(C, \cdot): \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$. Für jeden weiteren kovarianten Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ steht die Menge der natürlichen Transformationen $\text{Hom}_\mathcal{C}(C, \cdot) \rightarrow \mathcal{F}$ in Bijektion zur Menge $\mathcal{F}C$ vermöge*

$$(\varphi: \text{Hom}_\mathcal{C}(C, \cdot) \rightarrow \mathcal{F}) \mapsto \varphi_C(\text{id}_C) \in \mathcal{F}C \quad \text{und} \quad \mathcal{F}C \ni x \mapsto (\text{ev}_x \circ \mathcal{F}).$$

(2) (Kontravariante Fassung) *Es gibt einen kontravarianten Funktor $\text{Hom}_\mathcal{C}(\cdot, C): \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$. Für jeden weiteren kontravarianten Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ steht die Menge der natürlichen Transformationen $\text{Hom}_\mathcal{C}(\cdot, C) \rightarrow \mathcal{F}$ in Bijektion zur Menge $\mathcal{F}C$ vermöge*

$$(\varphi: \text{Hom}_\mathcal{C}(\cdot, C) \rightarrow \mathcal{F}) \mapsto \varphi_C(\text{id}_C) \in \mathcal{F}C \quad \text{und} \quad \mathcal{F}C \ni x \mapsto (\text{ev}_x \circ \mathcal{F}).$$

BEWEIS. In (1) erhalten wir einen kovarianten Funktor $\text{Hom}_\mathcal{C}(C, \cdot)$, indem wir einen Morphismus $g \in \text{Hom}_\mathcal{C}(A, B)$ abbilden auf

$$\text{Hom}_\mathcal{C}(C, A) \xrightarrow{g^\circ} \text{Hom}_\mathcal{C}(C, B).$$

Sei $x \in \mathcal{F}C$, dann erhalten wir eine natürliche Transformation $\text{ev}_x \circ \mathcal{F}$, da

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_\mathcal{C}(C, A) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \text{Hom}_{\text{Set}}(\mathcal{F}C, \mathcal{F}A) & \xrightarrow{\text{ev}_x} & \mathcal{F}A \\ g^\circ \downarrow & & \mathcal{F}g^\circ \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}g \\ \text{Hom}_\mathcal{C}(C, B) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \text{Hom}_{\text{Set}}(\mathcal{F}C, \mathcal{F}B) & \xrightarrow{\text{ev}_x} & \mathcal{F}B. \end{array}$$

Wir wenden diese Transformation auf $\text{id}_C \in \text{Hom}_\mathcal{C}(C, C)$ an und erhalten

$$\text{ev}_x(\mathcal{F}\text{id}_C) = \text{id}_{\mathcal{F}C}(x) = x.$$

Sei umgekehrt $\varphi: \text{Hom}_\mathcal{C}(C, \cdot) \rightarrow \mathcal{F}$ eine natürliche Transformation und $f \in \text{Hom}_\mathcal{C}(C, A)$, dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_\mathcal{C}(C, C) & \xrightarrow{f^\circ} & \text{Hom}_\mathcal{C}(C, A) \\ \varphi_C \downarrow & & \downarrow \varphi_A \\ \mathcal{F}(C) & \xrightarrow{\mathcal{F}f} & \mathcal{F}(A). \end{array}$$

Indem wir id_C einsetzen, erhalten wir $\mathcal{F}f(\varphi_C \text{id}_C) = \varphi_A(f)$. Insbesondere sind die beiden angegebenen Konstruktionen zueinander invers.

Zu (2) gehen wir analog vor und betrachten die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \text{Hom}_{\text{Set}}(\mathcal{F}C, \mathcal{F}B) \xrightarrow{\text{ev}_x} \mathcal{F}B \\ \circ g \downarrow & & \mathcal{F}g \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \text{Hom}_{\text{Set}}(\mathcal{F}C, \mathcal{F}A) \xrightarrow{\text{ev}_x} \mathcal{F}A \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C) & \xrightarrow{\circ f} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ \varphi_C \downarrow & & \downarrow \varphi_A \\ \mathcal{F}(C) & \xrightarrow{\mathcal{F}f} & \mathcal{F}(A) \end{array} \quad \square$$

9.8. PROPOSITION. *Es sei \mathcal{C} eine Kategorie mit Produkt „ \times “. Dann definiert*

$$(X_{\bullet} \times Y_{\bullet})_n = X_n \times Y_n \in \mathcal{C} \\ \text{mit } (\pi_{X_{\bullet}})_n = \pi_{X_n} \quad \text{und} \quad (\pi_{Y_{\bullet}})_n = \pi_{Y_n}$$

für alle Objekte $X_{\bullet}, Y_{\bullet} \in s\mathcal{C}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ ein Produkt auf $s\mathcal{C}$.

Die simplizialen Operatoren auf $X_{\bullet} \times Y_{\bullet}$ sind eindeutig festgelegt durch die Bedingung, dass $\pi_{X_{\bullet}}$ und $\pi_{Y_{\bullet}}$ simpliziale Morphismen sind: aus der universellen Eigenschaft des Produktes $X_m \times Y_m$ folgt für $\varphi \in \text{Hom}_{\Delta}([m], [n])$, dass

$$\varphi_{X \times Y}^* = \varphi_X^* \times \varphi_Y^*: X_n \times Y_n \longrightarrow X_m \times Y_m .$$

BEWEIS. Es seien $X_{\bullet}, Y_{\bullet}, Z_{\bullet}$ simpliziale Objekte in \mathcal{C} , und es seien simpliziale Morphismen $f_{\bullet}: Z_{\bullet} \rightarrow X_{\bullet}$ und $g_{\bullet}: Z_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$ gegeben. Dann existiert für jedes n genau ein Morphismus $h_n: Z_n \rightarrow X_n \times Y_n$ mit $\pi_{X_n} \circ h_n = f_n$ und $\pi_{Y_n} \circ h_n = g_n$. Sei $\varphi \in \text{Hom}_{\Delta}([m], [n])$ wie oben, dann folgt

$$\varphi_{X \times Y}^* \circ h_n = h_m \circ \varphi_{X \times Y}^* .$$

Also erfüllt $X_{\bullet} \times Y_{\bullet}$ die universelle Eigenschaft eines Produktes. \square

Einem Morphismus $\varphi \in \text{Hom}_{\Delta}([m], [n])$ entspricht nach Bemerkung 9.6 eine simpliziale Abbildung $\varphi_{\bullet}: \Delta_{\bullet}^m \rightarrow \Delta_{\bullet}^n$.

9.9. SATZ. *Die Kategorie $s\text{Set}$ ist kartesisch abgeschlossen mit*

$$\text{hom}(Y_{\bullet}, Z_{\bullet})_n = \text{Hom}_{s\text{Set}}(Y_{\bullet} \times \Delta_{\bullet}^n, Z_{\bullet}) , \\ \varphi_{\text{hom}}^* = (\text{id}_{Y_{\bullet}} \times \varphi_{\bullet})^*: \text{Hom}_{s\text{Set}}(Y_{\bullet} \times \Delta_{\bullet}^n, Z_{\bullet}) \rightarrow \text{Hom}_{s\text{Set}}(Y_{\bullet} \times \Delta_{\bullet}^m, Z_{\bullet})$$

$$\text{und} \quad \text{ev}_{Y_{\bullet}, Z_{\bullet}}(f_n \times y_n) = (f_n)_n(y_n \times \delta_n) \in Z_n$$

für alle simplizialen Mengen Y_{\bullet}, Z_{\bullet} , alle $\varphi \in \text{Hom}_{\Delta}([m], [n])$, alle $f_n \in \text{hom}(Y_{\bullet}, Z_{\bullet})_n$ und alle $y_n \in Y_n$.

BEWEIS. Man überzeugt sich, dass φ_{hom}^* simpliziale Abbildungen auf simpliziale Abbildungen abbildet. Also ist $\text{hom}(Y_{\bullet}, Z_{\bullet})_{\bullet}$ ein kontravarianter Funktor $\Delta \rightarrow \text{Set}$, also ein simpliziales hom-Objekt $\text{hom}(Y_{\bullet}, Z_{\bullet})_{\bullet}$.

Sei φ wie oben, und seien $f_n = (f_n)_{\bullet} \in \text{hom}(Y_{\bullet}, Z_{\bullet})_n = \text{Hom}_{s\text{Set}}(Y_{\bullet} \times \Delta_{\bullet}^n, Z_{\bullet})$ und $y_n \in Y_n$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} (\text{ev}_{Y_{\bullet}, Z_{\bullet}})_m(\varphi_{\text{hom} \times Y}^*(f_n \times y_n)) &= (\text{ev}_{Y_{\bullet}, Z_{\bullet}})_m(((\text{id}_{Y_{\bullet}} \times \varphi_{\bullet})^* f_n) \times \varphi_Y^* y_n) \\ &= ((f_n)_m \circ (\text{id}_{Y_m} \times \varphi_m))(\varphi_Y^* y_n \times \delta_m) = (f_n)_m(\varphi_{Y \times \Delta^n}^*(y_n \times \delta_n)) \\ &= \varphi_Z^*((f_n)_n(y_n \times \delta_n)) = \varphi_Z^*((\text{ev}_{Y_{\bullet}, Z_{\bullet}})_n(f_n \times y_n)) , \end{aligned}$$

also ist $\text{ev}_{Y_{\bullet}, Z_{\bullet}} = (\text{ev}_{Y_{\bullet}, Z_{\bullet}})_{\bullet}: \text{hom}(Y_{\bullet}, Z_{\bullet})_{\bullet} \times Y_{\bullet} \rightarrow Z_{\bullet}$ eine simpliziale Abbildung.

Zur universellen Eigenschaft 4.28 (1) des internen Hom-Funktors sei $f_{\bullet}: X_{\bullet} \times Y_{\bullet} \rightarrow Z_{\bullet}$ eine simpliziale Abbildung. Gesucht ist eine simpliziale Abbildung $g_{\bullet}: X_{\bullet} \rightarrow \text{hom}(Y_{\bullet}, Z_{\bullet})_{\bullet}$, so dass $f_{\bullet} = \text{ev}_{Y_{\bullet}, Z_{\bullet}} \circ (g_{\bullet} \times \text{id}_{Y_{\bullet}})$. Seien dazu $x_n \in X_n, y_n \in Y_n$ Simplizes, und sei $z_n = f_n(x_n \times y_n)$. Dann folgt

$$z_n = \text{ev}_{Y_{\bullet}, Z_{\bullet}}(g_{\bullet}(x_n), y_n) = g_n(x_n)(y_n \times \delta_n) ,$$

wodurch $g_n(x_n)$ bereits auf allen Simplizes der Form $y_n \times \delta_n \in (Y_\bullet \times \Delta_\bullet^n)_n$ bestimmt ist. Allgemeiner sei $\varphi \in \text{Hom}_\Delta([k], [n])$, dann folgt unter der Annahme, dass $g_\bullet: X_\bullet \rightarrow \text{hom}(Y_\bullet, Z_\bullet)_\bullet$ simplizial ist, dass

$$\begin{aligned} g_n(x_n)(y_k \times \varphi) &= g_n(x_n)((\text{id}_{Y_\bullet} \times \varphi_\bullet)(y_k \times \delta_k)) = (\varphi_{\text{hom}}^*(g_n(x_n)))(y_k \times \delta_k) \\ &= g_k(\varphi_X^* x_n)(y_k \times \delta_k) = f_k(\varphi_X^* x_n \times y_k). \end{aligned}$$

Umgekehrt definiert diese Gleichung gerade eine simpliziale Abbildung $g_\bullet: X_\bullet \rightarrow \text{hom}(Y_\bullet, Z_\bullet)_\bullet$. \square

9.c. Geometrische Realisierung und Singuläre Simplizes

Wir hatten simpliziale Mengen in Analogie zu simplizialen Komplexen definiert. In diesem Abschnitt zeigen wir, wie wir einer simplizialen Menge X_\bullet funktoriell einen topologischen Raum $|X|$ zuordnen können. Im Fall, dass X_\bullet nur endlich viele nicht entartete Simplizes enthält und Ränder nicht entarteter Simplizes selbst nicht entartet sind, lässt sich $|X|$ als ein simplizialer Komplex in R^N einbetten. Die geometrische Realisierung respektiert außerdem Produkte und Koprodukte.

Umgekehrt ordnen wir jedem topologischen Raum Y funktoriell eine simpliziale Menge $\text{sing}_\bullet Y$ zu. Die beiden obigen Funktoren sind zueinander adjungiert.

9.10. DEFINITION. Es sei X_\bullet eine simpliziale Menge, dann definieren wir ihre *geometrische Realisierung* als

$$|X| = \coprod_n X_n \times \Delta^n / \sim,$$

wobei \sim erzeugt wird durch

Wenn wir einen Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zwischen Kategorien mit Produkt haben, dann liefert die universelle Eigenschaft stets eine natürliche Transformation

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X \times Y) & \xrightarrow{\mathcal{F}(\pi_X)} & \mathcal{F}(X) \\ \mathcal{F}(\pi_Y) \downarrow & \searrow & \uparrow \pi_{\mathcal{F}(X)} \\ \mathcal{F}(Y) & \xleftarrow{\pi_{\mathcal{F}(Y)}} & \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(Y) \end{array}$$

Inbesondere erhalten wir eine natürliche Transformation von Funktoren

$$|\cdot \times \cdot| \rightarrow |\cdot| \times |\cdot| : s\text{Set} \rightarrow kw\mathcal{H}$$

9.11. PROPOSITION. *Die natürliche Transformation*

$$|\cdot \times \cdot| \rightarrow |\cdot| \times |\cdot| : s\text{Set} \rightarrow kw\mathcal{H}$$

ist ein Isomorphismus.

BEWEIS. Es seien X_\bullet, Y_\bullet simpliziale Mengen. Dann ist der Raum $|X| \times |Y|$ ein CW-Komplex mit Zellen der Form

$$|\sigma| \times |\tau| : \Delta_n \times \Delta_m \longrightarrow |X| \times |Y|$$

für nicht entartete Simplizes $\sigma \in X_n, \tau \in Y_m$. Nach Bemerkung 9.6 und Proposition 9.11 induzieren diese Simplizes eine simpliziale Abbildung

$$\sigma_\bullet \times \tau_\bullet : \Delta_\bullet^n \times \Delta_\bullet^m \longrightarrow X_\bullet \times Y_\bullet,$$

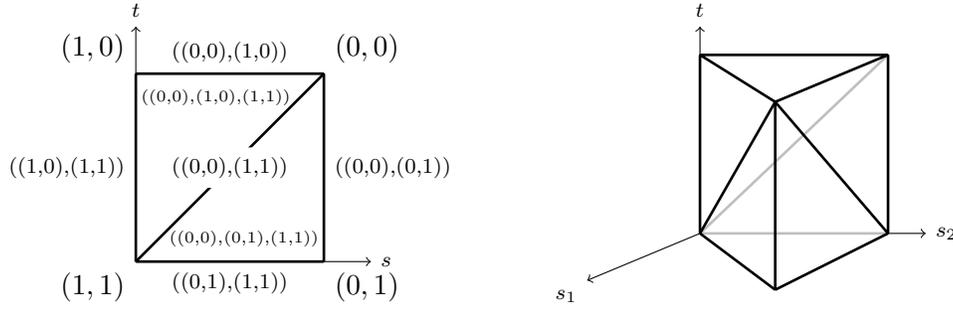


ABBILDUNG 9.1. Produkte von Simplexes

und jeder Simplex im Produkt $X_\bullet \times Y_\bullet$ liegt im Bild mindestens einer solchen Abbildung. Für beliebige Simplexes $\sigma \in X_n$, $\tau \in Y_m$ erhalten wir ein Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} |\Delta_\bullet^n \times \Delta_\bullet^m| & \longrightarrow & |\Delta_\bullet^n| \times |\Delta_\bullet^m| \\ |\sigma_\bullet \times \tau_\bullet| \downarrow & & \downarrow |\sigma| \times |\tau| \\ |X \times Y| & \longrightarrow & |X| \times |Y| . \end{array}$$

Diese Diagramme sind mit den simplizialen Operatoren auf X_\bullet und Y_\bullet verträglich. Es reicht daher zu zeigen, dass der obere Pfeil ein Homöomorphismus ist, denn wenn wir Homöomorphismen entlang von Homöomorphismen verkleben, erhalten wir wieder Homöomorphismen, so dass nach Induktion über n und m auch der untere Pfeil ein Homöomorphismus ist.

Ein k -Simplex in $\Delta_\bullet^n \times \Delta_\bullet^m$ ist ein Tupel von Paaren

$$((i_0, j_0), \dots, (i_k, j_k)) \quad \text{mit} \quad 0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_k \leq n \quad \text{und} \quad 0 \leq j_0 \leq \dots \leq j_k \leq m .$$

Es ist nicht entartet, wenn für $i_{\ell-1} < i_\ell$ oder $j_{\ell-1} < j_\ell$ für jeden Index $\ell \in \{1, \dots, k\}$ gilt.

Zu zeigen ist, dass diese Simplexes eine simpliziale Struktur auf dem Produktraum $\Delta^n \times \Delta^m$ definieren. Ein Punkt in $\Delta^n \times \Delta^m$ wird gegeben durch ein Tupel

$$(s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_m) \quad \text{mit} \quad 0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq 1 .$$

Wir ordnen die Einträge der Größe nach und bestimmen $0 < r_1 < \dots < r_k < 1$, und $\varphi: [k] \rightarrow [n]$, $\psi: [k] \rightarrow [m]$, so dass

$$s_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } i < \varphi(0), \\ r_j & \text{falls } \varphi(j-1) \leq i < \varphi(j), \\ 1 & \text{falls } \varphi(k) \leq i \end{cases} \quad \text{und} \quad t_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } i < \psi(0), \\ r_j & \text{falls } \psi(j-1) \leq i < \psi(j), \\ 1 & \text{falls } \psi(k) \leq i. \end{cases}$$

Wir fassen die obige Gleichung als affine Abbildung $\sigma: \Delta^k \rightarrow \Delta^n \times \Delta^m$ auf. In der Notation von Bemerkung 9.1 gilt

$$\sigma(x_j^k) = (x_{\varphi(j)}^n, x_{\psi(j)}^m) ,$$

und wir schließen, dass der Punkt $(s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_m)$ im Inneren des Simplexes $|\sigma| \subset \Delta^n \times \Delta^m$ liegt, wobei $\sigma = \varphi \times \psi \in \Delta_k^n \times \Delta_k^m$. Auf diese Weise sehen wir, dass die nicht entarteten Simplexes in $\Delta_\bullet^n \times \Delta_\bullet^m$ eine Zell-Zerlegung von $\Delta^n \times \Delta^m$ liefern, was zu zeigen war. \square

Im obigen Beweis sehen wir, dass ein nicht entarteter Simplex σ das Produkt entarteter Simplexes φ und ψ sein kann. Aus diesem Grund war es wichtig, in Definition 9.4 auch entartete Simplexes zuzulassen.

9.d. Realisierungen und interne Hom-Funktoren

Wir verallgemeinern Satz 9.9 und die Konstruktion einer „Realisierung“ auf simpliziale Objekte in anderen Kategorien. Wir beginnen mit einer monoidalen Struktur auf den simplizialen Objekten in einer monoidalen Kategorie.

Sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ eine abgeschlossene monoidale Kategorie mit internem Hom-Funktor hom und Auswertungsabbildung ev . In Analogie zu Proposition 9.11 definieren wir eine monoidale Struktur auf $s\mathcal{C}$ durch

$$(X_\bullet \otimes Y_\bullet)_n = X_n \otimes Y_n \in \mathcal{C} \quad \text{mit} \quad d_i^{X \otimes Y} = d_i^X \otimes d_i^Y \quad \text{und} \quad s_i^{X \otimes Y} = s_i^X \otimes s_i^Y, \\ \text{sowie} \quad E_n = E \quad \text{mit} \quad d_i^E = \text{id}_E \quad \text{und} \quad s_i^E = \text{id}_E.$$

Wir erhalten die zugehörigen natürlichen Isomorphismen als

$$\alpha_{X,Y,Z,n} = \alpha_{X_n,Y_n,Z_n}: ((X_\bullet \otimes Y_\bullet) \otimes Z_\bullet)_n \longrightarrow (X_\bullet \otimes (Y_\bullet \otimes Z_\bullet))_n, \\ \lambda_{X,n} = \lambda_{X_n}: E \otimes X_n = (E_\bullet \otimes X_\bullet)_n \longrightarrow X_n \quad \text{und} \quad \rho_{X,n} = \rho_{X_n}: (X_\bullet \otimes E_\bullet)_n \longrightarrow X_n.$$

9.12. PROPOSITION. *Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ eine monoidale Kategorie, dann bildet $(s\mathcal{C}, \otimes, E_\bullet)$ ebenfalls eine monoidale Kategorie.*

BEWEIS. Übung. □

Um einen internen Hom-Funktor auf $s\mathcal{C}$ wie in Satz 9.9 zu definieren, brauchen wir zuerst einen Ersatz für das Standardsimplex Δ_\bullet^n in $s\text{Set}$.

9.13. DEFINITION. Es sei \mathcal{C} eine Kategorie. Ein *kosimpliziales Objekt* in \mathcal{C} ist ein kovarianter Funktor $X^\bullet: \Delta \rightarrow \mathcal{C}$. Wir schreiben $X^n = X^\bullet([n]) \in \text{Obj } \mathcal{C}$, $\delta_X^i = X^\bullet(\delta^i): X^n \rightarrow X^{n+1}$ und $\sigma_X^i = X^\bullet(\sigma^i): X^n \rightarrow X^{n-1}$.

Ein *kosimplizialer Morphismus* zwischen zwei simplizialen Objekten X^\bullet, Y^\bullet ist eine natürliche Transformation f^\bullet . Wir schreiben $f^n \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^n, Y^n)$ für $f^\bullet([n])$.

Als Beispiele erhalten wir die Familie $(\Delta_\bullet^n)_n$ der Standardsimplizes als kosimpliziales Objekt in $s\text{Set}$ und die Familie Δ^\bullet der geometrischen Standardsimplizes als kosimpliziales Objekt in $kw\mathcal{H}$.

Um einen internen Hom-Funktor auf $s\mathcal{C}$ zu definieren, betrachten wir ein kosimpliziales Objekt $(E_\bullet^n)_n$ in $s\mathcal{C}$. Dann liefert $\varphi: [m] \rightarrow [n]$ eine simpliziale Abbildung $\varphi_\bullet: E_\bullet^m \rightarrow E_\bullet^n$. Wir benötigen ausgezeichnete Morphismen $e_n: E \rightarrow E_n^n$ in \mathcal{C} für alle $n \geq 0$, so dass

$$\varphi_m \circ e_m = \varphi_{E^n}^* \circ e_n \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, E_m^n)$$

für alle $\varphi: [m] \rightarrow [n]$ gilt.

9.14. SATZ. *Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ eine abgeschlossene monoidale Kategorie, und es sei $(E_\bullet^n)_n$ ein kosimpliziales Objekt in $s\mathcal{C}$ mit $e_n: E \rightarrow E_n^n$ wie oben.*

$$\text{hom}(Y_\bullet, Z_\bullet)_n = \text{hom}_{s\mathcal{C}}(Y_\bullet \otimes E_\bullet^n, Z_\bullet) \\ = \left\{ (f_n)_k \in \prod \text{hom}(Y_k \otimes E_k^n, Z_k) \mid \right. \\ \left. (\psi_{Y \otimes E^n}^*)^*(f_n)_k = (\psi_Z^*)_*(f_n)_\ell \text{ für alle } \psi \in \text{Hom}_\Delta([k], [\ell]) \right\}, \\ \varphi_{\text{hom}}^* = (\text{id}_{Y_\bullet} \otimes \varphi_\bullet)^*: \text{hom}(Y_\bullet \otimes E_\bullet^n, Z_\bullet) \rightarrow \text{hom}(Y_\bullet \otimes E_\bullet^m, Z_\bullet) \\ \text{und} \quad (\text{ev}_{Y_\bullet, Z_\bullet})_n: \text{hom}(Y_\bullet, Z_\bullet)_n \otimes Y_n \xrightarrow{\text{id} \otimes \rho^{-1}} \text{hom}(Y_\bullet, Z_\bullet)_n \otimes Y_n \otimes E_n \longrightarrow \\ \xrightarrow{\text{id} \otimes e^n} \text{hom}(Y_n \otimes E_n^n, Z_n) \otimes (Y_n \otimes E_n^n) \xrightarrow{\text{ev}_{Y_n \otimes E_n^n, Z_n}} Z_n$$

für alle simplizialen Mengen Y_\bullet, Z_\bullet und alle $\varphi \in \text{Hom}_\Delta([m], [n])$.

BEWEIS. Wir kopieren den Beweis von Satz 9.9. Als erstes zeigen wir, dass φ_{hom}^* simpliziale Morphismen auf simpliziale Morphismen abbildet. Sei $(f_n)_\bullet \in \text{hom}(Y_\bullet \otimes \Delta_\bullet^n, Z_\bullet)$ und $\psi \in \text{Hom}_\Delta([k], [\ell])$ gegeben. Da φ_\bullet und $(f_n)_\bullet$ simplizial sind und hom ein Bifunktor ist, gilt

$$\begin{aligned} (\psi_{Y \otimes E^m}^*)^*(\varphi_{\text{hom}}^* f_n)_k &= ((\text{id} \otimes \varphi_k) \circ (\psi_Y^* \otimes \psi_{E^m}^*))^*(f_n)_k = ((\psi_Y^* \otimes \psi_{E^n}^*) \circ (\text{id} \otimes \varphi_k))^*(f_n)_k \\ &= (\text{id} \otimes \varphi_k)^*((\psi_Y^* \otimes \psi_{E^n}^*)^*(f_n)_k) = (\text{id} \otimes \varphi_k)^*((\psi_Z^*)^*(f_n)_\ell) \\ &= (\psi_Z^*)^*(\varphi_{\text{hom}}^* f_n)_\ell, \end{aligned}$$

somit ist $\varphi_{\text{hom}}^* f_n$ simplizial, und φ_{hom} ist wohldefiniert. Analog überprüft man, dass $\text{hom}(Y_\bullet, Z_\bullet)_\bullet$ mit den φ_{hom}^* ein simpliziales Objekt in \mathcal{C} bildet.

Als nächstes zeigen wir, dass $\text{ev}_{Y_\bullet, Z_\bullet}$ ein simplizialer Morphismus ist. Dazu seien φ, f_n wie oben und $y_n \in Y_n$. Da $\varphi_m(e_m) = \varphi_{E^n}^*(e_n)$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} (\text{ev}_{Y_\bullet, Z_\bullet})_m(\varphi_{\text{hom} \otimes Y}^*(f_n \otimes y_n)) &= (\text{ev}_{Y_\bullet, Z_\bullet})_m(((\text{id}_{Y_\bullet} \otimes \varphi_\bullet)^* f_n) \otimes \varphi_Y^* y_n) \\ &= ((f_n)_m \circ (\text{id}_{Y_m} \otimes \varphi_m))(\varphi_Y^* y_n \otimes e_m) = (f_n)_m(\varphi_{Y \otimes e^n}^*(y_n \otimes e_n)) \\ &= \varphi_Z^*((f_n)_n(y_n \otimes e_n)) = \varphi_Z^*((\text{ev}_{Y_\bullet, Z_\bullet})_n(f_n \otimes y_n)), \end{aligned}$$

also ist $\text{ev}_{Y_\bullet, Z_\bullet} = (\text{ev}_{Y_\bullet, Z_\bullet})_\bullet: \text{hom}(Y_\bullet, Z_\bullet)_\bullet \otimes Y_\bullet \rightarrow Z_\bullet$ ein simplizialer Morphismus.

Zu zeigen bleibt noch die universelle Eigenschaft 4.28 (1) des internen Hom-Funktors. Sei dazu $f_\bullet: X_\bullet \otimes Y_\bullet \rightarrow Z_\bullet$ eine simpliziale Abbildung. Gesucht ist eine simpliziale Abbildung $g_\bullet: X_\bullet \rightarrow \text{hom}(Y_\bullet, Z_\bullet)_\bullet$, so dass $f_\bullet = \text{ev}_{Y_\bullet, Z_\bullet} \circ (g_\bullet \otimes \text{id}_{Y_\bullet})$. Seien dazu $x_n \in X_n, y_n \in Y_n$ Simplizes, und sei $z_n = f_n(x_n \otimes y_n)$. Dann folgt

$$z_n = \text{ev}_{Y_\bullet, Z_\bullet}(g_\bullet(x_n), y_n) = g_n(x_n)(y_n \otimes \delta_n),$$

wodurch $g_n(x_n)$ bereits auf allen Simplizes der Form $y_n \otimes \delta_n \in (Y_\bullet \otimes \Delta_\bullet^n)_n$ bestimmt ist. Allgemeiner sei $\varphi \in \text{Hom}_\Delta([k], [n])$, dann folgt unter der Annahme, dass $g_\bullet: X_\bullet \rightarrow \text{hom}(Y_\bullet, Z_\bullet)_\bullet$ simplizial ist, dass

$$\begin{aligned} g_n(x_n)(y_k \otimes \varphi) &= g_n(x_n)((\text{id}_{Y_\bullet} \otimes \varphi_\bullet)(y_k \otimes \delta_k)) = (\varphi_{\text{hom}}^*(g_n(x_n)))(y_k \otimes \delta_k) \\ &= g_k(\varphi_X^* x_n)(y_k \otimes \delta_k) = f_k(\varphi_X^* x_n \otimes y_k). \end{aligned}$$

Umgekehrt definiert diese Gleichung gerade eine simpliziale Abbildung $g_\bullet: X_\bullet \rightarrow \text{hom}(Y_\bullet, Z_\bullet)_\bullet$. \square

Literatur

- [Ad] J. F. Adams, Stable homotopy and generalised homology, The University of Chicago Press, Chicago, 1974.
- [At] M. F. Atiyah, *K*-Theory, W. A. Benjamin, New York, 1967.
- [tD1] T. tom Dieck, Topologie, de Gruyter Lehrbuch, de Gruyter, Berlin, 1991, x+401S.
- [tD2] ———, Algebraic Topology, EMS textbooks in Mathematics, EMS, Zürich, 2008, xii+567S.
- [D] A. Dold, Lectures on Algebraic Topology, Springer, Berlin, 1972, xi+377S.
- [DP] A. Dold, D. Puppe, Duality, Trace and Transfer, Proc. Stekhlov Inst. Math. 154, 1984, 85–103.
- [ES] S. Eilenberg, N. Steenrod, Foundations of Algebraic Topology, Princeton University Press, 1952.
- [F] P. Freyd, Abelian Categories, Harper & Row, New York, 1964, xi+164S.
- [H1] A. Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, xii+544S.,
<http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>
- [H2] A. Hatcher, Vector bundles and *K*-theory, preprint,
<http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html>
- [J] K. Jänich, Topologie, Springer Hochschultext, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1980, ix+215S.
- [M] P. May, A Concise Course in Algebraic Topology, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago IL, 1999, x+243S.,
<http://www.math.uchicago.edu/~may/CONCISE/ConciseRevised.pdf>
- [Mi] J. Milnor, Topology from the differentiable viewpoint, The University Press of Virginia, Charlottesville, VA, 1965 ix+65S.
- [Q] B. v. Querenburg: Mengentheoretische Topologie, Springer Hochschultext, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1973, ix+195S.
- [R] Y. B. Rudyak: On Thom Spectra, Orientability, and Cobordism, Springer, Berlin-Heidelberg, 1998, xii+587S.
- [S] E. H. Spanier, Algebraic Topology, Corrected reprint, Springer, Berlin, 1981, xvi+528S.
- [SS] L. A. Steen, J. A. Seebach Jr, Counterexamples in Topology, Second edition, Springer, New York - Heidelberg, 1978, xi+244S.
- [St] N. Strickland, The category of CGWH spaces, preprint, 2009,
neil-strickland.staff.shef.ac.uk/courses/homotopy/cgwh.pdf
- [Sw] R. W. Switzer, Algebraic Topology—Homotopy and Homology, Springer, Berlin, 1975.

Stichwortverzeichnis

- Abbildung
 abgeschlossene, 41
 adjungierte, 21
 Alexander-Whitney, 211
 Auswertungs-, 21
 schwache, 291
 charakteristische, 29, 33, 34, 146
 CW-Spektren, 260
 Diagonal-, 236
 eigentliche, 165
 Einheits-, 279
 Exponential-, 43, 51, 52, 54
 Gysin-, 305
 Höldersche, 7, 37
 homotope, 43
 induzierte
 Homologie, 180
 Kohomologie, 229
 Unterraum, 15
 injektive, 15, 24
 Ketten-, 180
 klassifizierende, 245
 Koketten-, 229
 konstante, 6
 Lipschitz-, 1, 37
 natürliche, 81
 Null-, 142
 Projektions-, 28, 69
 punktierter, 44, 79
 Rand-, *siehe* Homomorphismus, Verbindungs-
 Sequenz-, 86
 Stabilisierungs-, 191
 stetige, 6, 7, 19, 21, 23, 37–39
 surjektive, 24, 41
 Transpositions-, 235, 281
 Vektorbündel-, 242
 Verklebe-, 29, 31, 145
 von Paaren, 44
 zelluläre, 33, 147, 181
Abbildungsgrad, 100, 117, 176, 309
Abelisierung, 48, 59, 66, 76, 197
abgeschlossen, 4, 6, 8, 9, 11, 19, 20, 23, 40
 folgen-, 11
Abschluss, 6, 32
Adjunktion, 131, 132–138, 140–143
Äquivalenz
 Homotopie-
 schwache, 148
 schwache, 155
 von Spektren, 263
 von Kategorien, 73, 74
Äquivalenzrelation, 24, 41, 74
 erzeugte, 25, 40, 61
Algebra, 237
 Kohomologie-, 237, 283
Analysis, 3, 19
Approximation
 CW-, 150
 durch CW-Paar, 284
 zelluläre, 147
Assoziativität, 7
Atlas
 Vektorbündel-, 242
Auflösung
 freie, 202
Augmentierung, 186
Ausschneidung, 285
 Homotopie, 94
Axiom
 Abzählbarkeits-, 11, 17, 19, 25, 30, 38, 39, 137
 Dimensions-, 171, 224
 Eilenberg-Steenrod, 171
 Kohomologie, 223
 Funktorkomplex, 49
 Kategorie, 7
 abgeschlossene monoidale, 140
 kartesisch abgeschlossene, 140
 Modell-, 155
 monoidale, 140
 Summen-, 171, 223
 Trennungs-, 8, 17, 25, 38, 41
Bahn, 69, 74
Ball, 5, 11, 34
 Einheits-, 28
 ε -, 3
Basis, 11, 17, 41, 72
 abzählbare, 11, 17, 27, 101

- Faserbündel, *91*
- Umgebungs-, *11*
- Basispunkt, *44, 47, 50, 57, 68*
- nicht entarteter, *103*
- Baum
 - maximaler, *62, 63*
- Bedingung
 - Mittag-Leffler-, *228*
- beschränkt, *19, 20*
- Bifunktor, *166*
- graduierter, *277*
- Bings Haus, *45*
- Bordismus
 - gerahmter, *114, 115–121, 173*
- Borromäische Ringe, *76*
- Bouquet, *61, 107*
- Bündel
 - Ball-, *254*
 - Faser-, *91*
 - Normalen-, *114*
 - relatives, *254*
 - stabiles, *255*
 - Sphären-, *254*
 - Tangential-, *243*
 - triviale, *91*
 - Vektor-, *242*
 - flaches, *244*
 - stabil triviale, *249*
 - tautologisches, *245*
 - triviale, *242*
 - Whitney-Produkt, *248*
 - Whitney-Summe, *248*
- Bundel
 - Vektor-
 - tautologisches, *306*
- Charakteristik
 - Euler-, *187*
 - Körper, *187*
- Decktransformation, *70, 71–74*
- Diagramm, *132*
- kommutatives, *13, 49*
- Dimension, *27, 28, 41, 101*
- Divisionsalgebra, *2*
- Dreiecksungleichung, *3*
- dual, *16, 25*
- Dualisieren, *230*
- Dualität
 - Lefschetz-, **299**
 - Poincaré-, **299**
 - S*-, *293*
 - schwache, *291*
 - Spanier-Whitehead-, *293*
 - starke, *292*
- Dualität
 - Eckmann-Hilton-, *102, 155, 162*
- Eigenschaft
 - Abzählbarkeits-, *11, 17, 19, 25, 30, 38, 39*
 - charakteristische
 - kompakt-offene Topologie, *21, 34*
 - Produkt, *16*
 - Quotient, *25, 34, 85, 139*
 - Summe, *13*
 - Tensorprodukt, *198*
 - Unterraum, *15, 45, 139*
 - Homotopieausdehnungs-, *102*
 - Homotopieliftung-, *88, 102*
 - Trennungs-, *8, 17, 25, 38, 41*
 - universelle, *16*
 - interner hom-Funktor, *142*
 - Kolimes, *27, 110, 134*
 - Koprodukt, *14, 56, 61, 76*
 - Limes, *134*
 - Produkt, *16, 56, 76*
 - Pullback, *134*
 - Pushout, *26, 59, 76, 134*
 - Tensorprodukt, *142, 198*
 - universelle Überlagerung, *73*
- eigentlich, *119*
- Einbettung, *15, 39*
- Einhängung
 - reduzierte, *108*
- Einheit
 - Adjunktion, *131, 141*
- Einheitswürfel, *80*
- Erzeuger
 - Kategorie, *170*
- Exponentialgesetz, **21**, *132, 143*
- abstraktes, **142**
- Faser, *88, 105, 170*
- Homotopie-, *162*
- typische, *91*
- Faserung, *155*
- azyklische, *155*
- Hopf-, *92, 98, 99*
- quaternionische, *93, 99*
- Hurewicz-, *88, 163*
- Pfad-, *162*
- Serre-, *88*
- triviale, *155*
- fein, *8, 13, 24, 25*
- Filtrierung
 - Schicht-, *262*
- Fixpunkt, *1, 53, 311*
- Fläche, *66*
- nicht orientierbare, *66*
- orientierbare, *66*
- Flasche
 - Kleinsche, *66*
- Folge, *9, 18, 19, 37, 40, 42*
- Form
 - Schnitt-, *301*

Fundamentalgruppe, 46, 57–67, 71–75, 80
 des Komplements, 60, 61
 Funktion
 Morse-, 122
 stetige, 8, 9
 Funktor, 49, 73, 75, 76, 170, 223
 adjungierter, 131, 132–138, 140–143
 Bi-, 166
 δ -, 200
 Diagonal-, 132
 Einhängungs-, 260
 exakter, 199
 links-, 200
 rechts-, 199
 Ext-, 201
 graduierter, 180
 interner hom-, 141–144
 kontravarianter, 74
 kostetiger, 135
 kovarianter, 49
 monoidaler, 306
 stetiger, 135
 Tor-, 201
 treuer, 170
 vergesslicher, 132, 142

 Galois-Theorie, 73, 74
 Gerüst, 28, 29, 62, 146
 Geschlecht, 66
 Grad
 CW-Spektren, 260
 Spanier-Whitehead-Dualität, 293
 Grenzwert, 9, 11, 18, 20, 37
 grob, 8, 12, 15, 16, 21, 24
 Gruppe, 7, 46, 55, 69, 75, 76
 abelsche, 75, 76
 Decktransformationen-, 70–74
 freie, 55, 76
 Galois-, 73, 74
 perfekte, 198
 Struktur-, 242
 topologische, 241
 unendliche Dieder-, 55, 78
 Unter-, 56, 57, 71, 73, 74

 Häufungspunkt, 18
 Höhe
 Zelle, 262
 Homöomorphismus, 6, 39, 44, 60, 69, 73
 Homologie
 ganzahlige, 198
 K -, 251
 Kettenkomplex, 180
 reduzierte, 171
 allgemeine, 170
 relative, 172
 singuläre E -, 285
 singuläre, 187
 unreduzierte
 allgemeine, 172
 zelluläre
 reduzierte, 181
 unreduzierte, 186
 Homologiekategorie, 180
 Homomorphismus
 Gruppen-, 56, 69, 75
 Hurewicz-, 197
 J -, 124
 Verbindungs-, 87, 89, 171, 185
 homotop
 ketten-, 184
 links-, 156
 rechts-, 156
 Homotopie, 43, 44, 45, 51
 CW-Spektren, 261
 Ketten-, 184
 Links-, 156
 punktierter, 79
 Rechts-, 156
 relative, 44, 45, 46, 48, 67, 74
 Homotopieäquivalenz, 44, 45, 50, 74, 149
 Homotopiegruppe, 80
 höhere, 48
 Spektrum, 261
 stabile, 111, 172
 Homotopieinvarianz, 171, 223
 Homotopiekategorie
 stabile, 261
 naive, 111
 Homotopiekategorie, 44, 45
 freie, 44, 83
 Huhn
 topologisches, 153

 Identität, 6, 36
 in Kategorie, 7, 44
 Index
 Fixpunkt-, 310
 Inklusion, 13, 15
 zelluläre, 259
 Inneres, 6
 Integration
 Faser, 305
 Intervall, 23
 Inverses, 44
 Homotopie-, 44, 50
 Inzidenzzahlen, 181
 Isomorphismus, 44, 47, 50
 Hurewicz-, 197
 Stabilisierungs-, 188
 Thom-, 297
 Vektorbündel-, 242

 Karte
 Faserbündel, 91
 Kategorie, 7, 16, 26, 44, 49, 55, 59, 61, 73, 75, 76

abelsche, 170
 abgeschlossene, 141
 additive, 265
 bivollständige, 133
 derivierte, 184
 Grothendieck-, 169, 170
 Homotopie-, 44, 157, 171
 stabile, 261
 kartesisch abgeschlossene, 140, 143
 kovollständige, 133
 Lusternik-Schnirelman-, 287
 Modell-, 155, 156–158
 monoidale, 140
 abgeschlossene, 140
 graduiert symmetrische, 277
 streng, 140
 präadditive, 264
 punktierte, 142, 169
 symmetrisch monoidale, 141
 vollständige, 133

Kegel
 Abbildungs-
 reduzierter, 159
 Spektra, 260
 reduzierter, 105

Kern, 86, 170

Kette, 180

Klasse, 7
 Chern-, 257
 Euler-, 304
 relative, 304
 Fundamental-, 299
 primitive, 301
 Stiefel-Whitney-, 257
 Thom-, 296

Knoten, 61

Kobordismus
 gerahmter, 120

Koeffizienten, 171, 224
 universelle
 Homologie, **209**, 216
 Kohomologie, **231**, 300

Koeinheit
 Adjunktion, 131, 142

Körper, 7
 Schief-, 41

Kofaser, 105, 170
 Homotopie-, 106

Kofaserung, 102, 145, 155
 azyklische, 155
 Hurewicz-, 102
 triviale, 155

Kohomologie
 darstellbare, 240
 Kokettenkomplex, 229
 multiplikative, 268
 reduzierte, 224
 allgemeine, 223
 gewöhnliche, 224
 relative, 224
 singuläre E -, 285
 unreduzierte, 224
 zelluläre, 230

Kokern, 170

Kokette, 229

Kolimes, 26, 110, 133, 134–136
 endlicher, 133

kommutativ
 graduiert, 236, 283

Kommutator, 48, 66

kompakt, 19, 20, 25, 32, 39, 48, 51, 57, 77
 abzählbar, 19, 20
 folgen-, 19, 20
 lokal, 20, 21, 33, 42, 45
 quasi-, 19, 25

kompakt erzeugt, 165–166

Komplex
 CW-, 29, 30–35, 41, 62–66, 78, 137
 endlicher, 32
 punktierter, 146

Ketten-, 180
 augmentierter, 186
 Unter-, 184
 zellulärer, 181

Koketten-, 229
 zellulärer, 230

singulärer, 187

Unter-, 32, 36

Zell-, 29

Konvergenz, 23, 37
 gleichmäßige, 22, 40
 lokal, 23

 kompakte, 22, 40

Koproduct, 13, 26, 39, 55, 61, 76, 135, 141

Korand
 Kettenkomplex, 229

Kozykel, 229
 gerahmter, 120

Kragen, 114

Kreis, 58–61, 63, 77
 polnischer, 153

kürzen, 54

Länge
 Cup-, 283

Lemma
 Fünfer-, **88**
 Schlangen-, **185**
 Urysohn, **9**
 Vierer-, **88**
 Yoneda
 fett, 318
 Zorn, 202

Lift, 51, 52, 54, 67–73, 88

Limes, 132, 134–136, 225
 abgeleiteter, 227
 endlicher, 132
 Lokalisierung, 157

 Mannigfaltigkeit, 27, 34, 41, 66, 137
 differenzierbare, 243
 geschlossene, 254
 komplexe, 243
 mit Rand, 101
 Maximum, 19
 Menge, 7, 26
 Potenz-, 3, 5
 punktierter, 81
 Metrik
 französische Eisenbahn-, 36
 p -adische, 37
 Riemannsche, 243
 metrisierbar, 5, 10, 18, 28, 30
 Modellstruktur, 155
 Cole-, 156
 gemischte, *siehe* Modellstruktur, Cole-
 Hurewicz-, *siehe* Modellstruktur, Ström-
 naive, *siehe* Modellstruktur, Ström-
 Quillen-, 156
 Serre-, *siehe* Modellstruktur, Quillen-
 Standard-, *siehe* Modellstruktur, Quillen-
 Ström-, 156
 Morphismus, 7, 44, 49, 76
 δ -Funktoren, 201
 universeller, 201
 dualer, 291
 invertierbarer, *siehe* Isomorphismus
 Null-, 142
 Multiplikation
 Spektren, 279

 Norm, 42
 äquivalente, 4
 normal, 9, 18, 19, 22, 28, 31, 39, 41
 Normalteiler, 56, 71–72
 erzeugter, 56, 62, 65
 Nullbordismus
 gerahmter, 115

 Objekt, 7, 49
 duales
 schwach, 291
 stark, 292
 Einheits-, 140
 F -flaches
 F -flaches, 307
 fibrantes, 156
 initiales, 81, 134, 141, 156
 kofibrantes, 156
 Null-, 81, 142
 Quotienten-, 170
 konormales, 170
 reflexives, 291
 terminales, 81, 134, 141, 156
 Unter-, 170
 normales, 170
 offen, 4, 5, 23
 Operation
 Gruppen-, 69, 70–74
 eigentlich diskontinuierliche, 69, 70–71
 freie, 69, 70–71
 stetige, 241
 Orientierung, 296
 Standard-, 298

 Paar, 44, 179
 CW-, 145
 punktierter, 84
 Paarung
 Kronecker-, 121, 231
 Partition der Eins, 246
 Periodizität
 Bott-, 125
 Polynom, 37, 75
 Präsentation, 62, 66
 Produkt, 20, 39, 40, 54–56, 76, 91, 135, 138, 141
 äußeres, 234
 amalgamiertes, 59
 Bi-, 265
 Cap-, 236, 282
 Cup-, 121, 236, 282
 direktes, 39, 75
 Erweiterungs-, 201
 freies, 55, 56
 inneres, 236, 282
 Kreuz-
 Kohomologie, 236
 Kronecker-, 231
 reduziertes, 107
 naives, 270
 Schnitt-, 301
 Schräg-, 234, 280
 Slant-, 234
 Smash-, 107
 Kohomologie, 234, 280
 Tensor-, 140
 R -Moduln, 199
 topologisches, 15, 75
 Torsions-, 201
 Verschlingungs-, 303
 Wedge-, 61, 107
 Whitney-, 248
 Projektion
 stereographische, 27, 60
 Pullback, 134
 Punkt
 innerer, 102
 Rand-, 102
 Pushout, 26, 59, 60, 76, 105, 134

Quaternionen, 121
 Quotient, 137
 Homotopie-, 106
 Kettenkomplex, 184
 nach Äquivalenzrelation, 24, 25
 nach Gruppenwirkung, 43, 69, 70–74

Rand, 6
 geometrischer, 80, 95, 101
 Kettenkomplex, 180

Randoperator
 zellulärer, 180–186

Rang
 lokaler, 248
 Vektorbündel, 242

Raum
 Eilenberg-Mac Lane-, 193
 einpunktiger, 44
 Hausdorff-, 8, 9, 19, 20, 27, 32, 33, 38, 39, 70, 78, 101
 schwach, 137, 165–166
 klassifizierender, 245
 kompakt erzeugter, 136
 kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-, 21, 137, 165–166
 metrischer, 3, 8, 11, 20, 22, 36, 38, 40, 137
 Moore-, 207
 Pfad-, 48, 156
 projektiver, 41
 komplex, 92, 183, 306
 quaternionisch, 93, 183, 306
 reell, 77, 183
 punktierter, 44, 61, 79
 gut, 61, 103
 Schleifen-, 84
 simplizialer, 245
 Thom-, 254
 relativer, 295
 topologischer, 5, 7
 Vektor-, 7, 39, 42
 dualer, 39
 normierter, 1, 3, 36, 42
 orientierter, 296

reduzieren, *siehe* kürzen

regulär, 9, 28
 vollständig, 9

Retrakt, 45, 53, 103
 Abbildung, 127
 Deformations-, 45, 58, 60, 61, 149
 starker, 45, 46
 Umgebungs-, 103, 145
 Morphismus, 127
 Umgebungs-, 293

Retraktion, *siehe* Retrakt

Ring
 Koeffizienten-, 282
 Kohomologie-, 237

Ringe
 Borromäische, 60

Satz
 Approximation
 CW-, 151
 zelluläre, 147
 Ausschneidungs-
 Homotopie, 94, 105
 stabile Homotopiegruppen, 112
 Barratt-Puppe-Sequenz, 160
 Blakers-Massey, 94, 105
 Borsuk-Ulam, 53, 75
 Bott-Periodizität, 251
 Brouwer, 101
 Brouwer-Hopf, 98
 Brownscher Darstellungs-, 193, 240
 Dualität
 Lefschetz-, 299
 Poincaré-, 299
 Spanier-Whitehead-, 294
 Eilenberg-Zilber, 211
 Eulerscher Polyeder-, 187
 Exponentialgesetz, 21, 143
 abstraktes, 142
 Fixpunkt-
 Banach, 1
 Brouwer, 1, 53, 99
 Lefschetz, 311
 Freudenthal, 109, 111, 175
 Fundamental-
 Modellkategorien, 158
 Fundamental- der Algebra, 75
 Gabriel-Popescu, 169
 Gysin-Sequenz, 305
 Hadamard-Cartan, 194
 Heine-Borel, 18, 20, 31
 Hilbert Basis-, 38
 Homomorphie-, 170
 Homotopiesequenz
 Paar, 87
 Serre-Faserung, 89
 stabile, 112
 Hurewicz, 197
 Igel, 100
 Invarianz der Dimension, 101
 Künneth-Formel
 algebraische, 213
 kohomologische, 233, 286
 topologische, 211
 Kervaire-Milnor, 2
 Klassifikation
 Vektorbündel, 246
 Lebesgue, 20, 57
 Liftungs-, 67, 71, 90
 Homotopie-, 51, 67
 Mayer-Vietoris, 173, 224, 285

Metrisations-
 Urysohn, 12, 28
 Milnor, 154
 Pontryagin
 $\pi_1^s(S^0)$, 122
 Pontryagin-Thom
 gerahmter Bordismus, **116**, 118
 Quillen, 158
 Röhrenumgebung, 254
 Seifert-van Kampen, **57**, 58–61
 Serre, 124
 Thom-Isomorphismus, **297**
 Tychonoff, 20
 universelle Koeffizienten
 Homologie, **209**, 216, 267
 Kohomologie, **231**, 267, 300
 vom Igel, 2
 Whitehead, **149**, 198
 für Spektren, **263**
 Whitney-Einbettungs-, 254
 Zwischenwert-, 53
 Schleife, 46, 67
 Schleifenraum, 48, 84
 freier, 48
 Schneeflockenkurve, 7
 Schnitt, 91
 Seite
 offene, 85
 Sequenz, 86
 Barratt-Puppe-, 160
 Bockstein-, 220, 267
 exakte, 86, 126, 170
 Homotopie-, 164
 kurze, 86
 lange, 171, 223
 Faser-, 164
 Spektren, 268
 Gysin-, **305**
 Homologie-, 171, 267
 Bockstein-, 220
 Mayer-Vietoris-, **173**
 Homotopie-
 Faserungen, **89**
 Kofaserung, 107
 Paar, **87**
 stabile, **112**, 172, 267
 koexakte
 Homotopie-, 160
 Kofaser-, 160, 265
 Kohomologie-, 223, 267
 Mayer-Vietoris-, 224
 Mayer-Vietoris-, **173**, 224, 285
 Puppe-, 265
 Sechs-Term-, 251
 Signatur, 301
 Simplex
 Standard-
 geometrischer, 315
 simplizialer, 317
 Skelett, 28, 29, 146
 Spektrum, 111, 191
 CW-, 260
 abzählbares, 260
 endliches, 260
 Eilenberg-Mac Lane-, 193
 Einhängungs-, 191
 Modul-, 279
 Moore-, 207
 ω -, 191
 Ring-, 279
 Sphären-, 193
 Suspensions-, 191
 Thom-
 normales, 295
 Sphäre, 2, 27, 60, 66, 175, 225
 Spur, 307
 Super-, 309
 stetig, 3, 4, 6, 13
 am Punkt, 3, 37
 Subbasis, 11, 16, 21
 Summe
 direkte, 39, 54, 170, 265
 topologische, 13
 Whitney-, 248
 zusammenhängende, 302
 Suspension
 reduzierte, 108
 System
 inverses, 225

 Teilfolge, 18
 Teilmenge
 offene, 27
 Tensorprodukt
 R -Moduln, 199
 Topologie, 5
 Box-, 17, 20
 CW-, 29, 30, 32, 34, 42
 diskrete, 5, 11, 23, 24, 28, 29, 38, 50–52, 54
 Final-, 24
 Identifizierungs-, *siehe* Quotienten-
 induzierte, 15, 24, 41
 Initial-, 24
 Klumpen-, 5, 11, 17, 24, 38, 69
 koendliche, 37, 38
 koinduzierte, 24, 26, 41
 Kolimes-, 27, 29, 31, 33
 kompakt erzeugte, 137
 kompakt-offene, 21, 22, 34, 40, 45, 48, 84, 143
 metrische, 4, 39, 40
 Ordnungs-, 38
 p -adische, 40
 Produkt-, 15, 20, 21, 24, 33, 34, 39, 40, 42, 43, 138

Quotienten-, 25, 26–28, 31, 33, 40–42, 59, 61, 69, 70, 79, 137
 Relativ-, *siehe* Unterraum-
 schwache, 26, 29, 31, 33
 Spur-, *siehe* Unterraum-
 Summen-, 13, 24, 137
 Unterraum-, 15, 17, 24, 25, 27, 29, 30, 32, 39, 40, 45, 48, 76, 139
 Verklebungs-, 26, 29, 30, 40
 Zariski-, 37, 38
 zur Basis, 12, 17, 72
 zur Subbasis, 12, 16, 21
 Torsion, 205, 302
 Torus, 66
 Clifford-, 61
 Totalraum, 91
 Transformation
 natürliche, 81, 171
 Transposition, 235, 281
 Trivialisierung, 114
 lokale, 91

 Überdeckung
 offene, 18, 20, 57
 Teil-, 19
 überlagert
 gleichmäßig, 51, 68, 70, 72
 Überlagerung, 50, 52, 54, 66–74, 77, 90, 91
 n -zusammenhängende, 150
 normale, 70, 71–74, 78
 universelle, 51, 66, 71–74, 78
 Umgebung, 4, 5, 27, 37, 69
 abgeschlossene, 22
 kompakte, 20
 zusammenhängende, 24
 weg-, 24
 Umgebungsbasis, 17, 30
 Umlaufzahl, 43
 Unterkategorie
 volle, 136
 Untermannigfaltigkeit, 27
 eigentliche, 254
 gerahmte, 114
 Unterraum, 17, 19, 139
 Unterspektrum, 260
 kofinales, 260
 unzusammenhängend
 total, 24, 40

 Vereinigung
 disjunkte, 13, 17, 39, 137
 Vererbung, 17, 25, 41, 70
 Verkettung, 7, 44, 46

 Weg, 23, 34, 36, 45, 46, 68
 Wirkung, *siehe* Operation
 Wort, 54
 gekürztes, 54
 reduziertes, 54, 55

 Zahl
 Betti-, 187, 301
 dyadische, 9
 Euler-, 187, 301
 Lefschetz, 309
 Zelle, 28, 29, 32, 146
 abgeschlossene, 29, 146
 CW-Spektrum, 260
 zusammenhängend, 23, 25, 35, 40, 66–74, 78
 einfach, 50, 60, 66, 75
 semilokal, 71, 74
 lokal, 24
 n -, 93, 148
 weg-, 23, 25, 34–36, 40, 47, 48, 50, 57–68, 75
 lokal, 24, 67–74
 Zusammenhangskomponente, 24, 74
 Weg-, 24, 35, 40, 45, 48, 67, 73, 80
 zusammenziehbar, 34, 44–46, 50, 51, 59–62, 83, 172
 lokal, 34, 78
 Zykel, 180
 gerahmter, 118
 Zylinder, 106, 156
 Abbildung-, 103
 reduzierter, 159
 relativer, 149
 reduzierter, 106, 162