2. Übungsblatt zur Vorlesung „Mehrfachintegrale“ im Wintersemester 2015–2016 bei Prof. Dr. S. Goette

---

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Abgabe: Freitag, den 22.01.2016 bis 10:30 Uhr in den gelben Metallkästen, Eckerstr. 1, UG.

Aufgabe 1: Zeigen Sie:

(a) Es sei f Riemann-integrierbar über $C \subset \mathbb{R}^n$ und $A \subset C$ sei Jordan-messbar, dann ist f auch integrierbar über A.

Hinweis: Benutzen Sie Proposition 1.6 und 2.6

(b) Es sei f Riemann-integrierbar über Jordan-messbare Mengen A und B, dann ist f auch integrierbar über $A \cap B$ und $A \cup B$, und es gilt

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A \cap B} f$$

Aufgabe 2: Es sei f beschränkt und $N \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-Nullmenge. Zeigen Sie:

(a) $\int_N f = 0$.

(b) $\int_A f = \int_B f$, falls $A \setminus N \subset B \subset A \cup N$.

Aufgabe 3: Es sei $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$ die Folge von Funktionen definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ n - n^2(x - \frac{1}{n}) & \text{falls } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie f_2 und f_3.

(b) Bestimmen Sie die Grenzfunktion der Folge $\{f_n\}$ für $n \to \infty$.

(c) Berechnen Sie $\int_0^1 f_n(x)dx$ für alle $n \geq 2$. Was ist der Grenzwert für $n \to \infty$?

(d) Warum widersprechen (b) und (c) nicht dem Satz von Arzela?

Aufgabe 4: Es sei $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Für jede von folgenden Funktionen beschließen Sie ob Sie Riemann-integrierbar sind oder nicht. Begründen Sie Ihre Antwort in jedem Fall.

(a) $f(x,y)$ ist 1 falls $x \in \mathbb{Q}$ und $y \in \mathbb{Q}$, und 0 sonst.

(b) $f(x,y)$ ist 1 falls $x \in \mathbb{Q}$ und $y \in \mathbb{Q}$ und $x = y$, und 0 sonst.

(c) $f(x,y) = \frac{1}{q+s}$ falls $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ und $y = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ gekürzte Brüche sind, und 0 sonst.