

4. Übungsblatt zur Vorlesung „Mehrfachintegrale“ im Wintersemester 2015–2016 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.
Abgabe: Freitag, den 5.02.2016 bis 10:30 Uhr in den gelben Metallkästen, Eckerstr. 1, UG.

Aufgabe 1:

Es sei $a > 0$.

- (a) Bestimmen Sie $c_a \in \mathbb{R}$ so, dass

$$c_a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = 1$$

- (b) Berechnen Sie die Varianz

$$\int_{-\infty}^{\infty} c_a x^2 e^{-ax^2} dx$$

Für welchen Wert von a ist die Varianz genau 1?

Hinweis: Betrachten Sie auf \mathbb{R}^2 die Funktion $(x^2 + y^2)e^{-a(x^2+y^2)}$.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie die Abbildung

$$F : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \phi, \psi) \mapsto (r \cos(\phi) \sin(\psi), r \sin(\phi) \sin(\psi), r \cos(\psi))$$

- (a) Bestimmen Sie das Bild im F .
- (b) Bestimmen Sie die Jacobi-Determinante $|\det dF(r, \phi, \psi)|$.
- (c) Zeigen Sie, dass $F : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \text{im } F$ ein Diffeomorphismus ist. Geben Sie die Umkehrabbildung an.

Aufgabe 3:

Für welche $a \in \mathbb{R}$ existiert das uneigentliche Integral

$$\int_{B_R(0)} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{a}{2}} dx dy dz?$$

Berechnen Sie es gegebenenfalls mit Aufgabe 2.

Aufgabe 4:

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = -\log(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad \text{falls } (x, y) \neq (0, 0).$$

Bestimmen Sie $\int_{B_1(0) \setminus \{0\}} f(x, y) dx dy$, wobei $B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ist.