

Kurzscript zur Analysis im WS 2021/22 und SS 2022

Sebastian Goette

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|----|
| Kapitel 1. Grundlagen | 1 |
| 1.a. Mengen | 1 |
| 1.b. Vollständige Induktion | 4 |
| 1.c. Angeordnete Körper | 8 |
| 1.d. Vollständigkeit | 11 |
| Kapitel 2. Folgen, Reihen und Grenzwerte | 15 |
| 2.a. Konvergenz von Folgen | 15 |
| 2.b. Uneigentliche Konvergenz | 18 |
| 2.c. Häufungspunkte und Kompaktheit | 21 |
| 2.d. Komplexe Zahlen und Euklidische Norm | 22 |
| 2.e. Reihen | 26 |
| 2.f. Potenzreihen | 29 |
| Kapitel 3. Stetige Funktionen | 33 |
| 3.a. Stetigkeit | 33 |
| 3.b. Häufungspunkte und Grenzwerte | 35 |
| 3.c. Eigenschaften stetiger Funktionen | 37 |
| 3.d. Logarithmus und Winkelfunktionen | 39 |
| Kapitel 4. Differentialrechnung | 43 |
| 4.a. Die Ableitung | 43 |
| 4.b. Ableitungsregeln | 45 |
| 4.c. Extrema und Mittelwertsatz | 47 |
| 4.d. Höhere Ableitungen | 50 |
| Kapitel 5. Integralrechnung | 55 |
| 5.a. Das Riemann-Integral | 55 |
| 5.b. Das Integral stetiger Funktionen | 58 |
| 5.c. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung | 60 |
| 5.d. Integral und Ableitung von Potenzreihen | 64 |
| 5.e. Der Satz von Taylor | 66 |
| 5.f. Gewöhnliche Differentialgleichungen | 68 |
| Literatur | 71 |

Grundlagen

19.10.21

Aus der Schule kennen wir die natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\} \quad \text{und} \quad \mathbb{N}_+ = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

die ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}, n > 0\}$$

und die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}_+, \text{ggT}(p, q) = 1 \right\}$$

schon recht gut. Wir werden sie daher nicht komplett neu einführen, sondern nur einige für diese Vorlesung wichtige Eigenschaften hervorheben. Eine detailliertere Einführung findet sich in [5, Kap 1], [6, Anhang] oder in [3, Kap. 1].

Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Wenn wir $p \in \mathbb{Z}$ als $\frac{p}{1} \in \mathbb{Q}$ schreiben, erhalten wir insgesamt

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Ausgehend von den obigen Zahlenmengen wollen wir später die *reellen Zahlen* \mathbb{R} beschreiben. Dabei wollen wir das Problem lösen, dass es

1.a. Mengen

Als erstes möchte ich einen „naiven“ Mengenbegriff einführen. Ein erster Versuch einer Beschreibung von Mengen stammt von Georg Cantor aus dem Jahr 1895.

„Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

Auf der einen Seite ist wichtig, dass Elemente von Mengen stets „bestimmte, wohlunterschiedene Objekte“ sind. Wenn m ein Element von M ist schreiben wir

$$m \in M.$$

Auf der anderen Seite kann nicht jede Zusammenfassung solcher Objekte eine Menge sein. Bertrand Russell hat bereits 1903 einen Widerspruch im Zusammenhang mit dem obigen Begriff befunden: eine Menge ist ein Objekt unseres Denkens, und kann daher auch ein Element einer Menge sein. Insbesondere könnten wir die Menge aller Mengen betrachten, die sich nicht selbst enthalten:

$$(1.1) \quad M = \{ X \text{ Menge} \mid X \notin X \}.$$

Es muss dann entweder $M \in M$ oder $M \notin M$ gelten, aber beides führt zu einem Widerspruch (*Russellsche Antinomie*).

Wir führen daher eine naive Mengenlehre ein, die sich grob an den Axiomen von Zermelo und Fraenkel aus den Jahren 1907–1930 orientiert. Wir listen die für uns wichtigsten Axiome im Folgenden auf, und führen dabei auch gleich unsere Notation für Mengen ein. Erklärungen folgen direkt im Anschluss.

1.1. ANNAHME (naive Zermelo-Fraenkel-Axiome). *Mengen* haben die folgenden Eigenschaften.

- (1) *Extensionalität*. Zwei Mengen A, B sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente X enthalten:

$$\forall A \forall B \quad (A = B \iff (\forall X \in A \ X \in B \ \wedge \ \forall X \in B \ X \in A)) .$$

- (2) *Leere Menge*. Es gibt eine Menge \emptyset , die kein Element enthält:

$$\forall X \ \neg X \in \emptyset .$$

- (3) *Paarmenge*. Zu je zwei Objekten A, B gibt es eine Menge $\{A, B\}$, die genau A und B enthält:

$$\forall A \forall B \forall X \quad (X \in \{A, B\} \iff (X = A \vee X = B)) .$$

- (4) *Vereinigung*. Zu jeder Menge A von Mengen gibt es eine Menge $\bigcup A$, die genau die Elemente der Elemente von A enthält:

$$\forall A \forall X \quad (X \in \bigcup A \iff \exists B \in A \ X \in B)$$

- (5) *Unendliche Menge*. Es gibt eine Menge A von Mengen, die die leere Menge \emptyset und mit jedem Element X auch das Element $X \cup \{X\}$ enthält:

$$\exists A \quad (\emptyset \in A \ \wedge \ \forall X \in A \ \bigcup \{X, \{X, X\}\} \in A)$$

- (6) *Potenzmenge*. Zur jeder Menge A existiert die Menge $\mathcal{P}(A)$ aller Teilmengen von A , also

$$\forall A \forall X \quad (X \in \mathcal{P}(A) \iff \forall Y \in X \ Y \in A) .$$

- (7) *Aussonderung*. Es sei $P(X)$ eine *Eigenschaft* von X , also ein Ausdruck, der für jedes X entweder wahr oder falsch ist. Dann bilden diejenigen Elemente einer Menge A , die P erfüllen, eine Teilmenge $\{X \in A \mid P(X)\}$ von A , das heißt,

$$\forall A \forall Y \quad (Y \in \{X \in A \mid P(X)\} \iff (Y \in A \wedge P(Y))) .$$

- (8) *Ersetzung*. Es sei F eine *Operation*, die aus einer Menge X eine Menge $F(X)$ macht. Dann können wir F auf jedes Element einer Menge A anwenden und erhalten eine neue Menge $\{F(X) \mid X \in A\}$, das heißt,

$$\forall A \forall Z \quad (Z \in \{F(X) \mid X \in A\} \iff \exists Y \in A \ F(Y) = Z) .$$

1.2. BEMERKUNG. Es folgen Erklärungen zu und Folgerungen aus den obigen Axiomen.

- Zu (1). *Notation*. Das Symbol „ \forall “ heißt *Allquantor*. Der Ausdruck „ $\forall A$ “ bedeutet, dass die darauffolgende Aussage für alle A gilt, hier also der gesamte Rest der Zeile. Wir nennen A eine Variable; in diesem Abschnitt verwenden wir nur Großbuchstaben für Variablen.

In späteren Abschnitten werden wir immer noch eine Menge angeben, aus der die Variable hinter einem Allquantor stammen muss, so wie bei „ $\forall X \in A$ “ später in der Zeile (dieser Allquantor gilt für die folgende Aussage, nämlich $X \in B$). Wenn wir das nicht tun, darf man für die Variable „alles“, in unserem Kontext also jede beliebige Menge einsetzen. *Bedeutung*. Eine Menge ist durch ihre Elemente bestimmt (und durch nichts anderes). Beispielsweise gilt

$$\{1, 2\} = \{1, 1 + 1\} \quad \text{oder auch} \quad \{1, 2\} = \{1, 2, 1, 1, 2\} ,$$

denn alle obigen Mengen haben genau die Elemente 1 und 2.

- Zu (2). Das Symbol \emptyset ist eine „Konstante“. Es steht für eine Menge mit der geforderten Eigenschaft. Die leere Menge ist wegen Extensionalität (1) eindeutig: wenn eine Menge A keine Elemente hat, folgt $A = \emptyset$.

Zu (3). Wir schreiben $\{A, B\}$ für eine Menge mit den Elementen A und B . Wenn $A \neq B$ gilt, hat diese Menge genau zwei Elemente.

Wenn $A = B$ gilt, erhalten wir eine einelementige Menge $\{A\}$, denn nach (1) gilt

$$\{A, A\} = \{A\} .$$

Zu (4). *Notation.* Das Symbol „ \exists “ heißt *Existenzquantor*. Der Ausdruck „ $\exists B \in A$ “ bedeutet, dass die folgende Aussage (hier $X \in B$) für mindestens ein Element B von A richtig ist.

Bedeutung. Die Menge $\bigcup A$ dürfen wir später etwas anschaulicher auch als

$$\bigcup A = \bigcup_{B \in A} B$$

schreiben. Nach (1) ist sie eindeutig bestimmt.

Um zwei Mengen A und B zu vereinigen, bilden wir zunächst die Paarmenge:

$$A \cup B = \bigcup \{A, B\} .$$

Zu (5). *Notation.* Im Ausdruck $\exists A$ haben wir keine Menge angegeben, aus der A stammen muss. Das heißt, es muss nur „irgendein“ A existieren, hier also eine beliebige Menge.

Bedeutung. Man kann natürliche Zahlen durch Mengen darstellen. Dabei schreiben wir 0 als leere Menge $\underline{0} = \emptyset$, und wenn wir für $n \in \mathbb{N}$ schon eine Menge \underline{n} konstruiert haben, sei $\underline{n+1} = \underline{n} \cup \{\underline{n}\}$. Dann bekommen wir beispielsweise

$$\underline{1} = \underline{0} \cup \{0\} = \{0\} , \quad \underline{2} = \underline{1} \cup \{1\} = \{0, 1\} , \quad \text{und allgemein } \underline{n} = \{0, \dots, \underline{n-1}\} .$$

Insbesondere hat die Menge \underline{n} tatsächlich genau n Elemente.

Aus dem Prinzip der vollständiger Induktion 1.5 (5) ergibt sich später, dass die obige Menge A alle natürlichen Zahlen enthalten, also unendlich groß sein muss. Allerdings ist A durch das obige Axiom nicht eindeutig festgelegt, und wird im Folgenden auch keine Rolle mehr spielen. Daher haben wir auch keine spezielle Notation für diese Menge eingeführt.

Zu (6). Für den rechten Ausdruck $\forall X \in B X \in A$ (der auch in (1) schon vorkam) schreiben wir später kurz

$$B \subset A .$$

Dabei benutzen wir das Symbol „ \subset “ auch dann, wenn die beiden Mengen gleich sind.

Die Potenzmenge ist nie leer; sie enthält zumindest \emptyset und A selbst. Wegen Extensivität ist $\mathcal{P}(A)$ durch A eindeutig festgelegt.

Zu (7). *Notation.* Im vorderen Teil des Ausdrucks $\{X \in A \mid P(X)\}$ führen wir — ähnlich wie bei einem Existenz- oder Allquantor — eine Variable ein, hier X . Im hinteren Teil legen wir fest, welche Eigenschaft ein Element X von A erfüllen muss, um zur neuen Menge zu gehören. Dabei wollen wir nur „mathematische“ Eigenschaften verwenden, siehe Bemerkung 1.4.

Beim Aussonderungsaxiom ist es sehr wichtig, dass wir immer nur Teilmengen einer bereits bekannten Menge bilden (hier A), siehe auch Bemerkung 1.3.

Bedeutung. Dieses Axiom und die damit verbundene Notation sind sehr wichtig, um Teilmengen einer vorgegebenen Menge zu finden und zu beschreiben. Als Beispiel führen wir Schnittmengen und relative Komplemente ein:

$$A \cap B = \{X \in A \mid X \in B\} , \\ A \setminus B = \{X \in A \mid \neg X \in B\} .$$

Zu (8). *Notation.* Im hinteren Teil des Ausdrucks $\{F(X) \mid X \in A\}$ führen wir eine Variable ein, hier X . Diese Variable dürfen wir im vorderen Teil benutzen, um ein Element der neuen

Menge zu konstruieren. Auch hier ist wichtig, dass X aus einer bereits bekannten Menge stammt, und dass $F(X)$ ein „mathematischer“ Ausdruck ist.

Bedeutung. Dieses Axiom ist ebenfalls hilfreich, um neue Mengen zu beschreiben.

Falls F einfach eine Abbildung von einer Menge A in eine Menge B ist, die wir schon kennen (siehe Definition 1.9), können wir allerdings genausogut das Aussonderungssaxiom benutzen:

$$\{ F(X) \mid X \in A \} = \{ Y \in B \mid \exists X \in A Y = F(X) \} .$$

Wenn man oben die Begriffe „Eigenschaft“ und „Operation“ mit Methoden der Logik spezifiziert, und noch das „Fundierungsaxiom“ ergänzt, erhält man das Axiomensystem ZF („Zermelo-Fraenkel“).

Darüberhinaus wird häufig noch das „Auswahlaxiom“ gefordert, man spricht dann vom Axiomensystem ZFC (ZF und „choice“). Das Auswahlaxiom ist allerdings nicht ganz so leicht zu formulieren wie die anderen. Sie werden es später voraussichtlich in Gestalt des „Lemmas von Zorn“ kennenlernen.

Es ist nach Gödels zweitem Unvollständigkeitssatz von 1931 unmöglich zu zeigen, dass das Zermelo-Fraenkel-Axiomensystem widerspruchsfrei ist. Die Tatsache, dass auch knapp 100 Jahre nach seiner Formulierung noch kein Widerspruch gefunden wurde, spricht aber sehr dafür.

1.3. BEMERKUNG. In der Sprache von Zermelo und Fraenkel dürfen wir den Ausdruck (1.1) nicht hinschreiben. Dadurch umgehen wir die Russellsche Antinomie.

Wenn wir eine beliebige Menge M wählen, dann existiert mit Aussonderung (7) aber immerhin

$$N = \{ X \in M \mid \neg X \in X \} \subset M .$$

Wäre $N \in M$, dann würde $N \in N$ wieder genau dann gelten, wenn $N \notin N$, ein Widerspruch.

Jede Menge M besitzt also eine Teilmenge $N \subset M$ mit $N \notin M$. Insbesondere kann es keine „Menge aller Mengen“ geben.

1.4. BEMERKUNG. Wir haben nicht genau festgelegt, was „Eigenschaften“ und „Operationen“ sein sollen. Das ist aber wichtig, wie folgendes Beispiel zeigt. Wir betrachten

$$\{ X \in \mathbb{N} \mid X \text{ lässt sich auf deutsch nicht mit weniger als hundert Wörtern beschreiben} \} .$$

Wenn das eine wohldefinierte Menge wäre, hätte sie (als Teilmenge von \mathbb{N} nach Satz 1.22) ein kleinstes Element. Aber das wäre dann eine Zahl, die wir auf deutsch mit weniger als hundert Wörtern beschreiben können. Um solche Antinomien zu verhindern, dürfen wir für P nur „mathematische“ Kriterien zulassen. Was erlaubt ist und was nicht, sehen wir im Laufe der Zeit anhand der Aussagen in unser Vorlesung.

1.b. Vollständige Induktion

Mit Methoden der Logik und Mengenlehre lassen sich die natürlichen Zahlen relativ gut beschreiben, dabei dient das „Prinzip der vollständigen Induktion“ zur Charakterisierung von \mathbb{N} . Für die meisten Mathematiker ist vollständige Induktion jedoch in erster Linie eine sehr nützliche Beweismethode.

Wir benutzen in diesem Abschnitt in der Regel Großbuchstaben für Variablen, die für Mengen stehen können, und Kleinbuchstaben für Variablen, die für Zahlen oder allgemeinere Elemente von Mengen stehen können. Dabei ignorieren wir, dass wir im letzten Abschnitt so getan haben, also wären alle Objekte der Mathematik Mengen.

Die folgende Beschreibung der natürlichen Zahlen stammt von Peano aus dem Jahre 1889.

1.5. ANNAHME (Peano-Axiome). Die Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} hat folgende Eigenschaften.

- (1) Es gibt eine Zahl $0 \in \mathbb{N}$.
- (2) Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ hat einen *Nachfolger*, geschrieben $n + 1 \in \mathbb{N}$.
- (3) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n + 1 \neq 0$.
- (4) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $n + 1 = m + 1$ genau dann, wenn $m = n$.
- (5) *Prinzip der vollständigen Induktion*. Es sei P eine Eigenschaft. Wenn $P(0)$ gilt und für alle $n \in \mathbb{N}$ aus $P(n)$ auch $P(n + 1)$ folgt, dann gilt $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir haben in Bemerkung 1.2 zum Unendlichkeitsaxiom (5) bereits eine Beschreibung der natürlichen Zahlen durch Mengen gesehen, bei der Nachfolger von \underline{n} durch $\underline{n} \cup \{\underline{n}\}$ beschrieben wird.

1.6. BEMERKUNG. Mit den Peano-Axiomen lassen sich manche „Operationen“ mit natürlichen Zahlen *rekursiv* definieren.

- (1) Die Addition zweier natürlicher Zahlen m, n lässt sich rekursiv in n definieren durch

$$m + 0 = m \quad \text{und} \quad m + (n + 1) = (m + n) + 1 .$$

Man beachte, dass „+1“ im letzten Ausdruck immer den Nachfolger bezeichnet.

Aus der Definition folgt aber, dass der Nachfolger von n die Summe von n und dem Nachfolger der 0 ist, das heißt, die beiden möglichen Lesarten von $n+1$ führen zum gleichen Ergebnis.

- (2) Auch die Multiplikation lässt sich rekursiv definieren durch

$$m \cdot 0 = 0 \quad \text{und} \quad m \cdot (n + 1) = (m \cdot n) + m .$$

- (3) Potenzen definieren wir rekursiv durch

$$m^0 = 1 \quad \text{und} \quad m^{n+1} = m^n \cdot m .$$

- (4) Zu guter Letzt führen wir noch die *Fakultät* $! : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ein durch

$$0! = 1 \quad \text{und} \quad (n + 1)! = n! \cdot (n + 1) .$$

Anschließend müssten wir jetzt beweisen, dass aus diesen Definitionen die bekannten Rechenregeln für natürliche Zahlen folgen. Aber das würde hier zu weit führen.

1.7. BEMERKUNG. Es folgen zwei Bemerkungen aus dem Bereich Logik / Mengenlehre.

- (1) Nach dem ersten Unvollständigkeitssatz von Gödel aus dem Jahr 1931 können wir die natürlichen Zahlen nicht mit endlich vielen Axiomen so gut beschreiben, dass wir jeden gültigen Satz über die natürlichen Zahlen aus diesen Axiomen folgern könnten — es sei denn, unser Axiomensystem wäre in sich widersprüchlich.
- (2) Aus den Peano-Axiomen folgt noch nicht, dass jede natürliche Zahl aus der 0 in endlich vielen Schritten durch Bilden des Nachfolgers hervorgeht.

Aber die Peano-Axiome gelten immerhin für die Menge der natürlichen Zahlen, die wir „kennen“. Und für die Zwecke dieser Vorlesung (und der meisten anderen Mathematik-Vorlesungen) reicht unsere Vorstellung von den natürlichen Zahlen in der Regel völlig aus.

Wir benutzen das Prinzip der vollständigen Induktion im Folgenden, um exemplarisch einige interessante Sätze zu beweisen. Manche von ihnen werden wir im Laufe der Vorlesung noch benutzen.

1.8. BEISPIEL (Geometrische Summe). Es sei $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$. Dann gilt für alle n

$$(P(n)) \quad \sum_{i=1}^n x^i = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x} .$$

Den Ausdruck auf der linken Seite können wir übrigens wie in Bemerkung 1.6 rekursiv für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren, dabei hat die „leere Summe“ ($n = 0$) den Wert 0. Die folgende Variante wird auch häufig gebraucht:

$$\sum_{i=0}^n x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} .$$

Hier erhält man für $n = 0$ den Wert 1.

Natürliche Zahlen dienen zum Zählen. Um Elemente von Mengen zu zählen, definieren wir zunächst Abbildungen zwischen Mengen und führen dann einige wichtige Eigenschaften ein.

1.9. DEFINITION. Es seien M und N Mengen. Eine *Abbildung* $f: M \rightarrow N$ ordnet jedem Element $X \in M$ ein Element $f(X) \in N$ zu. Zwei Abbildungen $f, g: M \rightarrow N$ heißen *gleich*, kurz $f = g$, wenn $f(X) = g(X)$ für alle $X \in M$ gilt.

Wichtig ist dabei, dass das Element $f(X) \in N$ durch $X \in M$ eindeutig bestimmt ist, und nicht noch von anderen Größen abhängt. Es gibt auch eine Möglichkeit, Abbildungen mit Hilfe von Mengen zu beschreiben. Aber dieser Zugang ist etwas umständlich und würde uns voraussichtlich nicht helfen, um Abbildungen besser zu verstehen. Daher tun wir so, als wären Abbildungen ein neuer Begriff.

1.10. DEFINITION. Es sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung zwischen Mengen. Dann heißt f

(1) *injektiv*, wenn für alle $X, Y \in M$ gilt

$$f(X) = f(Y) \implies X = Y ,$$

(2) *surjektiv*, wenn für alle $Z \in N$ ein $X \in M$ existiert mit

$$f(X) = Z ,$$

(3) *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

1.11. BEISPIEL. Sie kennen Abbildungen bereits aus der Schule, aber möglicherweise unter anderem Namen.

(1) Die Sinusfunktion ist eine Abbildung $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sie ist weder injektiv noch surjektiv.

(2) Die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist zwar injektiv, aber nicht surjektiv.

1.12. DEFINITION. Es seien $f: M \rightarrow N$ und $g: L \rightarrow M$ Abbildungen. Dann definieren wir die *Verkettung* $f \circ g: L \rightarrow N$ (lies: *f nach g*) für alle $X \in L$ durch

$$(f \circ g)(X) = f(g(X)) .$$

Außerdem definieren wir auf jeder Menge die *Identitätsabbildung*, kurz *Identität* $\text{id}_M: M \rightarrow M$ für alle $Y \in M$ durch

$$\text{id}_M(Y) = Y .$$

1.13. BEMERKUNG. Es seien $f: M \rightarrow N$ und $g: L \rightarrow M$ Abbildungen. Dann gelten folgende Implikationen.

(1) Wenn f und g injektiv sind, ist $f \circ g$ injektiv.

(2) Wenn f und g surjektiv sind, ist $f \circ g$ surjektiv.

(3) Wenn f und g bijektiv sind, ist $f \circ g$ bijektiv.

(4) Wenn $f \circ g$ injektiv ist, ist g injektiv (Übung).

(5) Wenn $f \circ g$ surjektiv ist, ist f surjektiv (Übung).

1.14. BEMERKUNG. Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ zwischen Mengen ist genau dann bijektiv, wenn sie *umkehrbar* ist, das heißt, wenn eine *Umkehrabbildung* $g: N \rightarrow M$ existiert, so dass

$$g \circ f = \text{id}_M \quad \text{und} \quad f \circ g = \text{id}_N .$$

Um die Umkehrabbildung $g: N \rightarrow M$ zu konstruieren, muss zu jedem $Y \in N$ ein $X \in M$ *existieren*, das man Y zuordnen kann, und X muss *eindeutig* durch Y bestimmt sein. Man fasst diese beiden Bedingungen zusammen und sagt, die Umkehrabbildung g sei *wohldefiniert*.

Wir betrachten wieder die Mengen $\underline{n} = \{0, \dots, n-1\}$ aus Bemerkung 1.2 zum Unendlichkeitsaxiom (5). Dann gilt $m \leq n$ genau dann, wenn $\underline{m} \subset \underline{n}$.

1.15. PROPOSITION (Schubfachprinzip). *Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $f: \underline{m} \rightarrow \underline{n}$ injektiv. Dann gilt $m \leq n$.*

1.16. DEFINITION. Eine Menge M heißt *endlich*, wenn es für ein $n \in \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung $f: \underline{n} \rightarrow M$ gibt. In diesem Fall heißt $n = \#M$ die *Anzahl* der Elemente von M , und man sagt, M sei eine *n-elementige* Menge.

Falls keine solche Abbildung existiert, heißt M *unendlich*.

1.17. BEMERKUNG. Proposition 1.15 heißt „Schubfachprinzip“, da es im Umkehrschluss besagt: wenn man mehr Gegenstände in Schubladen legt, als man Schubladen zur Verfügung hat (also falls $m > n$), dann liegen hinterher in mindestens einer Schublade zwei Gegenstände.

Proposition 1.15 garantiert, dass aus $f: \underline{m} \rightarrow M$ bijektiv und $h: \underline{n} \rightarrow M$ bijektiv bereits $m = n$ folgt. Man sagt, die Anzahl $\#M \in \mathbb{N}$ sei *wohldefiniert*.

Wir erweitern die Definition des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ aus der Schule, indem wir für n auch reelle Zahlen zulassen.

1.18. DEFINITION (Binomialkoeffizienten). Für $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\binom{x}{0} = 1 \quad \text{und} \quad \binom{x}{k} = \prod_{i=1}^k \frac{x+1-i}{i} .$$

Auch $\binom{x}{k}$ lässt sich in k rekursiv definieren.

1.19. SATZ (Additionstheorem für Binomialkoeffizienten). *Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\binom{x+1}{k+1} = \binom{x}{k} + \binom{x}{k+1} .$$

Für $n \in \mathbb{N}$ können wir $\binom{n}{k}$ mit dem obigen Satz und dem Pascalschen Dreieck rekursiv berechnen.

1.20. SATZ. *Die Menge der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge hat $\binom{n}{k}$ Elemente.*

Der folgende Satz gilt analog in jedem Körper (sogar in jedem kommutativen Ring).

1.21. SATZ (Binomische Formel). *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} .$$

Den folgenden Satz haben wir in Bemerkung 1.4 schon benutzt.

1.22. SATZ. *Jede Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.*

1.c. Angeordnete Körper

In diesem und dem nächsten Abschnitt wiederholen wir die reellen Zahlen, die wir aus der Schule kennen. In diesem Abschnitt geht es um Rechenregeln, die in den reellen Zahlen \mathbb{R} , aber beispielsweise auch in den rationalen Zahlen \mathbb{Q} gelten. Dabei betrachten wir zum einen die Grundrechenarten, und zum anderen die Anordnung. Den entscheidenden Unterschied zwischen \mathbb{R} und \mathbb{Q} betrachten wir dann im nächsten Abschnitt.

Bei Körpern kommen Abbildungen wie Addition und Multiplikation vor, die von mehr als einem Argument abhängen. Um sie zu beschreiben, führen wir zunächst das kartesische Produkt ein.

1.23. DEFINITION. Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, und M_1, \dots, M_n seien Mengen. Dann ist ihr *kartesisches Produkt* die Menge $M_1 \times \dots \times M_n$, die zu jedem $X_1 \in M_1, \dots$ und jedem $X_n \in M_n$ ein Element (X_1, \dots, X_n) enthält. Das Objekt (X_1, \dots, X_n) heißt *n-Tupel* (oder auch *Paar*, falls $n = 2$, *Tripel*, falls $n = 3$, und so weiter).

Ähnlich wie Abbildungen lassen sich auch kartesische Produkte mit Methoden der Mengenlehre durch Mengen beschreiben. Aber auch hier würde uns das das Verständnis nicht erleichtern, so dass wir kartesische Produkte stattdessen als neue Objekte einführen.

1.24. BEMERKUNG. Die Bedingung $n \geq 2$ ist bei Tupeln nicht wirklich nötig. Man kann sich überlegen, dass jedes kartesische Produkt im Fall $n = 0$ genau ein Tupel enthält, nämlich das leere $()$. Und im Falle $n = 1$ identifizieren wir das kartesische Produkt einfach mit der Menge M_1 .

Bei einem Tupel ist die Reihenfolge der Einträge wichtig, im Gegensatz zu Mengen:

$$\{1, 2\} = \{2, 1\} \subset \mathbb{N}, \quad \text{aber} \quad (1, 2) \neq (2, 1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Außerdem darf ein Tupel dasselbe Element mehrfach enthalten:

$$\{1, 1\} = \{1\} \subset \mathbb{N}, \quad \text{aber} \quad \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (2, 1, 1) \neq (2, 1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

1.25. BEMERKUNG. Es seien $n \in \mathbb{N}$ und M_1, \dots, M_n wie oben, und N eine weitere Menge. Dann können wir Abbildungen $f: M_1 \times \dots \times M_n \rightarrow N$ betrachten. Solche Abbildungen ordnen je einem Element $m_1 \in M_1, \dots, m_n \in M_n$ ein eindeutiges Element $f(m_1, \dots, m_n) \in N$ zu (dabei haben wir ein Paar Klammern weggelassen). Wie in Bemerkung 1.24 kommt es hierbei auf die Reihenfolge der Argumente an.

Im Fall $n = 1$ verhält sich alles genau wie in Definition 1.9, wir haben hier also nichts Neues konstruiert. Im Fall $n = 0$ hat f nur einen einzigen Wert $f() \in N$, also verhält sich f in diesem Fall wie ein Element von N .

1.26. BEISPIEL. Sie kennen Beispiele von kartesischen Produkten und Abbildungen mit mehr als einem Argument.

- (1) Die Spielkarten in einem Skatspiel lassen sich beschreiben als kartesisches Produkt aus der Menge {Kreuz, Pik, Herz, Karo} der „Farben“ und der Menge {7, 8, 9, B, D, K, 10, A} der „Werte“.
- (2) Punkte in der Ebene werden in der analytischen Geometrie dargestellt durch zwei reelle Koordinaten, also beschreibt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Euklidische Ebene — das kennen Sie aus der Schule. Analog beschreibt $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ den Euklidischen Raum.
- (3) Die Addition $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ist eine Abbildung, die zwei natürlichen Zahlen eine weitere natürliche Zahl zuordnet. An Stelle von $+(n, m)$ schreiben wir aber einfach $n + m$.

1.27. DEFINITION. Ein *Körper* $(\mathbb{k}, +, \cdot, 0, 1)$ besteht aus einer Menge \mathbb{k} , zwei Abbildungen $+: \mathbb{k} \times \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$ und $\cdot: \mathbb{k} \times \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$, und zwei Elementen $0, 1 \in \mathbb{k}$, so dass die folgenden Axiome gelten.

- (1) *Additive Gruppe*. $(\mathbb{k}, +, 0)$ bildet eine abelsche Gruppe, das heißt, es gilt

(a) *Assoziativität.* Für alle $x, y, z \in \mathbb{k}$ gilt

$$(x + y) + z = x + (y + z) .$$

(b) *Neutrales Element.* Für alle $x \in \mathbb{k}$ gilt

$$0 + x = x .$$

(c) *Inverses Element.* Für alle $x \in \mathbb{k}$ existiert ein Element $y \in \mathbb{k}$, so dass

$$x + y = 0 .$$

(d) *Kommutativität.* Für alle $x, y \in \mathbb{k}$ gilt

$$x + y = y + x .$$

(2) *Nichttrivialität.* Es gilt $0 \neq 1$.

(3) *Multiplikative Gruppe.* Es sei $\mathbb{k}^\times = \mathbb{k} \setminus \{0\}$. Dann bildet auch $(\mathbb{k}^\times, \cdot, 1)$ eine abelsche Gruppe.

(a) *Assoziativität.* Für alle $x, y, z \in \mathbb{k}^\times$ gilt

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) .$$

(b) *Neutrales Element.* Für alle $x \in \mathbb{k}^\times$ gilt

$$1 \cdot x = x .$$

(c) *Inverses Element.* Für alle $x \in \mathbb{k}^\times$ existiert ein Element $y \in \mathbb{k}^\times$, so dass

$$x \cdot y = 1 .$$

(d) *Kommutativität.* Für alle $x, y \in \mathbb{k}^\times$ gilt

$$x \cdot y = y \cdot x .$$

(4) *Distributivgesetze.* Für alle $x, y, z \in \mathbb{k}$ gilt

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{und} \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z .$$

Die natürlichen Zahlen \mathbb{N} mit der üblichen Addition und Multiplikation erfüllen diese Eigenschaften bis auf (1c) und (3c). Um die additiven Inversen in (1c) zu erhalten, gehen wir zu den ganzen Zahlen \mathbb{Z} über. In \mathbb{Z} gelten alle Axiome außer (3c). Um auch noch multiplikative Inverse zu bekommen, gehen wir zu den rationalen Zahlen \mathbb{Q} über. In \mathbb{Q} gelten alle obigen Axiome, also bildet \mathbb{Q} einen Körper.

1.28. BEMERKUNG. Es folgen einige Erklärungen und kleinere Folgerungen aus den Axiomen.

(1) Wir benötigen (2), damit die Zahl 1 in (3) in der multiplikativen Gruppe \mathbb{k}^\times liegt.

(2) Für das additive inverse Element in (1c) schreiben wir $-x$, also gilt stets

$$x + (-x) = 0 .$$

(3) Das multiplikative inverse Element in (3c) dürfen wir nur für $x \in \mathbb{k}^\times$, also nur für $x \neq 0$ bilden. Wir nennen es x^{-1} , also gilt

$$x \cdot x^{-1} = 1 .$$

(4) Multiplikation mit 0 ergibt wegen (4) stets 0. Insbesondere gelten (3a), (3b) und (3d) auch, wenn man für einzelne Variablen 0 einsetzt.

Später lassen wir den Punkt für die Multiplikation oft weg, wenn keine Gefahr einer Verwechslung besteht.

Als nächstes wollen wir Körper mit einer Anordnung betrachten. Eine „Relation“ auf einer Menge M ist nichts anderes als eine Eigenschaft von Elementen von $M \times M$, das heißt, für zwei Elemente von M ist sie entweder wahr oder falsch. Auch hier kommt es auf die Reihenfolge der Elemente an.

1.29. DEFINITION. Eine Ordnung auf einer Menge M ist eine Relation \prec auf M mit den folgenden Eigenschaften.

- (1) *Totalität* und *Antisymmetrie*. Für je zwei Elemente x, y von M gilt genau eine der drei Aussagen

$$x \prec y, \quad x = y \quad \text{oder} \quad y \prec x .$$

- (2) *Transitivität*. Für je drei Elemente x, y und $z \in M$ gilt

$$(x \prec y \wedge y \prec z) \implies x \prec z .$$

Beispiele sind die Relation $<$ auf \mathbb{N} , \mathbb{Z} oder \mathbb{Q} , wie Sie sie aus der Schule kennen, und die Relation „steht im Wörterbuch vor“ auf der Menge der Wörter einer Sprache. Die Definition eines angeordneten Körpers sieht zunächst etwas anders aus.

1.30. DEFINITION. Ein *angeordneter Körper* ist ein Körper $(\mathbb{k}, +, \cdot, 0, 1)$ mit einer Teilmenge $\mathbb{k}_{>}$ positiver Elemente mit folgenden Eigenschaften

- (1) Für jedes $x \in \mathbb{k}$ gilt genau eine der Aussagen

$$x = 0, \quad x \in \mathbb{k}_{>} \quad \text{oder} \quad -x \in \mathbb{k}_{>} .$$

- (2) Für alle $x, y \in \mathbb{k}_{>}$ gilt

$$x + y \in \mathbb{k}_{>} \quad \text{und} \quad x \cdot y \in \mathbb{k}_{>} .$$

1.31. BEISPIEL. Die rationalen Zahlen \mathbb{Q} bilden einen angeordneten Körper mit

$$\mathbb{Q}_{>} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} .$$

1.32. BEMERKUNG. Wir betrachten auf einem angeordneten Körper \mathbb{k} die Relation „ $<$ “, die für alle $x, y \in \mathbb{k}$ durch

$$x < y \iff y - x \in \mathbb{k}_{>}$$

gegeben wird. Insbesondere bedeutet $x \in \mathbb{k}_{>}$ genau $x > 0$. Außerdem schreiben wir

$$\begin{aligned} x > y &\iff y < x, \\ x \leq y &\iff x < y \vee x = y, \\ x \geq y &\iff y \leq x, \end{aligned}$$

Für \mathbb{Q} bedeuten diese Symbole das gleiche wie in der Schule.

Im Folgenden seien stets $x, y, z, w \in \mathbb{k}$.

- (1) Die Relation „ $<$ “ erfüllt die Ordnungsaxiome aus Definition 1.29.
 (2) Sie ist mit der Addition verträglich, das heißt, es gilt

$$x < y \iff x + z < y + z .$$

- (3) Es sei $z \neq 0$. Falls $0 < z$, gilt

$$x < y \iff xz < yz .$$

Falls $z < 0$, gilt

$$x < y \iff yz < xz .$$

(4) Es sei $x < y$ und $z < w$. Dann gilt

$$x + z < y + w .$$

Falls $0 < x$ und $0 < z$, gilt außerdem

$$xz < yw .$$

(5) Es sei $x \neq 0$, dann gilt

$$0 < x^2 .$$

(6) Es sei $0 < x$, dann gilt

$$0 < 1/x .$$

(7) Falls $x < y$ und $0 < x$, gilt

$$1/y < 1/x .$$

1.33. SATZ (Bernoulli-Ungleichung). Für alle $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx .$$

1.34. BEISPIEL. Man kann den Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen definieren durch $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{C}} &= (0, 0) , & 1_{\mathbb{C}} &= (1, 0) , \\ (x, y) + (u, v) &= (x + u, y + v) , & \text{und} & & (x, y) \cdot (u, v) &= (xu - yv, xv + yu) . \end{aligned}$$

Die Zahl $i = (0, 1)$ hat die Eigenschaft $i^2 = -1$. Man identifiziert $x \in \mathbb{R}$ mit $(x, 0)$ und schreibt später oft $x + iy = (x, y)$.

1.35. FOLGERUNG. Es gibt keine Teilmenge $\mathbb{C}_{>} \subset \mathbb{C}$, die die Axiome aus Definition 1.30 erfüllt.

In der linearen Algebra oder spätestens in der Algebra-Vorlesung lernen Sie endliche Körper kennen. Auch diese lassen sich nicht anordnen (aber aus einem anderen Grund).

1.d. Vollständigkeit

3.11.21

In diesem Abschnitt geben wir ein Axiom an, das garantiert, dass wir für die Zwecke der Analysis „genug“ Zahlen zur Verfügung haben. Unser Begriff von Vollständigkeit benötigt dabei zunächst einmal nur die Ordnung „ $<$ “ aus Bemerkung 1.32. Von den reellen Zahlen fordern wir Vollständigkeit, und haben \mathbb{R} damit in einem gewissen Sinne auch schon eindeutig beschrieben. Wir werden sehen, dass \mathbb{Q} nicht vollständig ist.

1.36. BEISPIEL. In \mathbb{Q} gibt es keine Zahl $\frac{p}{q}$, so dass $(\frac{p}{q})^2 = 2$.

Es gibt viele Möglichkeiten, Vollständigkeit eines angeordneten Körpers zu definieren. Manche dieser anderen Definitionen leiten wir im Laufe der Vorlesung noch als Folgerungen aus unserem Vollständigkeitsaxiom her.

1.37. DEFINITION. Es sei $(M, <)$ eine Menge mit einer Ordnung. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{k}$ heißt von oben (von unten) beschränkt in M , wenn es ein Element $x \in M$ gibt, so dass für alle $y \in A$ gilt

$$y = x \vee y < x \quad (\text{beziehungsweise } y = x \vee x < y).$$

In diesem Fall heißt x eine obere (untere) Schranke von A .

Einen wichtigen Spezialfall bilden angeordnete Körper $(\mathbb{k}, +, \cdot, 0, 1, \mathbb{k}_{>})$ mit der Ordnung „ $<$ “ aus Bemerkung 1.32. Die beiden folgenden Begriffe spielen in der Analysis eine große Rolle.

1.38. DEFINITION. Es sei $(M, <)$ eine Menge mit einer Ordnung und $A \subset M$.

(1) Es sei A von oben beschränkt. Ein Element $x \in M$ heißt *Supremum* von A , kurz

$$x = \sup A ,$$

wenn x eine obere Schranke von A ist, und wenn für jede andere obere Schranke $z \in M$ von A entweder $x = z$ oder $x \prec z$ gilt.

(2) Es sei A von unten beschränkt. Ein Element $x \in M$ heißt *Infimum* von A , kurz

$$x = \inf A ,$$

wenn x eine untere Schranke von A ist, und wenn für jede andere untere Schranke $z \in M$ von A entweder $x = z$ oder $z \prec x$ gilt.

1.39. BEMERKUNG. Wenn A ein Supremum oder ein Infimum besitzt, dann ist es eindeutig. In diesem Fall ist die Schreibweise $\sup A$ beziehungsweise $\inf A$ gerechtfertigt.

Wenn wir aber nicht wissen, ob ein Supremum oder Infimum existiert, dürfen wir nicht einfach $\sup A$ oder $\inf A$ schreiben. Später werden wir „sup“ und „inf“ nur in Situationen benutzen, in denen wir die Existenz eines Supremums beziehungsweise Infimums (mit ein paar miesen Tricks) gewährleisten können.

1.40. BEISPIEL. Wir betrachten einige einfache Beispiele.

(1) In \mathbb{N} gilt

$$\sup\{3, 7, 12\} = 12 \quad \text{und} \quad \inf\{3, 7, 12\} = 3 .$$

(2) In \mathbb{Q} gilt

$$\inf\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\} = 0 .$$

Man beachte, dass das Infimum (genau wie das Supremum) kein Element der gegebenen Teilmenge sein muss.

(3) Die Teilmenge

$$A = \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid \left(\frac{p}{q}\right)^2 < 2\right\} \subset \mathbb{Q}$$

ist sowohl von oben als auch von unten beschränkt. Sie besitzt aber weder ein Supremum noch ein Infimum in \mathbb{Q} .

1.41. DEFINITION. Eine Menge (M, \prec) mit einer Ordnung heißt (*ordnungs-*) *vollständig*, wenn jede von oben (unten) beschränkte, nicht leere Teilmenge $A \subset M$ ein Supremum (Infimum) besitzt.

Ein angeordneter Körper $(\mathbb{k}, +, \cdot, 0, 1, \mathbb{k}_{>})$ heißt (*ordnungs-*) *vollständig*, wenn (\mathbb{k}, \prec) mit der Ordnung „ \prec “ aus Bemerkung 1.32 vollständig ist.

1.42. BEISPIEL. Die rationalen Zahlen sind nicht ordnungsvollständig.

Den folgenden Satz kann man (in jedem gegebenen Modell der Mengenlehre) beweisen. Da wir mit reellen Zahlen „nur rechnen“ wollen, geben wir den Beweis nicht an. Am Ende des Kapitels können wir immerhin eine Beweismethode andeuten.

1.43. SATZ. *Es gibt einen ordnungsvollständigen angeordneten Körper, und er ist bis auf Isomorphie eindeutig.*

1.44. BEMERKUNG. „Bis auf Isomorphie eindeutig“ bedeutet: wenn sowohl $(\mathbb{k}, +, \cdot, 0, 1, \mathbb{k}_{>})$ als auch $(\mathbb{k}', +, \cdot, 0', 1', \mathbb{k}'_{>})$ ordnungsvollständige angeordnete Körper sind (der kleine Strich „ $'$ “

bedeutet dabei nicht „Ableitung“, sondern dient hier nur dazu, ein weiteres Symbol zu bekommen, das fast genauso aussieht, aber etwas anderes bedeutet), dann existiert eine bijektive Abbildung $F: \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}'$, die mit der Struktur verträglich ist. Das heißt, für alle x und alle $y \in \mathbb{k}$ gilt

$$\begin{aligned} F(x + y) &= F(x) + F(y) , \\ F(xy) &= F(x) \cdot F(y) , \\ 0 < x &\Leftrightarrow 0 <' F(x) . \end{aligned}$$

Da die neutralen Elemente durch die Axiome 1.27 (1b) und (3b) eindeutig beschrieben werden, folgt daraus auch

$$F(0) = 0' \quad \text{und} \quad F(1) = 1' .$$

Mit anderen Worten verhalten sich \mathbb{k} und \mathbb{k}' völlig gleich (in beiden Körpern gelten genau die gleichen Rechenregeln, Sätze und so weiter).

1.45. ANNAHME. Es sei $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \mathbb{R}_{>})$ ein ordnungsvollständiger angeordneter Körper, und es gelte

$$\{0, 1\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} .$$

Dabei seien Addition und Multiplikation auf \mathbb{N} , \mathbb{Z} und \mathbb{Q} gerade die Einschränkung der Addition und Multiplikation von \mathbb{R} auf den jeweiligen Zahlbereich.

1.46. SATZ. Die reellen Zahlen bilden einen archimedisch angeordneten Körper, das heißt, für alle $x \in \mathbb{R}_{>}$ und alle $y \in \mathbb{R}_{>}$ existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, so dass

$$y < nx .$$

9.11.21

1.47. FOLGERUNG. Die rationalen Zahlen \mathbb{Q} liegen dicht in \mathbb{R} , das heißt, für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ existiert eine rationale Zahl $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit

$$x < \frac{p}{q} < y .$$

1.48. BEMERKUNG. Wir können jetzt \mathbb{R} als Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ konstruieren nach einer Methode von Bertrand (1849) und Dedekind (1872). Ein *Dedekindscher Schnitt* ist eine Teilmenge $A \subset \mathbb{Q}$ mit folgenden Eigenschaften.

- (1) Es gilt weder $A = \emptyset$ noch $A = \mathbb{Q}$.
- (2) A ist nach unten abgeschlossen, das heißt, für alle $x \in A$ und alle $y \in \mathbb{Q}$ mit $y < x$ gilt $y \in A$.
- (3) A hat kein größtes Element, das heißt für alle $x \in A$ existiert ein $y \in A$ mit $x < y$.

Genauer gesagt, ist A die untere Menge eines Dedekindschen Schnittes; die obere Menge ist $\mathbb{Q} \setminus A$. Dann setzen wir

$$\underline{\mathbb{R}} = \{ A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \mid A \text{ ist Dedekindscher Schnitt} \} .$$

Die Idee hinter dieser Konstruktion ist folgende. Jeder Dedekindsche Schnitt $A \in \underline{\mathbb{R}}$ steht am Ende für die Zahl $\sup A \in \mathbb{R}$; diese existiert, da nach Voraussetzung A nicht leer und wegen (1) und (2) von oben beschränkt ist. Außerdem sorgt (3) dafür, dass jede rationale Zahl nur auf eine Weise dargestellt werden kann. Mit Hilfe der Dichtheit von \mathbb{Q} in \mathbb{R} können wir uns überzeugen, dass wie auf diese Weise wirklich alle reellen Zahlen bekommen.

Um \mathbb{R} zu konstruieren, nützen uns diese Überlegungen allerdings nichts. Stattdessen müssen wir Addition und Multiplikation von Dedekindschen Schnitten definieren und zeigen, dass alle Axiome aus den Definitionen 1.27, 1.30 und 1.41 gelten. Danach identifizieren wir $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit dem Dedekindschen Schnitt

$$\underline{\frac{p}{q}} = \left\{ \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \mid \frac{r}{s} < \frac{p}{q} \right\} .$$

Folgen, Reihen und Grenzwerte

In diesem Kapitel geht es im weitesten Sinne um „Näherungsverfahren“, die es einem ermöglichen, Zahlen, die man nicht genau kennt, so gut wie möglich anzunähern. Ein Beispiel ist das Heron-Verfahren zur Bestimmung von Quadratwurzeln, siehe Beispiel 2.18.

Eine zentrale Frage ist dabei, ob sich die Näherungslösungen, die man konstruiert, tatsächlich an einen gewissen Wert annähern. Das Heron-Verfahren liefert beispielsweise eine Folge rationaler Zahlen, aber erst nach Vervollständigung, also Übergang zu den reellen Zahlen, existiert ein Grenzwert. Bei Näherungsrechnungen in der Physik ist nicht immer klar, ob ein Grenzwert existiert—obwohl die berechneten Näherungen oft verblüffend genau mit Messergebnissen übereinstimmen.

Eine weitere Frage ist, ob der Grenzwert tatsächlich das gegebene Problem löst. Dazu müssen wir lernen, mit Grenzwerten zu rechnen.

Am Ende des Kapitels werden wir auch Reihen betrachten. Eigentlich ist das nur eine spezielle Methode zur Konstruktion von Folgen, aber Reihen sind in der Mathematik so häufig, dass es sich lohnt, sie näher anzuschauen.

2.a. Konvergenz von Folgen

Wir wollen Folgen reeller Zahlen betrachten und Begriffe wie „Konvergenz“ und „Grenzwert“ einführen. Dabei spielt die Vollständigkeit von \mathbb{R} eine große Rolle.

2.1. DEFINITION. Wir definieren den *Absolutbetrag* $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und das Vorzeichen $\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \{1, 0, -1\}$ durch

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad \text{sign } x = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \text{ und} \\ -1 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ stets $x = \text{sign } x \cdot |x|$. Man beachte, dass das Vorzeichen von 0 auch anders definiert werden kann.

2.2. BEMERKUNG. Für den Absolutbetrag gelten folgende Eigenschaften, wobei stets $x, y \in \mathbb{R}$.

(1) *Positivität*. Es gilt

$$|x| \geq 0 \quad \text{und} \quad |x| = 0 \iff x = 0.$$

(2) *Multiplikativität*. Es gilt

$$|xy| = |x| \cdot |y|.$$

(3) *Subadditivität*. Es gilt

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Darüberhinaus gilt noch

$$x \leq |x| \quad \text{und} \quad |y - x| \geq ||y| - |x||$$

2.3. BEMERKUNG. Wir können den Absolutbetrag benutzen, um den *Abstand* $|x - y|$ zweier reeller Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ zu beschreiben. Aus Bemerkung 2.2 ergeben sich die folgenden Eigenschaften für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(1) *Positivität.* Es gilt

$$|x - y| \geq 0, \quad \text{und} \quad |x - y| = 0 \iff x = y.$$

(2) *Symmetrie.* Es gilt

$$|x - y| = |y - x|.$$

(3) *Dreiecksungleichung.* Es gilt

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|.$$

2.4. DEFINITION. Eine *Folge* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (oder kurz $(a_n)_n$) von Elementen einer Menge M (oder kurz *in* M) ist eine Abbildung

$$a: \mathbb{N} \rightarrow M \quad \text{mit} \quad n \mapsto a_n \in M.$$

Man nennt a_n das *n-te Glied* der Folge und $n \in \mathbb{N}$ seinen (*Folgen-*) *Index*.

Folgen in \mathbb{R} heißen auch Folgen reeller Zahlen. Wir lassen den Zusatz „ $\in \mathbb{N}$ “ in $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nur dann weg, wenn er aus dem Zusammenhang klar ist.

2.5. BEISPIEL. Manche Folgen lassen sich explizit angeben, zum Beispiel die Folge $(n^2)_n$ in \mathbb{N} . Für andere Folgen gibt es rekursive Bildungsgesetze, wie etwa für die Folge $(n!)_n$ in Bemerkung 1.6 (4). Wir dürfen aber auch über Folgen sprechen, deren Folgenglieder wir nicht explizit angeben können.

2.6. DEFINITION. Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in \mathbb{R} und $a \in \mathbb{R}$. Dann *konvergiert* $(a_n)_n$ (für $n \rightarrow \infty$) gegen a , kurz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

genau dann, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n \geq N \implies |a_n - a| < \varepsilon.$$

In diesem Fall heißt a der *Grenzwert* der Folge $(a_n)_n$, und $(a_n)_n$ heißt *konvergent*. Falls der Grenzwert 0 ist, nennt man $(a_n)_n$ eine *Nullfolge*. Falls kein $a \in \mathbb{R}$ die obige Eigenschaft erfüllt, heißt $(a_n)_n$ *divergent*.

Wenn ε und a gegeben sind, gilt

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon),$$

$$\text{wobei} \quad (b, c) = \{x \in \mathbb{R} \mid b < x \text{ und } x < c\}$$

das (*offene*) *Intervall* zwischen $b, c \in \mathbb{R}$ bezeichne. Wir nennen $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ auch die ε -*Umgebung* von a . „Konvergenz gegen a “ bedeutet also, dass für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ nur für endlich viele Indizes $n \in \mathbb{N}$ (nämlich höchstens die N vielen Indizes $0, \dots, N - 1$) das Folgenglied a_n außerhalb der ε -Umgebung $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ liegt.

2.7. BEISPIEL. Wir beginnen mit zwei einfachen Beispielen, dazu sei $c \in \mathbb{R}$.

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c = c,$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2.8. PROPOSITION (Eindeutigkeit des Grenzwerts). *Wenn eine Folge $(a_n)_n$ in \mathbb{R} gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, dann ist a eindeutig.*

Wir wollen uns jetzt Kriterien für Folgen überlegen, die uns helfen zu sehen, wann eine Folge konvergiert oder divergiert. Und wir wollen Rechenregeln kennenlernen, die uns bei der Bestimmung der Grenzwerte helfen.

2.9. DEFINITION. Eine Folge $(a_n)_n$ reeller Zahlen heißt *von oben (unten) beschränkt* durch $x \in \mathbb{R}$, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$a_n \leq x \quad (\text{beziehungsweise } a_n \geq x).$$

In diesem Fall heißt x *obere (untere) Schranke*. Die Folge $(a_n)_n$ heißt *beschränkt*, wenn sie sowohl von oben als auch von unten beschränkt ist.

2.10. PROPOSITION. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

2.11. BEISPIEL. Es sei $q \in \mathbb{R}$. Für die Folge $(q^n)_n$ der Potenzen von q gibt es verschiedene Möglichkeiten.

- (1) Falls $|q| > 1$, ist die Folge unbeschränkt, also divergent.
- (2) Falls $|q| < 1$, konvergiert q^n gegen 0.
- (3) Falls $q = 1$, ist die Folge konstant und konvergiert somit gegen 1.
- (4) Falls $q = -1$, ist die Folge zwar beschränkt, aber dennoch divergent.

2.12. PROPOSITION (Rechenregeln für Grenzwerte). *Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ in \mathbb{R} konvergente Folgen mit*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Dann gilt auch

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b,$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = ab,$

Falls $b \neq 0$, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n > N$, und es gilt auch

- (3) $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n > N}} (a_n/b_n) = a/b$

In (3) „vergessen“ wir die Folgenglieder für $n = 0, \dots, N$. Da der Grenzwert ohnehin nur vom Verhalten der Folgenglieder für große n abhängt, ist das nicht schlimm. In allen drei Aussagen sind auch die Fälle interessant, in denen eine der beteiligten Folgen konstant ist.

2.13. BEMERKUNG (Bitte ignorieren, falls Sie noch keine lineare Algebra kennen). Für alle Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ in \mathbb{R} und alle $r \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$(a_n)_n + (b_n)_n = (a_n + b_n)_n \quad \text{und} \quad r \cdot (a_n)_n = (ra_n)_n.$$

Dadurch wird der Raum aller Folgen in \mathbb{R} zu einem \mathbb{R} -Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Die Teilmengen

$$\begin{aligned} \{ (a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (a_n)_n \text{ Nullfolge} \} &\subset \{ (a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (a_n)_n \text{ konvergent} \} \\ &\subset \{ (a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (a_n)_n \text{ beschränkt} \} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \end{aligned}$$

bilden Unterräume, das heißt, sie sind unter Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen abgeschlossen. Nach Proposition 2.12 (1) und (2) (mit $b_n = r$ konstant in (2)) ist der Limes eine lineare Abbildung vom Unterraum der konvergenten Folgen nach \mathbb{R} , und die Nullfolgen bilden gerade den Kern dieser Abbildung.

2.14. PROPOSITION (Grenzwerte und Ungleichungen). *Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ in \mathbb{R} konvergente Folgen mit*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

- (1) Falls für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a_n \leq b_n$ gilt, gilt auch $a \leq b$.
- (2) Es gelte $a = b$, und es sei $(c_n)_n$ eine weitere Folge in \mathbb{R} . Falls für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a_n \leq c_n \leq b_n$ gilt, dann konvergiert auch $(c_n)_n$ gegen a .

2.15. BEMERKUNG. Mit anderen Worten bleiben *schwache* Ungleichungen (also „ \leq “ oder „ \geq “) im Grenzwert erhalten. Für *strikte* Ungleichungen („ $<$ “ oder „ $>$ “) gilt das nicht immer. Sei etwa $a_n = 0$ und $b_n = 1/n$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt zwar $a_n < b_n$, aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n .$$

2.16. DEFINITION. Eine Folge $(a_n)_n$ heißt *monoton steigend (fallend)*, wenn für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$m < n \quad \implies \quad a_m \leq a_n \quad (\text{beziehungsweise } a_m \geq a_n) .$$

Sie heißt *streng monoton steigend (fallend)*, wenn für alle $m, n \in \mathbb{N}$ sogar

$$m < n \quad \implies \quad a_m < a_n \quad (\text{beziehungsweise } a_m > a_n) .$$

Das nächste Kriterium erlaubt es, Konvergenz zu prüfen, ohne dass man den Grenzwert kennt. Es gilt analog für monoton fallende und von unten beschränkte Folgen. Hier benötigen wir zum ersten Mal die (Ordnungs-) Vollständigkeit von \mathbb{R} , um zu zeigen, dass ein Grenzwert existiert.

2.17. SATZ (Monotoniekriterium). *Jede von oben beschränkte monoton steigende Folge in \mathbb{R} konvergiert.*

Aus Proposition 2.14 folgt: ist x eine obere Schranke für $(a_n)_n$, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq x .$$

2.18. BEISPIEL. Wir können das Monotoniekriterium anwenden, um die Existenz von Quadratwurzeln positiver reeller Zahlen zu beweisen. Dazu benutzen wir das Heron-Verfahren. Es reicht, $c > 1$ zu betrachten, denn $\sqrt{1} = 1$ und $\sqrt{1/c} = 1/\sqrt{c}$. Wir definieren zwei Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 , & b_0 &= c , \\ a_{n+1} &= \frac{c}{b_{n+1}} , & \text{wobei} & & b_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} . \end{aligned}$$

Danach zeigen wir induktiv für alle $n \in \mathbb{N}$ (Übung)

$$(1) \quad a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n .$$

Hieraus folgt mit dem Monotoniekriterium, dass beide Folgen konvergieren. Als nächstes zeigen wir

$$(2) \quad b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2^n} (b_0 - a_0) .$$

Hieraus folgt, dass beide Folgen den gleichen Grenzwert haben. Es folgt dann insbesondere

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = c ,$$

also ist der Grenzwert gerade \sqrt{c} .

2.b. Uneigentliche Konvergenz

Wir können bei divergenten Folgen verschiedene Fälle unterscheiden. Die Folge $((-1)^n)_n$ beispielsweise springt nur zwischen zwei Werten hin und her, während $(n^2)_n$ größer wird als jede beliebige reelle Zahl. Im letzteren Fall wollen wir sagen dürfen, dass die Folge „gegen unendlich konvergiert“.

Wir erweitern dazu die reellen Zahlen um zwei Elemente ∞ und $-\infty$ und nennen

$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

die *erweiterte Zahlengerade*. Wir können die Ordnung „ $<$ “ von \mathbb{R} so auf $\overline{\mathbb{R}}$ fortsetzen, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$-\infty < x < \infty .$$

2.19. BEMERKUNG. Die erweiterte Zahlengerade erfüllt die Axiome einer Ordnung aus Definition 1.29. Also können wir auch Supremum und Infimum genau wie in Definition 1.38 definieren.

2.20. SATZ. *Jede Teilmenge der erweiterten Zahlengeraden besitzt ein Infimum und ein Supremum.*

Ab sofort dürfen wir für alle Teilmengen $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ also $\inf A$ und $\sup A$ schreiben. Wir haben damit das Versprechen aus Bemerkung 1.39 wahr gemacht. Die dort angesprochenen „miesen Tricks“ sind

- Vervollständigung von \mathbb{Q} zu \mathbb{R} und
- Hinzufügen der beiden Punkte im Unendlichen.

2.21. DEFINITION. Eine Teilmenge $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ heißt *Intervall*, wenn für alle $x, y \in A$ und alle $z \in \mathbb{R}$ mit $x < z < y$ bereits $z \in A$ gilt.

Mit den neuen unendlichen Punkten $\pm\infty$ können wir alle Intervalle gut beschreiben.

2.22. PROPOSITION. *Es sei $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ ein Intervall, dann ist entweder*

$$(0) \quad A = \emptyset ,$$

oder es trifft genau eine der folgenden Aussagen zu:

$$(1) \quad A = [a, b] = \{ x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x \leq b \} \quad \text{mit } a \leq b ,$$

$$(2) \quad A = (a, b] = \{ x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x \leq b \} \quad \text{mit } a < b ,$$

$$(3) \quad A = [a, b) = \{ x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x < b \} \quad \text{mit } a < b ,$$

$$(4) \quad A = (a, b) = \{ x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x < b \} \quad \text{mit } a < b ,$$

wobei $a = \inf A$, $b = \sup A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Man nennt die vier Fälle auch abgeschlossenes (1), links halboffenes (2), rechts halboffenes (3) beziehungsweise offenes Intervall (4).

Wir haben schon die ε -Umgebung $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ von $a \in \mathbb{R}$ kennengelernt, und wir könnten \mathbb{R} als offenes Intervall $(-\infty, \infty)$ schreiben. Man beachte, dass man die leere Menge auch als offenes Intervall $\emptyset = (a, a)$ oder halboffenes Intervall $(a, a]$ oder $[a, a)$ schreiben könnte, wobei $a \in \overline{\mathbb{R}}$ beliebig ist.

Das folgende Verfahren ist eine Konsequenz aus dem Monotoniekriterium 2.17.

2.23. SATZ (Intervallschachtelung). *Es sei*

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \dots$$

eine Folge von Intervallen in \mathbb{R} mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 .$$

Dann existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$, so dass

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] = \{ x \in \mathbb{R} \mid \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } x \in [a_n, b_n] \} = \{x\} .$$

Ein Beispiel liefert das Heron-Verfahren 2.18. Ähnlich wie in Bemerkung 2.15 sieht man, dass Intervallschachtelung nur mit abgeschlossenen Intervallen immer funktioniert. Beispielsweise gilt

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset .$$

Als nächstes wollen wir Konvergenz gegen $\pm\infty$ definieren. Da diese beiden Punkte keine reellen Zahlen sind, spricht man von „uneigentlicher“ Konvergenz.

2.24. DEFINITION. Eine Folge $(a_n)_n$ in \mathbb{R} konvergiert (uneigentlich) gegen ∞ , wenn für alle $C \in \mathbb{R}$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt, dass $a_n > C$.

Wir hatten aus Proposition 2.10 gefolgert, dass jede unbeschränkte Folge in \mathbb{R} divergiert. Man beachte, dass in $\overline{\mathbb{R}}$ jede Folge beschränkt ist, denn ∞ ist stets eine obere und $-\infty$ stets eine untere Schranke.

2.25. BEISPIEL. Betrachte die Folge $(q^n)_n$ für $|q| > 1$ wie in Beispiel 2.11 (1). Für $q > 1$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty .$$

Für $q < -1$ hingegen divergiert die Folge auch in $\overline{\mathbb{R}}$.

2.26. PROPOSITION. Es sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (1) Die Folge $(a_n)_n$ konvergiert uneigentlich gegen ∞ .
- (2) Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$, und es gilt

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n > N}} \frac{1}{a_n} = 0 .$$

Für den Fall, dass der Grenzwert von $(a_n)_n$ im Intervall $(0, \infty)$ der positiven reellen Zahlen liegt, haben wir den Grenzwert der Folge $(1/a_n)_n$ schon in Proposition 2.12 (3) bestimmt.

2.27. BEMERKUNG. Die Grundrechenarten lassen sich nicht einfach auf die erweiterte Zahlenreihe fortsetzen. Manche „Rechnungen“ lassen sich aber durch Grenzwertbetrachtungen rechtfertigen. Dazu seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ Folgen in \mathbb{R} mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \overline{\mathbb{R}} .$$

- (1) Addition. Es sei $b \neq -\infty$, dann folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty ,$$

also setzen wir $\infty + b = \infty$, solange $b \neq -\infty$.

Im Falle $b = -\infty$ kann es sein, dass die Folge $(a_n + b_n)_n$ gegen einen beliebigen Wert in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert. Sie könnte aber auch divergieren. Der Ausdruck $\infty + (-\infty)$ ist daher nicht zulässig.

- (2) Multiplikation. Es sei $b \neq 0$, dann folgt (Übung)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n)_n = \begin{cases} \infty & \text{falls } b > 0, \text{ und} \\ -\infty & \text{falls } b < 0. \end{cases}$$

Wir setzen also $\infty \cdot b = \text{sign}(b)\infty$, falls $b \neq 0$. Analog verfahren mit $(-\infty) \cdot b$. Der Ausdruck $\pm\infty \cdot 0$ ist wieder nicht zulässig.

2.c. Häufungspunkte und Kompaktheit

Nicht jede Folge hat einen Grenzwert, nicht einmal in $\overline{\mathbb{R}}$. Um divergente Folgen besser zu verstehen, betrachten wir ihre Häufungspunkte und Teilfolgen. Oftmals konvergiert wenigstens eine Teilfolge einer gegebenen Folge. Das ist zum Beispiel für beschränkte Folgen in \mathbb{R} immer der Fall.

2.28. DEFINITION. Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in \mathbb{R} . Wir nennen $a \in \mathbb{R}$ einen *Häufungspunkt* von $(a_n)_n$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ und alle $N \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ existiert, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$.

Wenn a Häufungspunkt ist, liegen in jeder ε -Umgebung $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_n$. Analog kann man auch definieren, wann $\pm\infty$ Häufungspunkte von $(a_n)_n$ sind (Übung).

2.29. BEISPIEL. Betrachte die Folge $((-1)^n)_n$ aus Beispiel 2.11 (4). Häufungspunkte sind 1 und -1 . Außerdem gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{2k} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{2k+1} = -1 .$$

2.30. DEFINITION. Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in \mathbb{R} . Eine *Teilfolge* von $(a_n)_n$ ist eine Folge der Form $(a_{n_i})_i$, wobei $(n_i)_i$ eine strikt monoton wachsende Folge in \mathbb{N} sei.

Wir können uns das so vorstellen, dass die Folge $(n_i)_i$ eine unendliche Teilmenge von \mathbb{N} aufzählt. Wir möchten uns unter der Teilfolge $(a_{n_i})_i$ also eine „unendliche Teilmenge“ der Folgenglieder von $(a_n)_n$ vorstellen. Aber das geht nur auf dem obigen Umweg, da die Folgenglieder selbst ja keine unendliche Menge bilden müssen, siehe obiges Beispiel.

17.11.21

2.31. PROPOSITION. *Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist genau dann Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_n$ in \mathbb{R} , wenn eine Teilfolge von $(a_n)_n$ gegen a konvergiert.*

Wenn $(a_n)_n$ konvergiert, ist der Grenzwert auf jeden Fall ein Häufungspunkt. Der folgende Satz lässt sich mit Intervallschachtelung 2.23 beweisen.

2.32. SATZ (Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte Folge in \mathbb{R} hat einen Häufungspunkt in \mathbb{R} .*

2.33. BEMERKUNG. In den Übungen sehen wir, dass jede Folge in \mathbb{R} einen Häufungspunkt in $\overline{\mathbb{R}}$ besitzt.

2.34. BEMERKUNG. Man nennt eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ *kompakt*, wenn jede Folge mit Werten in K einen Häufungspunkt in K besitzt. Aus dem obigen Satz folgt, dass abgeschlossene Intervalle

$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$$

kompakt sind. Das gilt nicht mehr, wenn wir stattdessen $A = [a, b] \setminus \{x\}$ für ein $x \in [a, b]$ betrachten, denn x könnte der einzige Häufungspunkt einer Folge in A sein.

Erst recht gilt es nicht mehr, wenn wir das abgeschlossene Intervall $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ in den rationalen Zahlen betrachten. Hier braucht man also wieder die Vollständigkeit von \mathbb{R} .

2.35. DEFINITION. Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in \mathbb{R} . Dann definieren wir den *Limes superior* und den *Limes inferior* durch

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{ a_k \mid k \in \mathbb{N} \text{ und } k > n \} \in \overline{\mathbb{R}}$$

und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{ a_k \mid k \in \mathbb{N} \text{ und } k > n \} \in \overline{\mathbb{R}} .$$

2.36. BEMERKUNG. Man überlegt sich, dass die $\overline{\mathbb{R}}$ -wertige Folge

$$(s_n)_n = \left(\sup \{ a_k \mid k \in \mathbb{N} \text{ und } k > n, \} \right)_n$$

monoton fällt. Falls sie konstant ∞ ist, ist das auch ihr Grenzwert. Andernfalls existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $s_n < \infty$ für alle $n \geq N$. Falls s_n dann von unten beschränkt ist, hat die Folge einen

Grenzwert in \mathbb{R} nach dem Monotoniekriterium 2.17. Andernfalls ist $-\infty$ ihr Grenzwert. Für alle Folgen in \mathbb{R} sind also Limes superior und genauso auch Limes inferior in $\overline{\mathbb{R}}$ definiert .

2.37. PROPOSITION. *Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in \mathbb{R} .*

- (1) *Wenn $(a_n)_n$ beschränkt ist, sind ihr Limes inferior und ihr Limes superior beide endlich.*
- (2) *Wenn $(a_n)_n$ beschränkt ist, ist der Limes inferior der kleinste und der Limes superior der größte Häufungspunkt.*
- (3) *Die Folge $(a_n)_n$ konvergiert genau dann gegen $x \in \overline{\mathbb{R}}$, wenn*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = x .$$

Es folgt insbesondere, dass eine Teilfolge einer konvergenten Folge wieder gegen den gleichen Grenzwert konvergiert. Wir kommen zu einem weiteren wichtigen Konvergenz-Kriterium.

2.38. DEFINITION. Eine Folge $(a_n)_n$ in \mathbb{R} heißt *Cauchy-Folge*, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > N$ und $n > N$ gilt, dass

$$|a_m - a_n| < \varepsilon .$$

2.39. SATZ (Cauchy-Kriterium). *Eine Folge reeller Zahlen konvergiert genau dann in \mathbb{R} , wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

2.40. BEMERKUNG. Wir können jetzt etwas besser verstehen, was „Vollständigkeit“ bedeutet. Mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums 2.39 könnten wir nämlich auch das Monotoniekriterium 2.17 beweisen. Damit schließt sich der Kreis, und wir sehen, dass in einem archimedisch angeordneten Körper (siehe Satz 1.46) das Monotoniekriterium 2.17, Intervallschachtelung 2.23, der Satz von Bolzano-Weierstraß 2.32 und das Cauchy-Kriterium 2.39 alle zueinander äquivalent sind. Alle diese Sätze gelten in \mathbb{R} , aber nicht in \mathbb{Q} .

Darüberhinaus können wir mithilfe der Intervallschachtelung auch die Existenz des Supremums einer beliebigen nichtleeren, von oben beschränkten Teilmenge beweisen. Somit ist Ordnungsvollständigkeit eines angeordneten Körpers \mathbb{k} äquivalent dazu, dass \mathbb{k} archimedisch angeordnet ist und einer der vier oben genannten Sätze gilt.

Die Begriffe „Cauchy-Folge“ und „Konvergenz“ kann man etwas allgemeiner für sogenannte metrische Räume (M, d) definieren. Das sind Mengen M mit einer Abstandsfunktion $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, die gleichen Eigenschaften hat wie $|x - y|$ in Bemerkung 2.3. Jede konvergente Folge ist Cauchy-Folge, das ergibt sich wie im Beweis des obigen Satzes aus der Dreiecksungleichung. Man nennt (M, d) *metrisch vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in M konvergiert. Somit besagt der obige Satz, dass \mathbb{R} metrisch vollständig ist.

In der Literatur wird daher gerne verlangt, dass \mathbb{R} Archimedisch angeordnet ist, und dass jede Cauchy-Folge konvergiert. Wenn man \mathbb{R} explizit konstruieren möchte, geht das mit Dedekindschen Schnitten (siehe Bemerkung 1.48) oder, indem man den \mathbb{Q} -Vektorraum aller Cauchy-Folgen in \mathbb{Q} betrachtet, und dann den Unterraum der Nullfolgen in \mathbb{Q} heraussieht.

2.d. Komplexe Zahlen und Euklidische Norm

Wir können Konvergenz auch für Folgen in $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ definieren. Dazu führen wir die Euklidische Norm auf \mathbb{R}^n ein. Außerdem betrachten wir die komplexen Zahlen aus Beispiel 1.34 etwas genauer. Das tun wir vor allem, um im nächsten Abschnitt auch mit komplexwertigen Reihen arbeiten zu können.

Unter dem \mathbb{R}^n für $n \in \mathbb{N}$ verstehen wir das kartesische Produkt von n Kopien von \mathbb{R} , siehe Definition 1.23 und Beispiel 1.26 (2). Wir schreiben Vektoren hier der Einfachheit halber als Zeilen.

Der Raum \mathbb{R}^n bildet einen *Vektorraum*. Dazu definieren für alle $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ und alle $r \in \mathbb{R}$ die Vektoraddition und skalare Multiplikation durch

$$\begin{aligned}x + y &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\rx &= (rx_1, \dots, rx_n).\end{aligned}$$

Der \mathbb{R}^n trägt viele mögliche Skalarprodukte. Wir betrachten auf \mathbb{R}^n das (*Standard-*) *Skalarprodukt* $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Es ist für alle Vektoren x und $y \in \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Die *Euklidische Norm* auf \mathbb{R}^n ist definiert durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Sie kennen Skalarprodukt und Norm möglicherweise aus der Schule, zumindest auf \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 . In der linearen Algebra II lernen Sie mehr über Skalarprodukte. Zu jedem Skalarprodukt gehört eine Norm, weitere Normen lernen Sie in Analysis II kennen. Wir können Skalarprodukte und Normen auch auf unendlich-dimensionalen Vektorräumen betrachten; das passiert aber erst systematisch in der Vorlesung Funktionalanalysis.

2.41. SATZ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung). Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn einer der Vektoren ein nichtnegatives Vielfaches des anderen ist.

2.42. BEMERKUNG. Für die Euklidische Norm gelten ähnliche Rechenregeln wie für den Absolutbetrag, siehe Bemerkung 2.2. Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$.

(1) *Positivität*. Es gilt

$$\|x\| \geq 0 \quad \text{und} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0.$$

(2) *Multiplikativität*. Es gilt

$$\|ry\| = |r| \cdot \|y\|.$$

(3) *Subadditivität*. Es gilt

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Daraus schließen wir, dass der *Euklidische Abstand* $d(x, y) = \|x - y\|$ die Rechenregeln aus Bemerkung 2.3 erfüllt.

Es sei $(x^{(k)})_k$ eine Folge in \mathbb{R}^n , mit $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$. Wir definieren Konvergenz, Grenzwert und Häufungspunkte von $(x^{(k)})_k$ genau wie in den Definitionen 2.6 und 2.28. Dabei ist die ε -Umgebung eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ gerade ein Ball vom Radius ε (kurz: ε -Ball) der Form

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \varepsilon\}.$$

Da wir keine Anordnung zur Verfügung haben, können wir allerdings keinen Limes superior oder Limes inferior definieren.

2.43. PROPOSITION. Es seien $(x^{(k)})_k, (y^{(k)})_k$ Folgen in \mathbb{R}^n , $(r_k)_k$ eine Folge in \mathbb{R} , und $x \in \mathbb{R}^n$.

(1) *Dann gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x \iff \forall i \in \{1, \dots, n\} \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i.$$

(2) Analog zu den Rechenregeln aus Proposition 2.12 gilt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (x^{(k)} + y^{(k)}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} + \lim_{k \rightarrow \infty} y^{(k)}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (r_k \cdot x^{(k)}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} r_k \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} \\ \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \langle x^{(k)}, y^{(k)} \rangle &= \left\langle \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}, \lim_{k \rightarrow \infty} y^{(k)} \right\rangle. \end{aligned}$$

Wir definieren Cauchy-Folgen wie in Definition 2.38. Man sieht leicht, dass jede konvergente Folge in \mathbb{R}^n eine Cauchy-Folge ist. Da wir keine Anordnung zur Verfügung haben, erklären wir Vollständigkeit des \mathbb{R}^n über Cauchy-Folgen, siehe Bemerkung 2.40.

2.44. SATZ (Cauchy-Kriterium). *Der \mathbb{R}^n mit der Euklidischen Norm ist (metrisch) vollständig, das heißt, jede Cauchy-Folge konvergiert.*

Wir nennen eine Folge $(x^{(k)})_k$ in \mathbb{R}^n *beschränkt*, wenn die Folge $(\|x^{(k)}\|)_k$ beschränkt ist. Wie in Proposition 2.10 ist jede konvergente Folge beschränkt.

2.45. FOLGERUNG (aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte Folge in \mathbb{R}^n hat einen Häufungspunkt in \mathbb{R}^n .*

2.46. BEMERKUNG. In den meisten obigen Sätzen haben wir ausgenutzt, dass eine Folge $(x^{(k)})_k$ im \mathbb{R}^n genau dann konvergiert, eine Cauchy-Folge ist, beziehungsweise beschränkt ist, wenn das gleiche für jede der Koordinatenfolgen $(x_1^{(k)})_k$, dots, $(x_n^{(k)})_k$ in \mathbb{R} gilt.

Aber Vorsicht: es kann sein, dass x_i für alle i Häufungspunkt der Folge $(x_i^{(k)})_k$ ist, aber x dennoch kein Häufungspunkt von $(x^{(k)})_k$.

Wir erinnern uns an die komplexen Zahlen \mathbb{C} . Wie in Beispiel 1.34 seien $z = x + iy$ und $w = u + iv \in \mathbb{C}$ gegeben mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, entsprechend $z = (x, y)$, $w = (u, v) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z + w &= (x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v) \\ \text{und} \quad zw &= (x + iy) \cdot (u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu). \end{aligned}$$

Geometrisch entspricht die Addition genau der Vektoraddition mit Hilfe von Parallelogrammen. Für die komplexe Multiplikation überlegen wir uns später eine Anschauung.

2.47. BEMERKUNG. Wir wollen nicht alle Körperaxiome aus Definition 1.27 nachrechnen. Stattdessen führen wir die wichtigsten Konstruktionen ein, um mit komplexen Zahlen arbeiten zu können. Im Folgenden seien stets $z = x + iy$ und $w = u + iv \in \mathbb{C}$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.

(1) Wir definieren den *Realteil* $\operatorname{Re}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ und den *Imaginärteil* $\operatorname{Im}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\operatorname{Re} z = x \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} z = y.$$

Insbesondere ist auch der Imaginärteil eine reelle Zahl, und es gilt $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$.

(2) Wir definieren die *komplexe Konjugation* $\bar{\cdot}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{\bar{z}} &= z, \\ \overline{z + w} &= \overline{(x + u) + i(y + v)} = \bar{z} + \bar{w} \\ \text{und} \quad \overline{zw} &= \overline{(xu - yv) + i(xv + yu)} = \bar{z} \cdot \bar{w}. \end{aligned}$$

(3) Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ liegt genau dann in $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, wenn $\bar{z} = z$.

(4) Es gilt

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R} .$$

In Anlehnung an die Euklidische Norm definieren wir den *Absolutbetrag* von z durch

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} \in \mathbb{R} .$$

(5) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten die Rechenregeln aus Bemerkung 2.2, nämlich

$$\begin{aligned} |z| \geq 0 \quad \text{und} \quad |z| = 0 &\iff z = 0 , \\ |zw| &= |z| \cdot |w| , \\ |z + w| &\leq |z| + |w| . \end{aligned}$$

Falls $z \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, hat der Absolutbetrag den gleichen Wert wie in Definition 2.1.

(6) Jetzt können wir die Existenz des multiplikativen Inversen überprüfen: für alle $z \in \mathbb{C}^\times$ gilt

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z\bar{z}}{z\bar{z}} = 1 .$$

(7) Für den Abstand $|z - w| \in \mathbb{R}$ zweier komplexer Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt Bemerkung 2.3 analog, da wir dort nur die Rechenregeln aus Bemerkung 2.2 benutzt hatten.

Es gibt viele Gründe, komplexe Zahlen einzuführen und zu benutzen. Manche reelle Funktionen lassen sich besser mit Hilfe komplexer Funktionen verstehen, beispielsweise die Winkelfunktionen \sin und \cos ; mehr dazu später.

Aus Sicht der Algebra sind komplexe Zahlen wegen des folgenden Resultats wichtig. Wir werden es im zweiten Semester beweisen; andere Beweise lernen Sie möglicherweise in der Topologie oder der Funktionentheorie. Es gibt jedoch keinen rein algebraischen Beweis — in irgendeiner Form geht bei jedem Beweis die Vollständigkeit der reellen Zahlen ein.

Unter einem *Polynom* über einem Körper \mathbb{k} versteht man einen Ausdruck der Form

$$P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i \quad \text{mit } a_i \in \mathbb{k} \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Ist $a_n \neq 0$, so heißt P ein Polynom vom *Grad* n (das Nullpolynom $P = 0$ hat nach Konvention den Grad $-\infty$). Polynome vom Grad ≤ 0 heißen *konstant*. Für die Variable X kann man Zahlen aus \mathbb{k} einsetzen und erhält eine Funktion $P: \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$. Ist $P(x) = 0$ für ein $x \in \mathbb{k}$, so heißt x eine *Nullstelle* von P .

2.48. SATZ (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht konstante Polynom über \mathbb{C} hat eine Nullstelle in \mathbb{C} .*

Es sei $(z_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Wir definieren Konvergenz und Grenzwert von $(z_n)_n$ genau wie in Definition 2.6. Dabei ist die ε -Umgebung einer komplexen Zahl z gerade eine Kreisscheibe mit Radius ε der Form

$$U_\varepsilon(z) = \{ w \in \mathbb{C} \mid |z - w| < \varepsilon \}.$$

In Analogie zu Proposition 2.43 gilt Folgendes.

2.49. PROPOSITION. *Es sei $(z_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen.*

- (1) *Die Folge $(z_n)_n$ konvergiert genau dann in \mathbb{C} , wenn die Folgen $(\operatorname{Re} z_n)_n$ und $(\operatorname{Im} z_n)_n$ in \mathbb{R} konvergieren.*
- (2) *Die Folge $(z_n)_n$ konvergiert genau dann gegen $z \in \mathbb{C}$, wenn $(\bar{z}_n)_n$ gegen \bar{z} konvergiert.*
- (3) *Die Rechenregeln aus Proposition 2.12 gelten analog für Folgen komplexer Zahlen.*

Bei komplexen Zahlen ist es möglich, einen Punkt ∞ im Unendlichen hinzuzufügen. Man erhält dann die komplexe Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Dann gilt auch ein Analogon von Proposition 2.26. Aber darauf wollen wir hier nicht näher eingehen.

24.11.21

2.e. Reihen

Wir wollen jetzt unendliche Summen reeller oder komplexer Zahlen betrachten. Dazu führen wir Reihen ein und sehen, dass Reihen in gewisser Weise nichts anderes als speziell konstruierte Folgen sind. Im nächsten Abschnitt benutzen wir dann Potenzreihen, um einige spezielle Funktionen zu konstruieren.

2.50. DEFINITION. Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. Dann konvergiert die *Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

in \mathbb{k} mit den *Gliedern* oder *Summanden* a_n genau dann gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{k}$, kurz

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a ,$$

wenn die Folge $(s_n)_n$ der *Partialsommen* gegen a konvergiert, wobei

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k .$$

Wenn die Reihe nicht konvergiert, dann divergiert sie. Im Falle $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ definieren wir uneigentliche Konvergenz gegen $\pm\infty$, also Konvergenz in $\overline{\mathbb{R}}$, wie in Abschnitt 2.b.

Die Notation $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ kann somit sowohl die Folge der Partialsommen bezeichnen (etwa, wenn wir von Konvergenz sprechen) als auch ihren Grenzwert.

2.51. BEISPIEL. Die Formel für die geometrische Summe in Beispiel 1.8 lässt sich analog für alle $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ beweisen. Zusammen mit Beispiel 2.11 erhalten wir die Konvergenz der *geometrischen Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$.

(1) Wenn $|q| < 1$, konvergiert die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} .$$

(2) Wenn $|q| \geq 1$, divergiert die geometrische Reihe.

(3) Mit Hilfe der geometrischen Reihe können wir auch periodische Dezimalbrüche verstehen:

$$0,\bar{3} = 0,333\dots = \frac{3}{10} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} 10^{-i} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1-1/10} = \frac{1}{3} .$$

Und analog gilt $0,\bar{9} = 1$.

2.52. BEMERKUNG. In der obigen Definition haben wir aus der Reihe die Folge ihrer Partialsommen gemacht, um Konvergenz zu definieren. Umgekehrt könnten wir aus jeder Folge $(b_n)_n$ eine Reihe machen, denn für die Folge $(a_n)_n$ mit $a_0 = b_0$ und $a_n = b_n - b_{n-1}$ erhalten wir die Partialsommen

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = b_0 + (b_1 - b_0) + \dots + (b_n - b_{n-1}) = b_n ,$$

wie man mit vollständiger Induktion leicht überprüft.

Dennoch lohnt es sich, Folgen und Reihen separat zu betrachten, wie wir im Folgenden sehen werden.

2.53. BEMERKUNG. Man sieht leicht, dass bei einer konvergenten Reihe die Glieder eine Nullfolge bilden müssen. Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Beispielsweise divergiert die *harmonische Reihe*, das heißt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty .$$

2.54. SATZ (Leibniz-Kriterium). *Es sei $(a_n)_n$ eine monoton fallende Nullfolge in \mathbb{R} . Dann konvergiert die alternierende Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k .$$

2.55. BEISPIEL. Wir können später zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2$$

der (natürliche) Logarithmus der Zahl 2 ist.

Wenn wir die Reihenglieder aber geschickt umsortieren, können wir jede beliebige Zahl in $\overline{\mathbb{R}}$ als Grenzwert erhalten, siehe unten. Also gilt Kommutativität der Addition nicht mehr für „unendliche Summen“.

Als Beispiel betrachten wir die umsortierte Reihe, bei der nach jedem positiven Summanden zwei negative kommen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} \log 2 . \end{aligned}$$

Die Konvergenz der umsortierten Reihe ergibt sich ebenfalls aus der obigen Rechnung.

2.56. DEFINITION. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} konvergiert genau dann *absolut*, wenn die Reihe der Absolutbeträge in \mathbb{R} konvergiert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty .$$

2.57. PROPOSITION. *Jede absolut konvergente Reihe konvergiert.*

Die Umkehrung gilt nicht, wie Bemerkung 2.53 zeigt.

Unter einer *Umordnung* einer gegebenen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ verstehen wir eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{j(n)} , \quad \text{wobei } j: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ bijektiv sei.}$$

Man beachte, dass die umgeordnete Reihe völlig andere Partialsummen haben kann als die ursprüngliche. Wie sich der Grenzwert einer Reihe nach Umordnung verhält, hängt davon ab, ob sie absolut konvergiert.

2.58. SATZ (Umordnungssatz). *Wenn eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in \mathbb{k} absolut gegen a konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung dieser Reihe ebenfalls absolut gegen a .*

2.59. SATZ (Riemannscher Umordnungssatz). Wenn eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in \mathbb{R} konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, dann existiert für jedes $x \in \overline{\mathbb{R}}$ eine Umordnung der Reihe, die gegen x konvergiert. Es existieren auch Umordnungen, die in $\overline{\mathbb{R}}$ divergieren.

In \mathbb{C} ist die Menge der möglichen Grenzwerte einer nicht absolut konvergenten Reihe entweder eine affine reelle Gerade in \mathbb{C} oder ganz \mathbb{C} , das folgt aus dem Steinitzschen Umordnungssatz.

Es folgen jetzt eine Reihe Kriterien für absolute Konvergenz.

2.60. SATZ (Majorantenkriterium). Für alle $k \in \mathbb{N}$ seien $a_k \in \mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} und $b_k \in \mathbb{R}$, $b_k \geq |a_k|$. Wenn die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

in \mathbb{R} konvergiert, dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

absolut in \mathbb{k} .

2.61. BEMERKUNG. Man nennt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ auch *Majorante* der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Eine beliebige Majorante für viele Zwecke ist die geometrische Reihe aus Beispiel 2.51 für $0 < q < 1$, oder auch die folgende Reihe.

2.62. BEISPIEL. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

konvergiert, denn eine Majorante ist für $k \geq 2$ gegeben durch

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)},$$

und der Grenzwert dieser Reihe lässt sich explizit bestimmen (Übung).

2.63. BEMERKUNG. Dezimalbrüche sind konvergente Reihen: für $n \in \mathbb{N}$ und $d_1, d_2, \dots \in \{0, \dots, 9\}$ ist

$$n, d_1 d_2 d_3 \dots = n + \sum_{i=1}^{\infty} d_i \cdot 10^{-i}$$

mit Majorante $\sum_{i=1}^{\infty} 10^{1-i}$. Mit Hilfe der Dezimaldarstellung kann man leicht folgern, dass es keine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ geben kann. Man sagt, die reellen Zahlen sind *überabzählbar*.

2.64. FOLGERUNG (Minorantenkriterium). Für alle $k \in \mathbb{N}$ seien $a_k \in \mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} und $b_k \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq b_k \leq |a_k|$. Wenn die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

divergiert, dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

nicht absolut in \mathbb{k} .

2.65. BEMERKUNG. In diesem Fall heißt $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine *Minorante* von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Eine beliebige Minorante ist zum Beispiel die harmonische Reihe aus Bemerkung 2.53.

Anhand der alternierenden harmonischen Reihe aus Beispiel 2.55 sieht man aber, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ dennoch konvergieren kann, nur eben nicht absolut.

2.66. FOLGERUNG (Quotientenkriterium). *Es seien $a_k \in \mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} mit $a_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.*

(1) Wenn

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

(2) Wenn

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1,$$

dann divergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Für positive reelle Zahlen folgt aus $x < y$, dass $x^n < y^n$. Daher können wir n -te Wurzeln positiver Zahlen $x > 0$ definieren durch

$$\sqrt[n]{x} = \sup \{ y \in \mathbb{R} \mid y^n < x \}.$$

Es folgt $(\sqrt[n]{x})^n = x = \sqrt[n]{x^n}$.

2.67. FOLGERUNG (Wurzelkriterium). *Es seien $a_k \in \mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} .*

(1) Wenn

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

(2) Wenn

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

dann divergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

2.68. BEMERKUNG. Das Quotientenkriterium lässt sich aus dem Wurzelkriterium ableiten, denn falls $a_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

In den Grenzfällen

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1 \quad \text{und} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

ist keine Aussage möglich. Beispielsweise divergiert die harmonische Reihe (Bemerkung 2.53), während die Reihe aus Beispiel 2.62 absolut konvergiert.

2.f. Potenzreihen

Potenzreihen sind spezielle Reihen, in die man noch einen Parameter x einsetzen kann. Dadurch erhält man Funktionen in x . Die Partialsummen sind stets Polynome, können also nur durch die Grundrechenarten beschrieben werden. Das macht Potenzreihen interessant, um Funktionen zu beschreiben und gegebenenfalls auch zu approximieren.

2.69. DEFINITION. Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} . Dann heißt der Ausdruck

$$R(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$$

eine *Potenzreihe* über \mathbb{k} in der *Variablen* X mit den *Koeffizienten* a_n . Es sei $x \in \mathbb{k}$. Wir sagen, dass $R(X)$ bei $X = x$ *konvergiert*, wenn die Reihe

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

in \mathbb{k} konvergiert. Wir nennen die Potenzreihe $R(X)$ *konvergent*, falls $R(X)$ an einer Stelle $x \neq 0$ konvergiert, und ansonsten *divergent*.

2.70. LEMMA. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ konvergent für ein $x_0 \in \mathbb{k}$. Dann existiert eine Konstante $C < \infty$, so dass für alle $x \in \mathbb{k}$ mit $|x| < |x_0|$ und alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n x^n \right| \leq \frac{C}{|x_0| - |x|} \left| \frac{x}{x_0} \right|^N.$$

Insbesondere konvergiert die Potenzreihe absolut für alle x in

$$B_{|x_0|}(0) = \{ x \in \mathbb{k} \mid |x| < |x_0| \}.$$

Aus dem Lemma ergibt sich bereits, dass Potenzreihen immer auf einem ganzen Kreis in \mathbb{C} konvergieren, wenn sie für wenigstens ein $x_0 \neq 0$ konvergieren. Das Lemma gibt auch Auskunft über die Konvergenzgeschwindigkeit. Sie wird besser, je weiter man vom Rand des Kreises entfernt ist.

Als nächstes können wir den Radius dieses Kreises mit Hilfe des Wurzelskriteriums zumindest theoretisch gut beschreiben.

2.71. SATZ UND DEFINITION (Konvergenzradius). Es sei $R(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ eine Potenzreihe über $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} , dann heißt

$$\rho = 1 / \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty]$$

ihre Konvergenzradius, und es gilt:

- (1) Für alle $x \in \mathbb{k}$ mit $|x| < \rho$ konvergiert die Reihe $R(x)$ absolut.
- (2) Für alle $x \in \mathbb{k}$ mit $|x| > \rho$ divergiert die Reihe $R(x)$ in \mathbb{k} .

2.72. BEMERKUNG. Wir werden später sehen, dass $R(x)$ im Inneren des *Konvergenzkreises*

$$B_\rho(0) = \{ x \in \mathbb{k} \mid |x| < \rho \}$$

eine stetige und beliebig oft differenzierbare Funktion darstellt. Tatsächlich ist $B_\rho(0)$ eine Kreisscheibe, falls $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, ansonsten einfach das um 0 symmetrische Intervall $(-\rho, \rho)$.

Auf dem Rand des Konvergenzkreises ist keine Aussage möglich. Betrachte etwa die Potenzreihen

$$R(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^k}{k^2}, \quad S(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^k}{k}, \quad \text{und} \quad T(X) = \sum_{k=1}^{\infty} X^k.$$

In allen drei Fällen ist der Konvergenzradius $\rho = 1$. Die erste Reihe konvergiert für alle x mit $|x| = 1$ absolut (Beispiel 2.62), die zweite konvergiert für $x = -1$ und divergiert für $x = 1$ (Beispiele 2.53, 2.55), und die letzte divergiert für alle x mit $|x| = 1$ (Beispiel 2.51).

2.73. BEISPIEL. Die *Exponentialreihe*

$$\exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

hat Konvergenzradius ∞ . Wir wollen uns überlegen, dass sie eine Funktion darstellt, die ähnliche Rechenregeln wie eine Potenz $z \mapsto e^z$ erfüllt. Dabei ist $e = \exp(1)$ die *Eulersche Zahl*.

Die Exponentialfunktion $x \mapsto \exp(x)$ erhalten wir auch, wenn wir uns vorstellen, dass ein Guthaben „kontinuierlich“ verzinst wird. Das führt auf die folgende Darstellung.

2.74. PROPOSITION. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Man beachte, dass die Folge in der Proposition deutlich langsamer konvergiert als die Exponentialreihe.

2.75. SATZ. *Die Eulersche Zahl $e = \exp(1)$ ist irrational.*

Reihen lassen sich addieren, indem man ihre Summanden addiert, da sich dann auch die Partialsummen addieren. Genauso gilt für Potenzreihen

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) X^k.$$

Um die Rechenregeln für die Exponentialfunktion nachzuprüfen, brauchen wir eine Formel für das Produkt zweier beliebiger Reihen. Es handelt sich also um eine Art „Distributivgesetz“ für unendliche Summen. Man beachte: wenn beide Reihen absolut konvergieren, dann gilt das auch für ihre Produkt. Und wegen des Umordnungssatzes 2.58 kommt es dann nicht auf die genaue Reihenfolge der Summanden im Produkt an.

2.76. SATZ UND DEFINITION (Cauchy-Produkt). *Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell$ absolut konvergente Reihen in $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} . Dann konvergiert ihr Cauchy-Produkt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}\right)$$

ebenfalls absolut und stellt das Produkt beider Reihen dar.

Das Cauchy-Produkt von Potenzreihen ist selbst wieder eine Potenzreihe.

2.77. FOLGERUNG (Cauchy-Produkt von Potenzreihen). *Gegeben seien konvergente Potenzreihen $R(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ und $S(X) = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell X^\ell$ mit Konvergenzradien $\rho, \sigma > 0$. Dann ist ihr Cauchy-Produkt die Potenzreihe*

$$(R \cdot S)(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}\right) X^n$$

mit Konvergenzradius $\geq \min(\rho, \sigma)$.

Wir bilden das Cauchy-Produkt von $\exp(x)$ und $\exp(y)$ als Reihen und erhalten

2.78. SATZ (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion). *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \exp(z + w).$$

2.79. FOLGERUNG (Weitere Rechenregeln für die Exponentialfunktion). Für alle $z \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$ sowie $n \in \mathbb{Z}$ gilt

- (1) $\exp(z) \exp(-z) = 1$, *insbesondere* $\exp(z) \neq 0$,
(2) $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$,
(3) $\exp(x) > 0$ *und* $|\exp(iy)| = 1$,
(4) $\exp(nz) = \exp(z)^n$.

Somit verhält sich die Exponentialreihe zumindest teilweise so, wie man es von einer Funktion der Form $z \mapsto e^z$ erwarten würde.

Wir betrachten jetzt die Exponentialreihe für rein imaginäre Argumente, das heißt, für $z = iy$ mit $y \in \mathbb{R}$. Es folgt $\exp(iy) = \cos(y) + i \sin(y)$, wobei die *Winkelfunktionen* definiert sind durch

$$\cos(X) = \operatorname{Re} \exp(iy) = \frac{\exp(iy) + \exp(-iy)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^{2k}}{(2k)!}$$

und

$$\sin(X) = \operatorname{Im} \exp(iy) = \frac{\exp(iy) - \exp(-iy)}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

2.80. PROPOSITION (Rechenregeln für die Winkelfunktionen). Für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt

(1) $\cos(y)^2 + \sin(y)^2 = 1$.

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten die Additionstheoreme

(2) $\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$

(3) *und* $\sin(x + y) = \cos(x) \sin(y) + \sin(x) \cos(y)$.

2.81. BEMERKUNG. Die Funktionen \cos und $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verhalten sich also genauso wie die Winkelfunktionen (in Bogenmaß), die Sie aus der Schule kennen. Weitere wichtige Eigenschaften der Winkelfunktionen leiten wir dann im nächsten Kapitel her.

2.82. BEMERKUNG. Um die komplexe Multiplikation besser zu verstehen, schreiben wir komplexe Zahlen in Polarkoordinaten, das heißt, es sei

$$z = x + iy = r \exp(i\varphi) = r \cos \varphi + ir \sin \varphi \quad \text{und} \quad w = u + iv = s \exp(i\psi) = s \cos \psi + is \sin \psi.$$

Die Zahlen $r = |z|$ und $s = |w|$ sind die Beträge, und φ und ψ heißen die *Argumente* der Zahlen z und w . Dann folgt

$$z \cdot w = rs \exp(i(\varphi + \psi)).$$

Also werden beim Multiplizieren die Beträge multipliziert, siehe Bemerkung 2.47 (5), und die Argumente addiert.

KAPITEL 3

Stetige Funktionen

Wir wollen jetzt stetige Funktionen auf Teilmengen von $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} betrachten. Außerdem führen wir Grenzwerte ein, die wir spätestens im vierten Kapitel zur Definition der Ableitung brauchen. Wir beweisen einige wichtige Sätze über stetige Funktionen auf Intervallen in \mathbb{R} und benutzen sie anschließend, um die Exponentialfunktion und die Winkelfunktionen besser zu verstehen.

3.a. Stetigkeit

7.12.21

In diesem Kapitel betrachten wir stetige Funktionen. Stetigkeit von Funktionen und allgemeiner von Abbildungen ist ein sehr wichtiges Konzept in der Analysis. Daher versuchen wir, uns zunächst mit Hilfe einiger Beispiele eine gute Anschauung zu verschaffen.

3.1. DEFINITION. Es sei $A \subset \mathbb{R}$ oder $A \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge und $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} . Eine Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{k}$ heißt *stetig bei* $x_0 \in A$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in A$ gilt

$$|x - x_0| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Wenn das für alle $x_0 \in A$ gilt, heißt f *stetig*. Wir schreiben

$$C^0(A) = \{ f: A \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \} .$$

Da $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, ist jede Teilmenge von \mathbb{R} auch Teilmenge von \mathbb{C} , und jede Abbildung nach \mathbb{R} lässt sich als Abbildung nach \mathbb{C} auffassen. Also bräuchten wir hier eigentlich nur über Teilmengen von \mathbb{C} zu sprechen.

3.2. BEISPIEL. Wir beginnen mit einigen sehr elementaren Beispielen.

- (1) Konstante Funktionen sind stetig.
- (2) Es seien $A \subset B \subset \mathbb{k}$ Teilmengen. Dann ist die *Inklusionsabbildung* $\iota: A \rightarrow B$ stetig, wobei $\iota(x) = x \in B$ für alle $x \in A$.
- (3) Der Absolutbetrag $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.
- (4) Die komplexe Konjugation aus Bemerkung 2.47 (2) ist stetig.
- (5) Die *Heaviside-Funktion* $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (benannt nach Oliver Heaviside) ist gegeben durch

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \text{ und} \\ 1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Sie ist überall stetig außer an der Stelle $x_0 = 0$.

- (6) Wir betrachten die Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für alle } x \in \mathbb{Q}, \text{ und} \\ 0 & \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für alle } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ wobei } \frac{p}{q} \text{ ein gekürzter Bruch sei, und} \\ 0 & \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dann ist f nirgends stetig, und g genau bei allen irrationalen Zahlen $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (Übung).

3.3. BEMERKUNG. Stetigkeit ist eine sogenannte *lokale* Eigenschaft: um festzustellen, ob eine Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{k}$ an einer Stelle $x_0 \in A$ stetig ist, reicht es, für ein $\varepsilon > 0$ die Funktion auf der Menge $A \cap B_\varepsilon(x_0)$ zu kennen, dabei sei

$$B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{k} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$$

der ε -Ball um x_0 in \mathbb{k} .

Für eine beliebige Abbildung $f: M \rightarrow N$ zwischen Mengen definieren wir das *Urbild* einer Teilmenge $V \subset N$ durch

$$f^{-1}(V) := \{m \in M \mid f(m) \in V\}.$$

Dann können wir die obige Definition noch etwas umformulieren.

Eine Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{k}$ ist genau dann *stetig bei* $x_0 \in A$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0))).$$

Wir erinnern uns an die Verkettung von Abbildungen aus Definition 1.12.

3.4. PROPOSITION (Verkettung stetiger Funktionen). *Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} Teilmengen und $g: A \rightarrow \mathbb{k}$, $f: B \rightarrow \mathbb{k}$ Funktionen mit $\text{im } g \subset B$. Wenn g bei $x_0 \in A$ und f bei $g(x_0) \in B$ stetig ist, dann ist auch die Verkettung $f \circ g: A \rightarrow \mathbb{k}$ bei x_0 stetig.*

3.5. FOLGERUNG. *Es seien $A \subset B \subset \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} Teilmengen und $f: B \rightarrow \mathbb{k}$ stetig. Dann ist die Einschränkung $f|_A: A \rightarrow \mathbb{k}$ mit $(f|_A)(x) = f(x)$ für alle $x \in A$ auch stetig.*

Umgekehrt kann man im Sinne von Bemerkung 3.3 zeigen, dass $f: A \rightarrow \mathbb{k}$ genau dann stetig ist, wenn es zu jedem $x_0 \in A$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f|_{A \cup B_\delta(x_0)}$ stetig ist.

3.6. PROPOSITION (Folgenstetigkeit). *Es sei $A \subset \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} und $f: A \rightarrow \mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} eine Funktion. Für jedes $a \in A$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (1) f ist stetig bei a .
- (2) f ist folgenstetig bei a , das heißt, für jede Folge $(x_n)_n$ in A mit Grenzwert a konvergiert $(f(x_n))_n$ gegen $f(a)$.

Völlig analog ist Stetigkeit auf ganz A zur Folgenstetigkeit auf ganz A äquivalent, dabei heißt f folgenstetig auf A , wenn für alle konvergenten Folgen in A mit Grenzwert in A gilt, dass f mit dem Grenzwert „vertauscht“:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right).$$

Wir definieren Grundrechenarten für Funktionen $f, g: A \rightarrow \mathbb{k}$ *punktweise* durch

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (fg)(x) &= f(x) \cdot g(x), \\ (f/g)(x) &= f(x)/g(x) \quad \text{falls } g(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in A. \end{aligned}$$

3.7. FOLGERUNG (Rechenregeln). *Wenn $f, g: A \rightarrow \mathbb{k}$ bei $a \in A$ stetig sind, dann sind auch $f+g$, fg , und, falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in A$ auch f/g bei a stetig.*

3.8. BEMERKUNG. Die Menge aller Funktionen $f: A \rightarrow \mathbb{k}$ bildet einen Vektorraum, und $C^0(A)$ ist ein Unterraum.

3.9. BEMERKUNG. Eine *rationale Funktion* $f: A \rightarrow \mathbb{k}$ ist eine Funktion der Form $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, wobei P und Q Polynome sind. Wichtig ist dabei nur, dass $Q(x) \neq 0$ für alle $x \in A$. Mit Beispiel 3.2 (1) und (2) und Folgerung 3.7 sehen wir, dass rationale Funktionen stetig sind.

3.b. Häufungspunkte und Grenzwerte

Stetigkeit lässt sich auch mit Hilfe von Grenzwerten von Funktionen beschreiben. Solche Grenzwerte brauchen wir spätestens bei der Definition der Ableitung im nächsten Kapitel. Hier wollen wir sie benutzen, um stetige Funktionen etwas anders zu beschreiben, und um eine stetige Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{k}$ auf einen etwas größeren Definitionsbereich fortsetzen.

3.10. DEFINITION. Es sei $A \subset \mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} eine Teilmenge. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{k}$ heißt *Häufungspunkt* von A , wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Punkt $x \in A$ existiert, so dass $x \neq x_0$ und $|x - x_0| < \varepsilon$.

Das ist erst einmal ein anderer Begriff als in Definition 2.30.

3.11. PROPOSITION. Für jede Teilmenge $A \subset \mathbb{k}$ und jedes $x_0 \in \mathbb{k}$ sind äquivalent:

- (1) Es ist x_0 ein Häufungspunkt von A .
- (2) Es gibt eine Folge in $A \setminus \{x_0\}$, die gegen x_0 konvergiert.
- (3) Für jedes $\varepsilon > 0$ enthält der ε -Ball $B_\varepsilon(x_0)$ um x_0 unendlich viele Elemente von A .

3.12. BEISPIEL. Ob ein Punkt x_0 Häufungspunkt von A ist, hat nichts damit zu tun, ob $x_0 \in A$ gilt.

- (1) Es sei $A = (0, 1)$, dann ist $[0, 1]$ die Menge aller Häufungspunkte von A .
- (2) Die Menge $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist *diskret*, das heißt, sie hat keine Häufungspunkte in \mathbb{R} .

Wenn wir allerdings $\mathbb{N} \subset \overline{\mathbb{R}}$ betrachten, dann würden wir ∞ als Häufungspunkt ansehen, denn es gibt eine Folge $(n)_n$ in \mathbb{N} , die gegen ∞ konvergiert.

3.13. DEFINITION. Es sei $f: A \rightarrow \mathbb{k}$ eine Funktion und $x \in \mathbb{k}$ ein Häufungspunkt von f . Dann hat f an der Stelle x_0 den *Grenzwert* $y_0 \in \mathbb{k}$, kurz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 ,$$

wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in A$ mit $x \neq x_0$ und $|x - x_0| < \delta$ gilt, dass $|f(x) - y_0| < \varepsilon$.

3.14. BEISPIEL. Wir geben hier wieder nur sehr elementare Beispiele.

- (1) Die Funktion $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ ist an der Stelle $x_0 = 1$ nicht definiert. Man überzeugt sich aber leicht, dass

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 .$$

- (2) Die Funktion $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = x/|x|$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ keinen Grenzwert. Wenn wir sie auf $(0, \infty)$ einschränkten, hätte sie bei 0 den Grenzwert 1. Wenn wir sie auf $(-\infty, 0)$ einschränkten, hätte sie bei 0 den Grenzwert -1 .
- (3) Die Funktion f aus Beispiel 3.2 (6) hat nirgends einen Grenzwert (Übung).
- (4) Die Funktion g aus Beispiel 3.2 (6) hat an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ den Grenzwert 0 (Übung).

Im Beweis der folgenden Proposition sehen wir, warum Funktionsgrenzwerte nur bei Häufungspunkten sinnvoll sind.

3.15. PROPOSITION. Es sei $A \subset \mathbb{k}$ eine Teilmenge mit Häufungspunkt $x_0 \in \mathbb{k}$. Wenn eine Funktion f bei x_0 einen Grenzwert hat, dann ist er eindeutig.

3.16. BEMERKUNG. Die Grenzwertbegriffe aus den Definitionen 2.6, 2.24 und 3.13 unterscheiden sich auf den ersten Blick. Es gibt aber Gemeinsamkeiten.

- (1) Es geht stets um Abbildungen, entweder von \mathbb{N} nach \mathbb{k} beziehungsweise $\overline{\mathbb{R}}$, oder von $A \subset \mathbb{k}$ nach \mathbb{k} .

- (2) Wir betrachten den Grenzwert an einem Häufungspunkt x_0 . Bei Folgen fassen wir dazu $x_0 = \infty$ als den einzigen Häufungspunkt von \mathbb{N} auf. „Beliebig nahe bei ∞ “ heißt dann einfach „ $\geq N$ für beliebig große $N \in \mathbb{N}$ “.
- (3) Damit der Wert der Abbildung dem Grenzwert nahe kommt, muss das Argument (bei Folgen also der Index) dem Häufungspunkt x_0 beliebig nahe kommen. Beliebig nahe bei ∞ bedeutet dabei das gleiche wie oben.

Wir lernen in Analysis II einen Formalismus kennen, der das alles vereinheitlicht.

Die folgende Proposition drückt Stetigkeit durch Grenzwerte aus, ganz in Analogie zu Proposition 3.6.

3.17. PROPOSITION. *Es sei $f: A \rightarrow \mathbb{k}$ eine Funktion und $x_0 \in A$.*

- (1) *Wenn x_0 kein Häufungspunkt von A ist, ist f bei x_0 stetig.*
 (2) *Wenn x_0 Häufungspunkt von A ist, ist f genau dann bei $x_0 \in A$ stetig, wenn*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) .$$

3.18. BEMERKUNG. Es seien $A \subset B \subset \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} Teilmengen. Wir nennen $g: B \rightarrow \mathbb{k}$ eine *Fortsetzung* von $f: A \rightarrow \mathbb{k}$ auf B , wenn $g|_A = f$ gilt. Fortsetzungen sind im Allgemeinen nicht eindeutig.

Sei jetzt $f: A \rightarrow \mathbb{k}$ stetig und $x_0 \in \mathbb{k} \setminus A$. Falls x_0 kein Häufungspunkt von A ist, kann man f auf $A \cup \{x_0\}$ wegen Proposition 3.17 (1) beliebig fortsetzen.

Falls x_0 ein Häufungspunkt von A ist, dann folgt aus Proposition 3.17 (2), dass sich eine stetige Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{k}$ genau dann stetig auf $A \cup \{x_0\}$ fortsetzen lässt, wenn f bei x_0 einen Grenzwert besitzt. Für die stetige Fortsetzung $g: A \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{k}$ muss dann gelten:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für alle } x \in A, \text{ und} \\ \lim_{a \rightarrow x_0} f(a) & \text{für } x = x_0. \end{cases}$$

Oft genug schreiben wir für die stetige Fortsetzung später auch wieder f .

3.19. BEISPIEL. Die Funktion f aus Beispiel 3.14 (1) lässt sich auf $x_0 = 1$ durch $f(1) = 2$ stetig fortsetzen. Die Funktion g aus 3.14 (2) besitzt bei $x_0 = 0$ jedoch keine stetige Fortsetzung.

Zu guter Letzt definieren wir noch einseitige Grenzwerte. Dazu brauchen wir allerdings wieder eine Ordnung auf \mathbb{k} , also betrachten wir jetzt nur noch $\mathbb{k} = \mathbb{R}$.

3.20. DEFINITION. Es sei $A \subset \mathbb{R}$, und $f: A \rightarrow \mathbb{k}$ eine Funktion. Für einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ definieren wir den *linksseitigen* und den *rechtsseitigen Grenzwert* bei x_0 durch

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f|_{A \cap (-\infty, x_0)}(x) \quad \text{beziehungsweise} \quad \lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f|_{A \cap (x_0, \infty)}(x) ,$$

vorausgesetzt, dass x_0 ein Häufungspunkt von $A \cap (-\infty, x_0)$ beziehungsweise $A \cap (x_0, \infty)$ ist.

3.21. BEMERKUNG. Falls x_0 Häufungspunkt sowohl von $A \cap (-\infty, x_0)$ als auch von $A \cap (x_0, \infty)$ ist, existiert der Grenzwert einer Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{k}$ genau dann, wenn sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert existieren und beide miteinander übereinstimmen.

Wenn beide einseitigen Grenzwerte bei x_0 existieren, aber nicht übereinstimmen, sagen wir, dass f bei x_0 eine *Sprungstelle* hat.

3.22. BEISPIEL. Wir geben zunächst zwei Funktionen mit einer Sprungstelle bei $x_0 = 0$ an.

- (1) Für die Funktion $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = x/|x|$ gilt

$$\lim_{x \nearrow 0} g(x) = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 0} g(x) = 1 .$$

(2) Für die Heaviside-Funktion $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aus Beispiel 3.2 (5) gilt

$$\lim_{x \nearrow 0} H(x) = 0 \neq H(0) = 1 = \lim_{x \searrow 0} H(x).$$

Man beachte, dass hier der rechtsseitige Grenzwert mit dem Funktionswert übereinstimmt, der linksseitig jedoch nicht.

Sprungstellen sind aber nicht die einzigen Gründe dafür, dass eine gegebene Funktion an einer bestimmten Stelle nicht stetig ist, siehe etwa die Beispiele 3.14 (3) und (4).

3.c. Eigenschaften stetiger Funktionen

14.12.21

In diesem Abschnitt lernen wir den Zwischenwertsatz und den Umkehrsatz kennen. Beide Sätze gelten nur für reelle Funktionen und beruhen auf der Vollständigkeit von \mathbb{R} . Außerdem folgern wir aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß, dass stetige Funktionen auf Kompakta ihr Supremum und ihr Infimum annehmen. Zu guter Letzt überlegen wir, was es heißt, dass eine Folge von Funktionen gegen eine Grenzfunktion konvergiert. Wenn eine solche Folge stetiger Funktionen gleichmäßig konvergiert, dann ist ihre Grenzfunktion wieder stetig. Damit können wir zeigen, dass Potenzreihen stetige Funktionen darstellen.

3.23. SATZ (Zwischenwertsatz). *Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

3.24. FOLGERUNG. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch $\text{im } f$ ein Intervall.*

3.25. FOLGERUNG. *Jedes reelle Polynom von ungeradem Grad hat eine reelle Nullstelle.*

3.26. BEMERKUNG. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und ohne Einschränkung $f(a) < f(b)$. Zu $y \in (f(a), f(b))$ können wir ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = y$ mittels Intervallschachtelung 2.23 bestimmen, indem wir mit dem Intervall $[a_0, b_0] = [a, b]$ starten und für $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ dasjenige der Intervalle $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ und $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$ auswählen, für das $f(a_{n+1}) \leq y \leq f(b_{n+1})$ gilt. Falls wir in einem Schritt Gleichheit erhalten, sind wir fertig. Andernfalls bestimmen wir x durch

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] = \{x\}.$$

Wir kennen den Begriff „Monotonie“ für Folgen aus Definition 2.16.

3.27. DEFINITION. Es sei $A \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *monoton steigend (fallend)*, wenn für alle $x, y \in A$ mit $x < y$ gilt

$$f(y) \geq f(x) \quad \text{beziehungsweise} \quad f(y) \leq f(x).$$

Sie heißt *streng* *monoton steigend (fallend)*, wenn die entsprechende Ungleichung für alle $x < y$ strikt ist.

3.28. SATZ (Umkehrsatz). *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit Bild $J = \text{im } f$. Dann existiert genau dann eine Umkehrfunktion $g: J \rightarrow I \subset \mathbb{R}$ wenn f streng monoton steigt oder fällt. In diesem Fall ist die Umkehrfunktion ebenfalls stetig.*

3.29. BEISPIEL. Die Potenzfunktionen $f_n(x) = x^n$ steigen streng monoton auf $[0, \infty)$ mit Bild $[0, \infty)$, also existiert eine Umkehrfunktion $g_n: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit $g_n(y) = \sqrt[n]{y}$. Falls n ungerade ist, ist f_n sogar auf ganz \mathbb{R} monoton steigend, und wir können $\sqrt[n]{y}$ für alle $y \in \mathbb{R}$ definieren.

Wir wollen die Stetigkeit bei $x_0 = 0$ zur Sicherheit überprüfen. Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben, dann setzen wir $\delta = \varepsilon^n > 0$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ (mit $x \geq 0$ falls n gerade ist) gilt

$$|x - 0| = |x| < \delta = \varepsilon^n \quad \implies \quad \left| \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0} \right| = \sqrt[n]{|x|} < \sqrt[n]{\varepsilon^n} = \varepsilon .$$

Wir müssen zwar mit ε^n ein sehr kleines δ wählen, aber es immer noch positiv, und das reicht für Stetigkeit aus.

3.30. DEFINITION. Es sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf einer beliebigen Menge A . Dann definieren wir das *Supremum* und das *Infimum* von f durch

$$\sup f = \sup_{x \in A} f(x) = \sup \{ f(x) \mid x \in A \} \quad \text{und} \quad \inf f = \inf_{x \in A} f(x) = \inf \{ f(x) \mid x \in A \} .$$

Falls x_{\max} existiert, so dass

$$\sup f = f(x_{\max})$$

heißt $\sup f$ auch das *Maximum von f* und x_{\max} eine *Maximalstelle von f* , und man sagt, dass die Funktion f bei x_{\max} ihr *Maximum annimmt*. Analog spricht man vom *Minimum*, falls eine *Minimalstelle* $x_{\min} \in A$ mit $f(x_{\min}) = \inf f$ existiert.

3.31. BEISPIEL. Die Funktion $f(x) = x^2$ nimmt bei $x = 0$ ihr Minimum an. Wenn wir f auf das Intervall $[-2, 1]$ einschränken, nimmt sie ihr Maximum 4 bei -2 an. Wenn wir sie auf das offene Intervall $(-2, 1)$ einschränken, wird ihr Supremum 4 nicht angenommen.

Wir erinnern uns an Bemerkung 2.34: eine Teilmenge $A \subset \mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} heißt kompakt, wenn jede Folge in A einen Häufungspunkt in A hat. Ein Intervall ist genau dann kompakt, wenn es beschränkt und abgeschlossen ist.

3.32. SATZ. *Es sei $K \subset \mathbb{k}$ kompakt, dann ist jede stetige Funktion $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und nimmt ihr Minimum und ihr Maximum an.*

Wir erinnern uns, dass kompakte Intervalle in den reellen Zahlen gerade Intervalle der Form $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ sind, siehe Bemerkung 2.34.

3.33. FOLGERUNG. *Eine stetige Funktion bildet kompakte Intervalle auf kompakte Intervalle ab.*

Wir betrachten jetzt Folgen von Funktionen. Damit können wir zum Beispiel Potenzreihen besser verstehen.

3.34. DEFINITION. Es sei $A \subset \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} eine Teilmenge und $f, f_n: A \rightarrow \mathbb{k}$ Funktionen für alle $n \in \mathbb{N}$.

(1) Die Folge $(f_n)_n$ konvergiert *punktweise* gegen f , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in A .$$

(2) Die Folge $(f_n)_n$ konvergiert *gleichmäßig* gegen f , wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $x \in A$ und alle $n \geq N$ gilt

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

Mit anderen Worten können wir N bei gleichmäßiger Konvergenz zu gegebenem $\varepsilon > 0$ für alle $x \in A$ auf einmal wählen. Bei punktweiser Konvergenz hingegen kann N durchaus von x abhängen.

3.35. BEISPIEL. Betrachte die Folge von Funktionen $f_n(x) = x^n$ auf $A = [0, 1]$. Sie konvergiert punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1), \text{ und} \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Man beachte, dass die Grenzfunktion offensichtlich nicht stetig ist, obwohl alle f_n stetig sind.

3.36. SATZ. *Es sei $(f_n)_n$ eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen. Dann ist auch die Grenzfunktion stetig.*

3.37. FOLGERUNG. *Jede Potenzreihe stellt im Innern ihres Konvergenzkreises eine stetige Funktion dar.*

3.38. BEMERKUNG. Es sei $A \subset \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} wie oben mit $A \neq \emptyset$, dann definieren wir für Funktionen $f: A \rightarrow \mathbb{k}$ die *Supremumsnorm*

$$\|f\|_{\text{sup}} = \sup |f| = \sup \{ |f(x)| \mid x \in A \} .$$

Sie hat ähnliche Eigenschaften wie der Absolutbetrag, siehe Bemerkungen 2.2 und 2.42. Es seien $f, g: A \rightarrow \mathbb{k}$ und alle $r \in \mathbb{k}$.

(1) *Positivität.*

$$\|f\|_{\text{sup}} \geq 0 \quad \text{und} \quad \|f\|_{\text{sup}} = 0 \quad \iff \quad f = 0 .$$

(2) *Multiplikativität.*

$$\|rf\|_{\text{sup}} = |r| \cdot \|f\|_{\text{sup}} .$$

(3) *Subadditivität.*

$$\|f + g\|_{\text{sup}} \leq \|f\|_{\text{sup}} + \|g\|_{\text{sup}} .$$

Dementsprechend erhalten wir auch einen Abstands begriff $d(f, g) = \|f - g\|_{\text{sup}}$ wie in Bemerkung 2.3.

Es sei jetzt $(f_n)_n$ eine Folge von Funktionen $f_n: A \rightarrow \mathbb{k}$. Sie konvergiert genau dann gleichmäßig gegen $f: A \rightarrow \mathbb{k}$, wenn sie „in der Supremumsmetrik“ konvergiert, das heißt, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\text{sup}} = 0 .$$

3.d. Logarithmus und Winkelfunktionen

Mit den Methoden aus dem letzten Abschnitt wollen wir jetzt die Exponentialfunktion und die Winkelfunktionen besser verstehen. Da diese Funktionen in Abschnitt 2.f durch Potenzreihen definiert wurden, sind sie nach Folgerung 3.37 in Inneren ihres Konvergenzkreises, also laut Beispiel 2.73 auf ganz \mathbb{C} , stetig. Wir betrachten sie im Folgenden allerdings auf \mathbb{R} .

3.39. PROPOSITION. *Die reelle Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton steigend mit Bild $(0, \infty)$.*

Nach dem Umkehrsatz 3.28 existiert also eine stetige Umkehrfunktion.

3.40. DEFINITION (Logarithmus). Die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion heißt (*natürlicher*) *Logarithmus*

$$\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} .$$

3.41. FOLGERUNG. *Der natürliche Logarithmus ist eine stetige, streng monoton wachsende, bijektive Abbildung $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, und für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\log(1) = 0 , \quad \log(e) = 1 \quad \text{und} \quad \log(xy) = \log x + \log y .$$

3.42. DEFINITION. Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$, dann definieren wir die *Potenz* x^y durch

$$x^y = e^{y \log x} .$$

Als Verkettung stetiger Funktionen und Rechenoperationen sind Potenzen x^y sowohl in x als auch in y stetig.

3.43. PROPOSITION (Rechenregeln für Potenzen). Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gilt $x^y > 0$ und

- (1) $x^{y+z} = x^y \cdot x^z$,
- (2) $(xy)^z = x^z \cdot y^z$, falls auch $y > 0$,
- (3) und $(x^y)^z = x^{yz}$.

Im Falle $n \in \mathbb{Z}$ stimmt x^n mit der Potenz aus Bemerkung 1.6 (3) überein, und falls $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, gilt $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

3.44. BEMERKUNG. Wir können ohne weiteres komplexe Exponenten zulassen. Die obigen Rechenregeln bleiben erhalten, wenn wir „ > 0 “ als „reell und > 0 “ interpretieren. Die Basis x dürfen wir leider nicht einfach aus \mathbb{C} wählen, denn wir werden später sehen, dass die Exponentialfunktion auf \mathbb{C} nicht mehr umkehrbar ist.

Da $\exp(1) = e$ gilt, dürfen wir jetzt auch $\exp(z) = \exp(z \log e) = e^z$ schreiben.

Als nächstes wollen wir die Exponentialfunktion für imaginäre Argumente genauer betrachten. Nach Definition der Winkelfunktionen \cos und \sin gilt

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Mit Folgerung 2.79 und den Additionstheoremen 2.80 (2) und (3) erhalten wir erste Eigenschaften.

3.45. PROPOSITION. Die Winkelfunktionen sind stetig und haben folgende Eigenschaften.

- (1) Die Cosinus-Funktion ist gerade und die Sinus-Funktion ungerade, das heißt, für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(-t) = \cos t \quad \text{und} \quad \sin(-t) = -\sin t.$$

- (2) Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \cos s - \cos t &= -2 \sin \frac{s+t}{2} \sin \frac{s-t}{2}, \\ \sin s - \sin t &= 2 \cos \frac{s+t}{2} \sin \frac{s-t}{2}. \end{aligned}$$

3.46. SATZ UND DEFINITION (Kreiszahl π). Die Funktion $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt eine kleinste positive Nullstelle $x_0 \in (0, 2)$, und wir setzen $\pi = 2x_0$.

Somit liegt π zwischen 0 und 4. Das ist nicht sehr genau, soll aber für's erste reichen.

3.47. SATZ (Verhalten der Winkelfunktionen). Die Funktionen \cos und $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ haben folgende Eigenschaften.

- (1) Für alle $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt $\cos t \geq 0$ und $\sin t \geq 0$.
- (2) Die Funktion \cos ist streng monoton fallend und \sin streng monoton steigend auf $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- (3) Es gilt $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ und $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.
- (4) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right), \quad \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t, \quad \text{und} \quad \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t.$$

- (5) Die Funktionen \cos und \sin sind periodisch mit minimaler Periode 2π , das heißt, für eine Zahl $P \in \mathbb{R}$ gilt genau dann $\cos(t + P) = \cos t$ (beziehungsweise $\sin(t + P) = \sin t$) für alle $t \in \mathbb{R}$, wenn P ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist.

Wir kommen noch einmal auf die Polardarstellung komplexer Zahlen aus Bemerkung 2.82 zurück.

3.48. FOLGERUNG. *Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ hat eine Darstellung der Form*

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{mit } r, \varphi \in \mathbb{R} \text{ und } r \geq 0.$$

Falls $z \neq 0$ und wir $\varphi \in (-\pi, \pi]$ verlangen, ist diese Darstellung eindeutig, und wir nennen $\varphi = \arg(z)$ das Argument von z .

Insbesondere lässt sich jede Zahl auf dem Einheitskreis als $e^{i\varphi}$ schreiben, und diese Darstellung ist ebenfalls eindeutig, wenn wir $\varphi \in (-\pi, \pi]$ verlangen.

3.49. FOLGERUNG. *Die komplexe Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist stetig, surjektiv, und $2\pi i$ -periodisch, aber nicht umkehrbar.*

Sei $A \subset \mathbb{C}^\times$. Eine Funktion $\log: A \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\exp \circ \log = \text{id}_A$ nennt man einen *Zweig des komplexen Logarithmus*. Der *Hauptzweig des komplexen Logarithmus* $\text{Log}: \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}$ wird definiert durch

$$\text{Log } z = \log |z| + i \arg z \quad \in \mathbb{R} + i(-\pi, \pi] \subset \mathbb{C}.$$

Er ist unstetig bei $(-\infty, 0) \subset \mathbb{C}^\times$.

Differentialrechnung

In diesem Kapitel geht es um die Ableitung von Funktionen in einer reellen Variablen. Wir definieren den Begriff der Ableitung und benutzen ihn, um das globale Verhalten differenzierbarer Funktionen zu verstehen. Sie kennen das möglicherweise aus der Schule unter dem Namen „Kurvendiskussion“.

Einige interessante Sätze über differenzierbare Funktionen werden wir aber erst im nächsten Kapitel beweisen, da sie mit Methoden aus der Integralrechnung zugänglicher sind. Hierzu gehören etwa der Satz von Taylor über die Approximation von Funktionen durch Polynome, die man mit Hilfe der höheren Ableitungen bildet, oder Sätze über das Vertauschen von Ableitung mit dem Grenzwert einer Funktionenfolge.

4.a. Die Ableitung

Sie kennen die Ableitung aus der Schule als Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen in einem gegebenen Punkt. Die Tangentensteigung erhält man als Grenzwert von Sekantensteigungen, und genauso definieren wir die Ableitung auch hier. Wir können die Ableitung auch benutzen, um Funktionen in der Nähe eines Punktes durch lineare Funktionen zu approximieren. Dieser Standpunkt ist sowohl für die Definition der Ableitung im Mehrdimensionalen (in Analysis II) hilfreich, als auch der einfachste Spezialfall der Taylor-Entwicklung, die wir nächsten Kapitel besprechen.

4.1. DEFINITION. Es sei $A \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in A$ ein Häufungspunkt von A . Eine Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} heißt *differenzierbar an der Stelle x_0* , wenn ihre *Ableitung*

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{k}$$

an der Stelle x_0 existiert. Sie heißt *differenzierbar auf A* , wenn sie für alle $x_0 \in A$ bei x_0 differenzierbar ist. Sie heißt *stetig differenzierbar auf A* , wenn die Ableitung darüberhinaus eine stetige Funktion $f': A \rightarrow \mathbb{k}$ definiert. Die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen auf A bezeichnen wir mit $C^1(A; \mathbb{k})$ oder kurz $C^1(A)$, falls $\mathbb{k} = \mathbb{R}$.

Da wir einen Grenzwert zu bilden haben, müssen wir annehmen, dass x_0 ein Häufungspunkt von A ist. Und da $f(x_0)$ in der Definition vorkommt, muss auch $x_0 \in A$ gelten. Im Folgenden soll die Aussage „ f ist bei x_0 differenzierbar“ diese beiden Voraussetzungen stets implizieren. Man beachte, dass wir $x = x_0$ bei der Definition des Grenzwertes ausgeschlossen haben. Auf diese Weise teilen wir in der obigen Definition nicht durch 0.

Andere Schreibweisen für die Ableitung sind

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

Sie sind vor allem dann hilfreich, wenn f nicht durch einen einzigen Buchstaben, sondern einen komplizierten mathematischen Ausdruck gegeben wird. Außerdem wird aus der Notation klar, welches die unabhängige Variable sein soll, nach der wir ableiten wollen.

Die Stetigkeit der Ableitung wird im Folgenden zunächst keine große Rolle spielen.

4.2. BEISPIEL. Wir leiten einige bekannte Funktionen ab.

- (1) Unter einer linearen Funktion verstehen wir eine Abbildung der Form $f(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{k}$ (in der linearen Algebra würden wir korrekterweise „affin“ statt „linear“ sagen). Für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ folgt

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(ax + b) - (ax_0 + b)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} a = a .$$

- (2) Der reelle Absolutbetrag ist bei $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, denn

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x - 0}{x - 0} = 1 , \quad \text{aber} \quad \lim_{x \nearrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x + 0}{x - 0} = -1 .$$

- (3) Für die Exponentialfunktion berechnen wir zunächst

$$\exp'(x_0) = \left. \frac{de^x}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} .$$

Dabei haben wir im letzten Schritt $x - x_0$ durch h ersetzt; offenbar geht h genau dann gegen 0, wenn x gegen x_0 geht. Mit Hilfe der Exponentialreihe erhalten wir für $h \neq 0$, dass

$$\frac{e^h - 1}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{(k+1)!} .$$

Da dies wieder eine konvergente Potenzreihe in h ist (wie man mit Quotientenkriterium überprüfen kann), erhalten wir an der Stelle 0 den Grenzwert 1. Insgesamt folgt

$$\exp'(x_0) = \exp(x_0) .$$

- (4) Für die Winkelfunktionen berechnen wir mit Proposition 3.45 (2) und einem ähnlichen Trick wie oben (Übung), dass

$$\cos'(x_0) = -\sin(x_0) \quad \text{und} \quad \sin'(x_0) = \cos(x_0) .$$

Wir können die Ableitung von f bei x_0 auch anders charakterisieren.

4.3. PROPOSITION. *Es sei $x_0 \in A$ Häufungspunkt von $A \subset \mathbb{R}$ und $f: A \rightarrow \mathbb{k}$ wie oben. Für $s \in \mathbb{k}$ sind äquivalent:*

- (1) die Funktion f ist differenzierbar bei x_0 mit Ableitung s ;
- (2) die Funktion $x \mapsto g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ lässt sich bei x_0 stetig durch s fortsetzen;
- (3) es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + s(x - x_0))}{|x - x_0|} = 0 .$$

4.4. BEMERKUNG. In (2) bemerken wir, dass die angegebene Funktion außerhalb von x_0 stetig ist, wenn f stetig ist.

Die Aussage (3) bedeutet, dass die lineare Funktion $x \mapsto h(x) = f(x_0) + s(x - x_0)$ die Funktion f bei x_0 von erster Ordnung approximiert. Dabei bezieht sich die „erste Ordnung“ darauf, dass im Nenner $|x - x_0|^1$ steht. Der Graph der Funktion h ist übrigens genau die Tangente an den Graphen der Funktion f bei x_0 , wenn $s = f'(x_0)$.

Zum Vergleich: die Funktion f ist bei x_0 genau dann stetig, wenn sie durch die konstante Funktion $x \mapsto k(x) = f(x_0)$ von nullter Ordnung approximiert wird, das heißt, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{|x - x_0|^0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0 .$$

Um Funktionen von höherer Ordnung zu approximieren, benutzen wir im nächsten Kapitel Taylor-Polynome.

4.5. FOLGERUNG. Wenn $f: A \rightarrow \mathbb{k}$ bei x_0 differenzierbar ist, dann ist f bei x_0 stetig.

4.b. Ableitungsregeln

In diesem Abschnitt betrachten wir die üblichen Ableitungen von Summen, Produkten, Quotienten und Verkettungen von Funktionen. Außerdem überlegen wir uns, wann die Umkehrung einer gegebenen Funktion differenzierbar ist.

Die folgenden Rechenregeln kennen Sie aus der Schule. Wir beweisen sie noch einmal neu, dabei achten wir darauf, nicht mehr Differenzierbarkeit als nötig vorauszusetzen. Es gilt im Folgenden stets „Ableiten vor Grundrechenarten“.

4.6. PROPOSITION. Es seien f und $g: A \rightarrow \mathbb{k}$ bei $x_0 \in A$ differenzierbar. Dann gilt

$$(1) \quad (f + g)'(x_0) = (f' + g')(x_0) ,$$

$$(2) \quad (fg)'(x_0) = (f'g + fg')(x_0)$$

$$(3) \quad \text{und} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'g - fg'}{g^2}(x_0) , \quad \text{falls } g(x_0) \neq 0 .$$

4.7. BEISPIEL. Aus der Produktregel ergibt sich induktiv

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} ,$$

zunächst für $n \in \mathbb{N}$. Mit der Quotientenregel erhalten wir das gleiche Resultat auch für $n \in \mathbb{Z}$. Für Exponenten in \mathbb{R} (oder gar \mathbb{C}) gilt die gleiche Formel, allerdings brauchen wir etwas andere Methoden, um das zu zeigen.

Wichtig ist an dieser Stelle, dass wir Polynome P und rationale Funktionen $\frac{P}{Q}$ allein mit Produkt- und Quotientenregel ableiten können — diese Regeln lassen sich auch in einem algebraischen Kontext formalisieren und haben tatsächlich auch für Polynome und rationale Funktionen über anderen Körpern als \mathbb{Q} , \mathbb{R} oder \mathbb{C} Bedeutung (allerdings nicht in dieser Vorlesung). Tatsächlich sehen wir, dass wir Polynome bereits über \mathbb{Q} ableiten können, da alle relevanten Grenzwerte im Falle von $x_0 \in \mathbb{Q}$ bereits in \mathbb{Q} existieren. Für andere Funktionen von \mathbb{Q} nach \mathbb{Q} muss das nicht gelten.

4.8. SATZ (Kettenregel). Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$, $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ sei bei $x_0 \in A$ differenzierbar mit $\text{im } g \subset B$, und $f: B \rightarrow \mathbb{k}$ sei bei $g(x_0)$ differenzierbar. Dann gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) g'(x_0) .$$

4.9. SATZ. Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ und $f: A \rightarrow B$ sei umkehrbar mit Umkehrfunktion $g: B \rightarrow A$. Falls f bei $x_0 \in A$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$ und g bei $y_0 = f(x_0)$ stetig ist, ist g bei y_0 differenzierbar mit

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

Falls wir schon wissen, dass g bei y_0 differenzierbar ist, können wir die Ableitung mittels der Kettenregel ausrechnen:

$$1 = \frac{dx}{dx} \Big|_{x=x_0} = (g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0) .$$

Aber wir wissen nicht immer, ob die Umkehrfunktion differenzierbar ist, und brauchen daher einen Beweis unabhängig von der Kettenregel.

4.10. BEISPIEL. Wir betrachten einige Umkehrfunktionen.

- (1) Die n -te Wurzel ist die Umkehrfunktion der n -ten Potenz. Aus Beispiel 4.7 folgt für $y > 0$ und $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$, dass

$$\frac{d\sqrt[n]{y}}{dy} = \frac{1}{n x^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{y})^{n-1}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$$

in der Notation aus Abschnitt 3.d. Falls n ungerade ist, funktioniert diese Rechnung auch für $y < 0$. Man vergleiche diese Formel mit der aus Beispiel 4.7.

Bei $x_0 = 0$ hat die n -te Potenz Ableitung 0, falls $n > 1$. Tatsächlich ist $\sqrt[n]{\cdot}$ bei $y_0 = 0$ nicht differenzierbar, denn

$$\lim_{y \searrow 0} \frac{\sqrt[n]{y} - 0}{y - 0} = \lim_{y \searrow 0} y^{\frac{1}{n}-1} = \infty.$$

- (2) Der natürlichen Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Aus Beispiel 4.2 (3) folgt für alle $y > 0$ mit $x = \log y \in \mathbb{R}$, dass

$$\log'(y) = \frac{1}{\exp'(\log y)} = \frac{1}{\exp(\log y)} = \frac{1}{y}.$$

- (3) Wir können jetzt beliebige Potenzen x^z mit $x > 0$ für $z \in \mathbb{C}$ mit der Kettenregel ableiten:

$$\frac{dx^z}{dx} = \frac{de^{z \log x}}{dx} = \frac{de^y}{dy} \Big|_{y=z \log x} \cdot \frac{d(z \log x)}{dx} = e^{z \log x} \cdot z \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{z} x^{z-1}.$$

Diese Ableitungsregel für den natürlichen Logarithmus ist vor allem deswegen interessant, weil $\frac{1}{x} = x^{-1}$ die einzige Potenz x^k von x ist, die wir nicht als Ableitung der Funktion $\frac{1}{k+1} x^{k+1}$ schreiben können.

- (4) Die Sinus-Funktion ist streng monoton steigend auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Wir definieren die Umkehrfunktion, den *Arcus-Sinus*

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

und erhalten mit Beispiel 4.2 (4), dass

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sin'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

denn auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist der Cosinus nicht negativ, so dass $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$.

- (5) Völlig analog definieren wir $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ und erhalten

$$\arccos' y = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

- (6) Zu guter Letzt betrachten wir den Tangens und seine Umkehrfunktion, den Arcus-Tangens

$$\tan = \frac{\sin}{\cos}: \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

und erhalten (Übung)

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad \text{und} \quad \arctan' y = \frac{1}{1+y^2}.$$

Ähnlich wie beim Logarithmus ist auch hier die Ableitung eine rationale Funktion.

4.c. Extrema und Mittelwertsatz

Wenn eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ eine durchschnittliche Steigung s hat, dann hat sie mindestens an einem Punkt Ableitung s . Dieser Satz ermöglicht es, aus der Kenntnis der Ableitungen globale Schlüsse über das Verhalten der Funktion zu ziehen. Ein Beispiel betrifft Monotonie, wie wir sie beim Umkehrsatz bereits gesehen haben. Außerdem lernen wir die Regel von l'Hospital kennen, mit der wir Grenzwerte auch dann berechnen können, wenn wir auf den ersten Blick nur „ $\frac{0}{0}$ “ erhalten.

Wir erinnern uns an die Schreibweise $B_\varepsilon(x_0)$ aus Bemerkung 3.3.

4.11. DEFINITION. Es sei $A \subset \mathbb{k}$. Eine Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt bei $x_0 \in A$ ein *lokales Minimum (lokales Maximum)* an, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$) für alle $x \in B_\varepsilon(x_0) \cap A$ gilt.

Wenn die obige Ungleichung für alle obigen $x \neq x_0$ strikt ist, heißt x_0 ein *striktes* lokales Minimum beziehungsweise Maximum.

Wir fassen Minima und Maxima unter dem Oberbegriff *Extrema* zusammen. „Lokal“ bedeutet, dass die Extremaleigenschaft nur innerhalb von $B_\varepsilon(x_0) \cap A$ zu gelten braucht, ein anderes Wort dafür ist „relativ“. Ein „globales“ (oder „absolutes“) Extremum ist natürlich erst recht ein lokales. Die Umkehrung muss aber nicht gelten, siehe unten.

Wir erinnern uns kurz an Satz 3.32, wonach stetige Funktionen auf Kompakta sogar globale Minima und Maxima haben. Unser erstes Ziel wird es sein, diese Extremstellen zu finden.

Sie kennen aus der Schule vermutlich bereits eine Charakterisierung lokaler Extrema mit Hilfe der Ableitung von f . Sie funktioniert aber nur für beidseitige Häufungspunkte des Definitionsbereichs.

4.12. DEFINITION. Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt *beidseitiger Häufungspunkt* von A , wenn x_0 sowohl Häufungspunkt von $A \cap (-\infty, x_0)$ als auch von $A \cap (x_0, \infty)$ ist.

Es sei $A \subset \mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} eine beliebige Teilmenge. Ein Punkt $x_0 \in A$ heißt *innerer Punkt* von A , wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$B_\varepsilon(x_0) \subset A.$$

Wenn $x_0 \in A$ kein innerer Punkt ist, heißt x_0 ein *Randpunkt* von A .

Im Falle $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ist jeder innere Punkt automatisch beidseitiger Häufungspunkt. In der Praxis werden wir die folgenden Überlegungen meistens auf innere Punkte anwenden.

4.13. PROPOSITION (Charakterisierung lokaler Extrema). *Es sei $A \subset \mathbb{R}$ gegeben und $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ sei an einem beidseitigen Häufungspunkt x_0 von A differenzierbar. Wenn f ein lokales Extremum bei x_0 hat, folgt $f'(x_0) = 0$.*

4.14. BEISPIEL. Wir betrachten drei einfache Beispiele

- (1) Um ein mögliches Extremum einer quadratischen Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

zu finden, betrachten wir die Gleichung

$$0 = f'(x_0) = 2ax_0 + b.$$

Falls $a \neq 0$, gibt es genau eine Lösung $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Um festzustellen, ob ein (lokales) Minimum oder Maximum vorliegt, können wir zum Beispiel mit quadratischer Ergänzung arbeiten:

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Falls $a > 0$ ($a < 0$), liegt ein striktes Minimum (Maximum) vor. Es ist tatsächlich global, da das Ergänzungsargument für alle $x \in \mathbb{R}$ funktioniert.

- (2) Wir betrachten jetzt die kubische Funktion

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1 .$$

Mit Ableiten finden wir ein lokales Maximum bei $x = 0$ und ein lokales Minimum bei $x = 1$. Keine dieser Extremstellen ist global, wie man sich leicht überzeugt.

- (3) Zu guter Letzt betrachte

$$h(x) = x^3 .$$

Der einzige Punkt mit Ableitung $h' = 0$ ist $x = 0$. Dennoch liegt kein lokales Extremum vor.

4.15. BEMERKUNG. Es sei $A \subset \mathbb{R}$ und $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Wenn wir Extremstellen von f bestimmen sollen, erlaubt uns Proposition 4.13, diejenigen beidseitigen Häufungspunkte x von A auszuschließen, an denen f differenzierbar ist mit $f'(x) \neq 0$. Es bleiben also drei Typen von Punkten, die wir einzeln betrachten müssen.

- (1) Alle Punkte von A , die keine beidseitigen Häufungspunkte sind. Bei einem kompakten Intervall $A = [a, b]$ sind das beispielsweise genau die Randpunkte $x = a$ und $x = b$. Die Funktion $f(x) = x$ nimmt bei $x = a$ ihr Minimum und bei $x = b$ ihr Maximum an, obwohl überall $f'(x) = 1 \neq 0$ gilt.
- (2) Alle beidseitigen Häufungspunkte $x_0 \in A$, an denen f nicht differenzierbar (oder möglicherweise nicht einmal stetig) ist. Zum Beispiel nimmt der reelle Absolutbetrag sein Minimum an der Stelle $x_0 = 0$ an, wo er nicht differenzierbar ist. An allen anderen Stellen $x \neq 0$ hat er Ableitung $\text{sign}(x) \neq 0$.
- (3) Alle beidseitigen Häufungspunkte $x_0 \in A$, an denen f differenzierbar ist mit $f'(x_0) = 0$. Solche Punkte heißen auch „kritische Punkte“ von f . Wir kommen in Folgerung 4.20 darauf zurück, wie man bei einem kritischen Punkt herausfinden kann, ob tatsächlich eine Extremum vorliegt.

4.16. SATZ (Mittelwertsatz). *Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$, so dass*

$$(1) \quad f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Sei $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$, so dass

$$(2) \quad (f(b) - f(a)) g'(x_0) = (g(b) - g(a)) f'(x_0) .$$

Der Spezialfall von (1) mit $f(a) = f(b)$ heißt auch „Satz von Rolle“. Sowohl (1) als auch (2) lassen sich auf den Satz von Rolle zurückführen. Die allgemeinere Form (2) benötigen wir unten für die Regel von l'Hospital, siehe Folgerung 4.21.

4.17. FOLGERUNG. *Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Falls $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$, dann existiert $c \in \mathbb{K}$, so dass $g(x) = f(x) + c$ für alle $x \in [a, b]$.*

4.18. BEISPIEL. Der Tangens Hyperbolicus $\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat als Umkehrfunktion den Area Tangens Hyperbolicus $\text{ar tanh}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit Ableitung

$$\text{ar tanh}' x = \frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} \right) .$$

Die gleiche Ableitung hat die Funktion $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2} (\log(1+x) - \log(1-x)) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}.$$

Tatsächlich kann man nachrechnen, dass

$$\tanh\left(\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}\right) = x.$$

Wir erinnern uns an den Monotoniebegriff für reelle Funktionen, wie wir ihn zum Beispiel für den Umkehrsatz gebraucht haben.

4.19. FOLGERUNG. *Es sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist f*

- (1) *genau dann monoton steigend (fallend), wenn $f' \geq 0$ ($f' \leq 0$) auf ganz (a, b) gilt, und*
- (2) *streng monoton steigend (fallend), wenn $f' > 0$ ($f' < 0$) auf ganz (a, b) gilt.*

Die Umkehrung von (2) gilt nicht, wie am Beispiel der streng monoton steigenden Funktion $f(x) = x^3$ mit $f'(0) = 0$ leicht sehen kann.

Punkte, an denen die Ableitung ihr Vorzeichen ändert, sind Extremstellen.

4.20. FOLGERUNG. *Es sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.*

- (1) *Wenn $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ und $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, dann hat f bei x_0 ein lokales Minimum.*
- (2) *Wenn $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ und $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, dann hat f bei x_0 ein lokales Maximum.*
- (3) *Wenn die obigen Ungleichungen strikt sind, hat f bei x_0 ein striktes Minimum beziehungsweise Maximum.*

In keinem der obigen Fälle gilt die Umkehrung — man kann Beispiele von Funktionen konstruieren, deren Ableitung nahe x_0 beliebig oft das Vorzeichen wechselt, und die dennoch bei x_0 ein lokales Minimum oder Maximum haben (Übung).

Aus dem erweiterten Mittelwertsatz ergibt sich die Grundfassung der l'Hospitalschen Regel.

4.21. FOLGERUNG (Regel von l'Hospital). *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ auf (a, b) . Falls*

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} g(x) = 0$$

und $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ für $x \searrow a$ einen Grenzwert hat, gilt

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Die analoge Aussage gilt auch bei b .

Ein einfaches typisches Beispiel für die Regel von l'Hospital ist

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{1} = 1.$$

4.22. BEISPIEL. Es sei $\cot = \frac{\cos}{\sin}: \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ der Kotangens. Wir betrachten

$$\lim_{x \searrow 0} (x \cot x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x}.$$

Die Funktionen $f = \text{id} \cdot \cos$ und $g = \sin$ sind differenzierbar, und

$$\lim_{x \searrow 0} (x \cos x) = 0 = \lim_{x \searrow 0} \sin x,$$

also dürfen wir die Regel von l'Hospital anwenden. Es folgt

$$\lim_{x \searrow 0} (x \cot x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1 \cdot \cos 0 - 0 \cdot \sin 0}{\cos 0} = 1 .$$

Wir erweitern den Begriff des Funktionsgrenzwerts aus Definition 3.13, indem wir zum einen $\pm\infty$ als Grenzwerte zulassen, und zum anderen Grenzwerte bei $\pm\infty$ betrachten. Dabei gehen wir ähnlich vor wie in Abschnitt 2.b.

4.23. DEFINITION. Es sei $A \subset \mathbb{R}$, und „ \pm “ bedeute innerhalb einer Aussage entweder stets „+“ oder stets „-“.

- (1) Wenn für alle $C \in \mathbb{R}$ ein $x \in A$ mit $\pm x > C$ existiert, heißt $\pm\infty$ ein *Häufungspunkt* von A .
- (2) Sei $\pm\infty$ Häufungspunkt von A , dann hat $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bei $\pm\infty$ den *Grenzwert* $y \in \mathbb{R}$, kurz

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = y ,$$

wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $D \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $|f(x) - y| < \varepsilon$ für alle $x \in A$ mit $\pm x > D$.

- (3) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von A , dann hat $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bei x_0 den *Grenzwert* $\pm\infty$, kurz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty ,$$

falls für alle $C > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $\pm f(x) > C$ für alle $x \in A \setminus \{x_0\}$ mit $|x - x_0| < \delta$.

- (4) Analog definiert man

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty ,$$

wobei diesmal alle vier Kombinationen von Vorzeichen möglich sind.

Beachte, dass wir in (2) den Fall $x = \pm\infty$ nicht explizit auszuschließen brauchen, da ohnehin $\pm\infty \notin A$, da $A \subset \mathbb{R}$.

4.24. BEMERKUNG. Wir können die obigen Grenzwerte auf eigentliche Grenzwerte zurückführen, beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a & \iff \lim_{x \searrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = a , \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty & \iff f(x) > 0 \text{ nahe } x_0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0 . \end{aligned}$$

Analog behandeln wir $-\infty$ sowie den Fall, dass f bei $\pm\infty$ den Grenzwert $\pm\infty$ annimmt.

Wir erhalten folgende Varianten der l'Hospitalschen Regel (Übung).

4.25. FOLGERUNG. Es seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, und $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ seien differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ auf (a, b) .

- (1) Die l'Hospitalsche Regel gilt analog bei $a = -\infty$ und bei $b = \infty$.
- (2) Die l'Hospitalsche Regel gilt analog, wenn $\lim_{x \searrow a} f(x) \in \{-\infty, \infty\}$ und $\lim_{x \searrow a} g(x) \in \{-\infty, \infty\}$.

4.d. Höhere Ableitungen

Wenn die Ableitung f' einer Funktion f wieder differenzierbar ist, nennt man ihre Ableitung die zweite Ableitung von f . Induktiv definiert man höhere Ableitungen, falls möglich. Wir wollen uns hier vor allem anschauen, was die zweite Ableitung über Extremstellen und über Konvexität aussagen kann.

Die folgende Definition funktioniert immer dann, wenn jeder Punkt von $A \subset \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von A ist, denn nur dann können wir f' auf ganz A definieren. Solche Mengen nennt man „perfekt“. Reelle Intervalle positiver Länge (also nicht $[a, a]$) sind perfekt, und das soll uns für den Moment reichen.

4.26. DEFINITION. Es sei $A \subset \mathbb{R}$ ein Intervall positiver Länge, und $f: A \rightarrow \mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} eine Funktion. Wir betrachten $f^{(0)} = f$ als „nullte Ableitung“ von f und definieren die k -te Ableitung von f für $k \geq 1$ rekursiv als

$$f^{(k)} = (f^{(k-1)})',$$

falls $f^{(k-1)}$ existiert und differenzierbar ist. Man schreibt $f' = f^{(1)}$, $f'' = f^{(2)}$ und so weiter.

Eine Funktion heißt k -fach differenzierbar, falls $f^{(k)}$ existiert, und k -fach stetig differenzierbar, falls $f^{(k)}$ existiert und stetig ist. Der Raum der k -fach stetig differenzierbaren Funktionen auf A wird mit $C^k(A; \mathbb{k})$ bezeichnet, oder kurz mit $C^k(A)$, falls $\mathbb{k} = \mathbb{R}$.

Wenn $f^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert, heißt f unendlich oft differenzierbar, und wir bezeichnen den Raum all dieser Funktionen mit $C^\infty(A)$.

Da die Schreibweise mit Strichen für höhere k immer unübersichtlicher wird, wird man selten mehr als f'''' in der Literatur finden. Man beachte, dass die ersten $k - 1$ Ableitungen einer k -fach differenzierbaren Funktion automatisch stetig sind. Aus diesem Grund sagen wir auch nur „unendlich oft differenzierbar“ und nicht „unendlich oft stetig differenzierbar“, denn beide Begriffe sind gleichbedeutend. Es gilt

$$C^\infty(A) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(A).$$

4.27. BEMERKUNG. Manchmal muss man die Regel von l'Hospital mehrfach hintereinander anwenden. Seien $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zwei k -fach differenzierbare Funktionen. Wenn beispielsweise für alle $i = 0, \dots, k - 1$ gilt, dass

$$\lim_{x \searrow x_0} f^{(i)}(x) = 0 = \lim_{x \searrow x_0} g^{(i)}(x)$$

und $g^{(i+1)}(x) \neq 0$ für alle $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, dann ergibt sich durch k -faches Anwenden der Regel von l'Hospital, dass

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)},$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert. Ein ähnlicher Fall kam in den Übungen bereits vor.

4.28. BEMERKUNG. Es sei $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit einer Nullstelle bei $x_0 \in (a, b)$, und g sei bei x_0 differenzierbar.

- (1) Wenn $g'(x_0) > 0$, dann hat g bei x_0 einen *Vorzeichenwechsel* von negativ nach positiv, das heißt, es existiert $\varepsilon > 0$ so dass

$$f|_{(x_0-\varepsilon, x_0)} < 0 \quad \text{und} \quad f|_{(x_0, x_0+\varepsilon)} > 0.$$

- (2) Wenn $g'(x_0) < 0$, dann hat g bei x_0 einen *Vorzeichenwechsel* von positiv nach negativ.
 (3) Wenn $g'(x_0) = 0$ gilt, ist keine derartige Aussage möglich. Als Beispiel betrachte die Funktionen $x \mapsto \pm x^2$ und $x \mapsto \pm x^3$ bei $x_0 = 0$.

Wir wenden diese Überlegung auf die erste Ableitung einer Funktion f an einem kritischen Punkt x_0 an; nach Bemerkung 4.15 (3) ist das ein Punkt mit $f'(x_0) = 0$. Dabei benutzen wir Folgerung 4.20.

4.29. PROPOSITION. Es sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zweifach differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

- (1) Wenn $f''(x_0) > 0$, hat f bei x_0 ein lokales Minimum.
- (2) Wenn $f''(x_0) < 0$, hat f bei x_0 ein lokales Maximum.

Im Fall $f''(x_0) = 0$ ist wieder keine derartige Aussage möglich. Später lernen wir, wie wir mit Hilfe höherer Ableitungen eventuell doch noch zeigen können, dass eine Extremstelle vorliegt.

4.30. DEFINITION. Es sei I ein Intervall. Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *konvex* (*konkav*), falls für alle $x, y, z \in I$ mit $x < z < y$ gilt, dass

$$f(z) \leq \frac{y-z}{y-x} f(x) + \frac{z-x}{y-x} f(y) \quad \text{beziehungsweise} \quad f(z) \geq \frac{y-z}{y-x} f(x) + \frac{z-x}{y-x} f(y).$$

Sie heißt *strikt konvex* (*konkav*), wenn die obige Ungleichung für alle $x < z < y$ strikt ist.

Ein einfaches Beispiel ist die quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ falls $a \geq 0$. Sie ist strikt konvex, falls $a > 0$.

4.31. BEMERKUNG. Wir setzen $t = \frac{y-z}{y-x} \in (0, 1)$, dann gilt $1-t = \frac{z-x}{y-x}$ und $z = tx + (1-t)y$, und

$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y) \quad \text{für alle } x, y \in I \text{ und alle } t \in (0, 1)$$

ist eine äquivalente Umformulierung der Konvexitätsbedingung. Die Abbildung

$$t \longmapsto t(x, f(x)) + (1-t)(y, f(y))$$

beschreibt gerade die Sekante durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$. Also ist eine Funktion genau dann konvex, wenn ihr Graph zwischen je zwei Punkten stets unterhalb oder auf der Sekante durch diese Punkte bleibt. Mit anderen Worten bilden die Punkte oberhalb des Graphen eine konvexe Teilmenge der Ebene \mathbb{R}^2 . Im Falle einer konkaven Funktionen bilden die Punkte unterhalb des Graphen eine konvexe Menge. Den Punkt $t(x, f(x)) + (1-t)(y, f(y))$ nennt man eine *Konvexkombination* von $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ für alle $t \in (0, 1)$.

Konvexe Funktionen sind unter anderem deswegen interessant, weil sich ihre Extremstellen einfach beschreiben lassen.

4.32. PROPOSITION. Es sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt:

- (1) Jedes lokale Minimum von f ist global. Wenn f strikt konvex ist, gibt es höchstens eine Minimalstelle.
- (2) Wenn f ein lokales Maximum bei $z \in (a, b)$ hat, dann ist f auf einer Umgebung von z konstant. Wenn f strikt konvex ist, hat f kein lokales Maximum.

Der folgende Satz ist analog zur Folgerung 4.19 über den Zusammenhang zwischen Monotonie und dem Vorzeichen der ersten Ableitung. Da Konvexität ein wichtiger Begriff ist und nicht alle konvexen Funktionen differenzierbar sind, geben wir verschiedene Kriterien. Sie werden umso einfacher, je mehr Ableitungen existieren.

4.33. SATZ (Charakterisierung konvexer Funktionen). Es sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

- (1) die Funktion f ist konvex,
- (2) für alle $x \in (a, b)$ steigt die folgende Funktion monoton:

$$g_x: (a, b) \setminus \{x\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad g_x(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Wenn f differenzierbar ist, sind ebenfalls äquivalent:

(3) Für alle $x, y \in (a, b)$ gilt

$$f(y) \geq f(x) + (y - x) f'(x) .$$

(4) Die Funktion $f': (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ steigt monoton.

Wenn f zweifach differenzierbar ist, ist außerdem äquivalent

(5) $f'' \geq 0$.

Aus $f'' > 0$ in (5) folgt, dass f' in (4) streng monoton steigt. Und wenn f' streng monoton steigt, dann ist f strikt konvex.

4.34. BEMERKUNG. Konvexe Funktionen müssen nicht differenzierbar sein, als Beispiel betrachte den Absolutbetrag $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aus (2) folgt aber, dass die *einseitigen Ableitungen*

$$f'^-(x) = \lim_{y \nearrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \nearrow x} g_x(y)$$

und

$$f'^+(x) = \lim_{y \searrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \searrow x} g_x(y)$$

an jeder Stelle $x \in (a, b)$ existieren. Das reicht, um wie in Folgerung 4.5 zu schließen, dass f an jeder Stelle $x_0 \in (a, b)$ stetig ist. Genauer gesagt gilt

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) ,$$

und somit ist f nach Bemerkung 3.21 und Proposition 3.17 (2) stetig bei x_0 . Außerdem gilt

$$f'^-(x_0) \leq f'^+(x_0) \quad \text{und} \quad f'^+(x_0) \leq f'^-(x_1) \quad \text{falls } x_0 < x_1 .$$

Als Anwendung von Konvexität beweisen wir die folgende Ungleichung.

4.35. SATZ (Youngsche Ungleichung). *Es seien $p, q > 1$ gegeben, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $x, y \geq 0$, dass*

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} x^q .$$

4.36. FOLGERUNG (Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel). *Für alle $x, y \geq 0$ gilt*

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2} .$$

Beide Ungleichungen lassen sich induktiv auf mehr als zwei Zahlen ausdehnen (Übung).

Integralrechnung

19.1.22

Das Integral einer Funktion beschreibt auf der einen Seite den Flächeninhalt unter dem Funktionsgraphen. Auf der anderen Seite ist Integration nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in gewisser Weise die „Umkehroperation“ der Ableitung. Beide Aspekte werden wir kennenlernen. Wir können dann auch einige Sätze über differenzierbare Funktionen und ihre Ableitungen nachtragen, die wir schon im letzten Kapitel hätten beweisen können.

5.a. Das Riemann-Integral

Wir wollen den Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Funktionsgraph, der x -Achse, und zwei vertikalen Geraden durch die Punkte $x = a$ und $x = b$ bestimmen, sofern das möglich ist. Dabei zählen wir Flächenstücke oberhalb der x -Achse positiv und unterhalb der x -Achse negativ, jedenfalls, wenn $a < b$. Wir nehmen als, dass für ein Rechteck der Flächeninhalt gerade das Produkt der Seitenlängen ist. Und wir nehmen an, dass eine Vereinigung von Rechtecken, die sich höchstens entlang von Strecken überlappen, als Flächeninhalt die Summe der Flächeninhalte der einzelnen Rechtecke hat. Mit diesen Grundannahmen führen uns die folgenden Vorüberlegungen zur Definition des Riemann-Darboux-Integrals.

- (1) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a = x_0 < \dots < x_n = b$. Falls eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist, so dass $f|_{(x_{i-1}, x_i)}$ konstant mit Wert y_i ist, sollte der gesuchte Flächeninhalt den Wert

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) y_i$$

haben. Das bedeutet insbesondere, dass es auf die Werte von f an den endlich vielen Stellen x_i nicht ankommt. Solche Funktionen nennen wir *Treppenfunktionen*.

- (2) Gegeben zwei Funktionen $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \leq g$, denen wir einen Flächeninhalt zuordnen können. Dann sollte der Flächeninhalt zu f nicht größer sein als der zu g .

Die folgende Definition stimmt nicht ganz mit der von Bernhard Riemann (1854) überein, sondern benutzt die Gaston Darboux zugeschriebene Methode der Unter- und Obersummen.

5.1. DEFINITION. Es sei $a \leq b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann definieren wir das *untere* und das *obere Riemann-Darboux-Integral* von f über $[a, b]$ durch

$$\int_a^b f(x) dx = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{(x_{i-1}, x_i)} f \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } a = x_0 < \dots < x_n = b \right\},$$

und

$$\overline{\int}_a^b f(x) dx = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{(x_{i-1}, x_i)} f \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } a = x_0 < \dots < x_n = b \right\}.$$

Wir nennen f (*Riemann-*) *integrierbar* über $[a, b]$ mit (*Riemann-*) *Integral*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \overline{\int}_a^b f(x) dx,$$

wenn unteres und oberes Riemann-Darboux-Integral übereinstimmen.

Man nennt $a = x_0 < \dots < x_n = b$ eine *Zerlegung* des Intervalls $[a, b]$, und die Summen in den Mengendefinitionen auf der rechten Seite die zugehörigen *Unter-* und *Obersummen*. Dabei schreiben wir kurz $\inf_A f$ für $\inf_{x \in A} f(x)$, und analog $\sup_A f$. Nach Vorüberlegung ist keine Untersumme größer und keine Obersumme kleiner als der gesuchte Flächeninhalt. Vor allem aber ist keine Untersumme größer als eine Obersumme. Wenn eine Funktion integrierbar ist, heißt das also, dass man den gesuchten Flächeninhalt sowohl von unten als auch von oben durch die Inhalte bekannter geometrischer „Figuren“ (nämlich Vereinigungen von achsenparallelen Rechtecken) beliebig gut approximieren kann.

Wir setzen f als beschränkt voraus. Wäre f etwa nach oben unbeschränkt, so wäre jede Obersumme ∞ , die Untersummen jedoch nicht. Also hätte eine unbeschränkte Funktion nach der obigen Definition keine Chance, integrierbar zu sein. Wir werden später „uneigentliche Integrale“ einführen, um dieses Problem zu lösen.

Die Notation für Integrale ist etwas umständlich. Unten und oben am Integralzeichen stehen die *untere* und die *obere Integralgrenze*. Es folgt ein Ausdruck, der *Integrand*, der unter anderem die *Integrationsvariable* enthalten kann. Welche das ist, wird hinter dem „ d “ angegeben — hier also „ x “. Zusammen nennt man dx auch das *Längenelement*. Physiker behandeln das Paar aus Integralzeichen und Längenelement gern wie ein Paar Klammern, so dass dazwischen beispielsweise auch Plus- oder Minuszeichen stehen dürften. In der Mathematik bindet das Integralzeichen so stark wie Multiplikation. Wenn wir also im Integranden eine Summe oder Differenz stehen haben, müssen wir ein zusätzliches Paar Klammern setzen.

5.2. BEISPIEL. Später werden wir fast alle Integrale, die wir überhaupt explizit angeben können, mit Hilfe des Hauptsatzes ausrechnen. Daher hier ein einfaches und zwei etwas unangenehme Beispiele.

- (1) Es sei $f(x) = rx + s$ mit $r, s \in \mathbb{R}$. Der Einfachheit halber gelte $r \geq 0$. Es sei $a < b$ mit $d = b - a > 0$. Der Einfachheit halber betrachten wir nur Zerlegungen mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ($n \neq 0$ gilt automatisch, wenn $b > a$) und $x_i = a + \frac{di}{n}$. Die zugehörigen Unter- und Obersummen berechnen wir als arithmetische Summen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{(x_{i-1}, x_i)} f &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{n} \left(r \left(a + \frac{d(i-1)}{n} \right) + s \right) \\ &= \frac{d}{n} \cdot \frac{n}{2} \left(r \left(a + b - \frac{d}{n} \right) + 2s \right) = \frac{b^2 - a^2 - d^2/n}{2} r + (b-a)s, \\ \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{(x_{i-1}, x_i)} f &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{n} \left(r \left(a + \frac{di}{n} \right) + s \right) \\ &= \frac{d}{n} \cdot \frac{n}{2} \left(r \left(a + \frac{d}{n} + b \right) + 2s \right) = \frac{b^2 - a^2 + d^2/n}{2} r + (b-a)s. \end{aligned}$$

Im Limes $n \rightarrow \infty$ streben Unter- und Obersumme den gleichen Grenzwert

$$\frac{b^2 - a^2}{2} r + (b-a)s.$$

Nach Definition folgt mit unser Wahl der Zerlegungen bereits

$$\begin{aligned} \frac{b^2 - a^2}{2} r + (b - a)s &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{(x_{i-1}, x_i)} f \leq \int_a^b f(x) dx \\ &\leq \int_a^b f(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{(x_{i-1}, x_i)} f = \frac{b^2 - a^2}{2} r + (b - a)s . \end{aligned}$$

Somit gilt in der obigen Abschätzung überall Gleichheit. Also haben wir gezeigt, dass f Riemann-integrierbar ist, und den Wert des Integrals erfolgreich ausgerechnet.

- (2) Die Funktion f aus Beispiel 3.2 (6) ist nicht Riemann-integrierbar über $[a, b]$ falls $a < b$, denn auf jedem Intervall positiver Länge hat sie Infimum 0 und Supremum 1. Wir erhalten daher

$$\int_a^b f(x) dx = 0 < b - a = \int_a^b f(x) dx .$$

In Analysis 3 betrachten wir stattdessen das Lebesgue-Integral. Dann werden wir argumentieren, dass das Lebesgue-Integral definiert ist und verschwindet, da die Funktion nur an „wenigen“ — nämlich abzählbar vielen — Stellen nicht den Wert 0 hat.

- (3) Die Funktion g aus Beispiel 3.2 (6) ist Riemann-integrierbar (Übung).

Wir tragen zunächst einmal einige wichtige Eigenschaften des Riemann-Integrals zusammen. Dazu gehören insbesondere das Integral von Treppenfunktionen (1) und die Monotonie (2) aus unseren Vorüberlegungen.

5.3. PROPOSITION (Linearität). *Die Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[a, b]$ bilden einen Untervektorraum des Vektorraums aller Funktionen, und das Integral ist linear. Das heißt: wenn f und $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar sind und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dann ist $\lambda f + \mu g$ ebenfalls integrierbar mit*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx .$$

5.4. PROPOSITION (Additivität). *Es seien $a < b < c$, und es sei $f: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Dann ist f genau dann über $[a, c]$ integrierbar, wenn f über $[a, b]$ und über $[b, c]$ integrierbar ist, und es gilt*

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx .$$

Wir kommen zu den zwei Eigenschaften aus der Vorüberlegung.

5.5. PROPOSITION (Treppenfunktionen). *Es sei $n \in \mathbb{N}$, $a = x_0 < \dots < x_n = b$ und $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben mit $f|_{(x_{i-1}, x_i)} = y_i$ für $i = 1, \dots, n$. Dann ist f integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) y_i .$$

5.6. PROPOSITION (Monotonie). *Es seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen mit $f \leq g$ auf ganz $[a, b]$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx .$$

Den Gleichheitsfall für stetige Integranden betrachten wir in Proposition 5.16 (1).

Für eine Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir den Absolutbetrag $|f| = |\cdot| \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$, das heißt

$$|f|(x) = |f(x)| \quad \text{für alle } x \in A .$$

5.7. PROPOSITION. *Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist auch $|f|: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, und es gilt*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx .$$

Wir schauen uns den Gleichheitsfall für stetige Integranden in dieser und der folgenden Abschätzung in Propositionen 5.16 (2)–(4) an.

Wir erinnern uns an die Supremumsnorm aus Bemerkung 3.38. Mit Monotonie ergibt sich eine Abschätzung für Integrale, die wir recht häufig benutzen werden.

5.8. FOLGERUNG (Fundamentale Abschätzung). *Für alle integrierbaren Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b - a) \|f\|_{\text{sup}} .$$

Als nächstes benötigen wir den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz aus Definition 3.34 (2); das ist der Konvergenzbegriff, der auf natürliche Weise zur Supremumsnorm gehört, siehe wieder Bemerkung 3.38. Das folgende Beispiel zeigt, dass punktweise Konvergenz nicht ausreicht, damit auch die Integrale von Funktionen konvergieren.

5.9. BEISPIEL. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definiere $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{falls } 0 < x < \frac{1}{n}, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } x = 0 \text{ oder } x \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Dann konvergiert f_n punktweise gegen die konstante Funktion $g \equiv 0$. Nach Proposition 5.5 gilt

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1, \quad \text{aber} \quad \int_0^1 f(x) dx = 0 .$$

5.10. PROPOSITION (Stetigkeit). *Es sei $(f_n)_n$ eine Folge integrierbarer Funktionen $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn f_n gleichmäßig gegen eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert, dann ist auch f integrierbar mit*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx .$$

Das heißt, das Integral vertauscht mit Grenzwerten von (gleichmäßig konvergenten) Funktionenfolgen. „Stetigkeit des Integrals“ können wir also im Sinne von Proposition 3.6 verstehen.

5.b. Das Integral stetiger Funktionen

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass stetige Funktionen auf kompakten Intervallen Riemann-integrierbar sind. Zum Schluss beweisen wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

5.11. DEFINITION. Es sei $A \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} heißt *gleichmäßig stetig*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in A$ gilt

$$\|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon .$$

Der Unterschied zu Definition 3.1 besteht darin, dass δ hier nur von ε , aber nicht von x (damals: x_0) abhängen darf. Wir erinnern uns an Kompaktheit und daran, dass abgeschlossene Intervalle $[a, b]$ kompakt sind, siehe Bemerkung 2.34.

5.12. SATZ. *Es sei $f: A \rightarrow \mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} stetig und $A \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

5.13. BEISPIEL. Kompaktheit ist unerlässlich. Dazu betrachte die Funktion $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \cos \frac{1}{x} .$$

5.14. SATZ. *Gleichmäßig stetige Funktionen auf einem beschränkten Intervall lassen sich gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximieren.*

5.15. FOLGERUNG. *Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} stetig. Dann ist f integrierbar.*

Wir betrachten Gleichheit in den Abschätzungen 5.6–5.8; Stetigkeit ist dabei unerlässlich.

5.16. PROPOSITION. *Es sei $a < b$, und $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig mit $f \leq g$.*

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx && \iff && f = g , \\ (2) \quad & \left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b |f(x)| dx && \iff && f \geq 0 \text{ oder } f \leq 0 , \\ (3) \quad & \int_a^b |f(x)| dx = (b - a) \|f\|_{\text{sup}} && \iff && f \equiv c \in \mathbb{R} \text{ konstant.} \\ (4) \quad & \left| \int_a^b f(x) dx \right| = (b - a) \|f\|_{\text{sup}} && \iff && f \equiv c \in \mathbb{R} \text{ konstant.} \end{aligned}$$

Der folgende Satz ist eine unmittelbare Konsequenz aus dem Zwischenwertsatz 3.23 und der Monotonie des Integrals. 26.1.22

5.17. SATZ (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Es seien $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert eine Zwischenstelle $x_1 \in (a, b)$, so dass*

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx = f(x_1) (b - a) .$$

Sei außerdem $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g \geq 0$. Dann existiert eine Zwischenstelle $x_2 \in (a, b)$, so dass

$$(2) \quad \int_a^b (fg)(x) dx = f(x_2) \int_a^b g(x) dx .$$

5.18. BEMERKUNG. Wir machen uns ein paar Gedanken zu diesem Satz.

(1) Stetigkeit von f ist unerlässlich, wie das Beispiel $f = \text{sign}$ zu (1) zeigt:

$$\int_{-1}^2 \text{sign}(x) dx = 1 \neq \text{sign}(x_1) \cdot 3 ,$$

denn sign nimmt an keiner Stelle den Wert $\frac{1}{3}$ an.

(2) Wir können die Funktion g in der allgemeinen Fassung (2) als eine Art „Gewichtsfunktion“ auffassen. Das heißt, dass die Werte von f in Abhängigkeit von x mit dem Gewicht $g(x)$ in das Integral eingehen.

(3) Wir brauchen $g \geq 0$, denn es existiert kein $x_2 \in [-1, 1]$ mit

$$0 < \int_{-1}^1 x \cdot x dx = x_2 \int_{-1}^1 x dx = x_2 \cdot 0 .$$

(4) Es würde reichen, g als integrierbar anzunehmen. Dann ist fg ebenfalls integrierbar und der Satz gilt nach wie vor.

5.c. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wir zeigen, dass Ableiten und Integrieren zueinander nahezu inverse Operationen sind. Das erlaubt uns auch, aus den bekannten Ableitungsregeln Integrationstechniken herzuleiten.

Bislang haben wir nur Integrale \int_a^b mit $a < b$ betrachtet. Die Additivität 5.4 des Integrals legt eine Konvention nahe, mit der wir Integrale für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ betrachten können, nämlich

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \quad \text{falls } a = b, \text{ und}$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{falls } a > b.$$

5.19. SATZ (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $x_0 \in I$. Dann ist die Funktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$(1) \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt ,$$

auf ganz I differenzierbar mit Ableitung

$$(2) \quad F' = f .$$

In Bemerkung 5.32 verallgemeinern wir den Hauptsatz auf eine etwas größere Klasse von Funktionen f , die unbeschränkt und an einzelnen Punkten unstetig sein dürfen.

5.20. BEMERKUNG. Man nennt $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ wie in (2) eine *Stammfunktion* von f . Nach Folgerung 4.17 ist F bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Dabei kann es für F eine Darstellung in der Form (1) geben, muss es aber nicht (beachte: aus (1) folgt $F(x_0) = 0$, also hat F dann eine Nullstelle in I).

Die Menge aller Stammfunktionen von $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bildet das *unbestimmte Integral*

$$\int f(x) dx .$$

Es heißt „unbestimmt“, da wir keine Integrationsgrenzen angeben. Wir schreiben gern

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} ,$$

aber das ist eigentlich falsch, denn wir benutzen x links als Integrationsvariable, während es rechts ja eigentlich für die obere Grenze steht. Außerdem schreiben wir „=“ anstelle von „ \ni “. Da das unbestimmte Integral eben nur bis auf eine additive Konstante eindeutig ist, dürfen wir aus $\int f(x) dx = F_1$ und $\int f(x) dx = F_2$ also keinesfalls $F_1 = F_2$ schließen!

5.21. FOLGERUNG. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $[a, b] \subset I$ und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit Stammfunktion F . Dann gilt*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

Für die rechte Seite führen wir die Notation $F(x)|_{x=a}^b$ ein.

5.22. BEISPIEL. Mit den Überlegungen aus Kapitel 4 erhalten wir Stammfunktionen für einige bekannte Funktionen.

- (1) Es sei $s \neq -1$, dann ist $\frac{1}{s+1} x^{s+1}$ eine Stammfunktion von x^s auf dem Intervall $(0, \infty)$, siehe Beispiel 4.10 (3). Falls $s \in \mathbb{N}$ natürlich ist, erhalten wir die obige Stammfunktion sogar auf ganz \mathbb{R} , siehe Beispiel 4.7. Für $s \in \mathbb{Z}$ gilt die obige Formel analog auch auf $(-\infty, 0)$.

- (2) Eine Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ auf $(0, \infty)$ ist der Logarithmus \log nach Beispiel 4.10 (2). Für negative x erhalten wir ebenfalls eine Stammfunktion, nämlich $x \mapsto \log(-x)$. Daher liest man manchmal, $\log|\cdot|$ sei die Stammfunktion von $\frac{1}{x}$. Das ist aber etwas ungenau, da $\log|\cdot|$ nicht auf einem Intervall definiert ist und somit Überlegungen wie in Folgerung 4.17 nicht greifen.
- (3) Weitere Stammfunktionen ergeben sich aus den Beispielen 4.2 und 4.10 und aus den Übungen. Wir benutzen die etwas ungenaue Notation aus Bemerkung 5.20 und schreiben kurz

$$\int e^x dx = e^x, \quad \int \cos x dx = \sin x, \quad \int \sin x dx = -\cos x,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \quad \text{auf } (-1, 1), \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x.$$

Wir erinnern uns an rationale Funktionen aus Bemerkung 3.9. Die folgende Proposition ist eine Folgerung aus dem Fundamentalsatz der Algebra und einigen Resultaten aus der Algebra wie beispielsweise dem Euklidischen Algorithmus und der Charakterisierung des größten gemeinsamen Teilers. Wir geben daher keinen vollständigen Beweis.

5.23. PROPOSITION (Partialbruchzerlegung). *Es sei $f = \frac{P}{Q}$ eine rationale Funktion, und es sei*

$$Q(X) = \prod_{i=1}^k (X - x_i)^{n_i} \cdot \prod_{i=1}^{\ell} (X + p_i X + q_i)^{m_i}$$

eine Zerlegung von Q in Primfaktoren, insbesondere gelte $p_i^2 < 4q_i$ für $i = 1, \dots, \ell$. Dann existieren ein Polynom R und Zahlen $a_{i,j}$ für $i = 1, \dots, k$ und $j = 1, \dots, n_i$ sowie $b_{i,j}, c_{i,j}$ für $i = 1, \dots, \ell$ und $j = 1, \dots, m_i$, so dass

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = R(X) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{i,j}}{(X - x_i)^j} + \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{b_{i,j}X + c_{i,j}}{(X + p_i X + q_i)^j}.$$

Die einzelnen Summanden (bis auf R) in der obigen Formel heißen *Partialbrüche*, und die rechte Seite heißt die *Partialbruchzerlegung* von f . Sie ist (bis auf die Reihenfolge der Summanden) eindeutig.

5.24. BEISPIEL. Die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right)$$

haben wir in Beispiel 4.18 kennengelernt. Ganz analog dazu gilt

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} \right).$$

Auf der anderen Seite sind $\frac{1}{x^2+1}$ und $\frac{x}{x^2+1}$ bereits vollständig zerlegt, da für den Nenner $p = 0$ und $q = 1$ und somit $p^2 < 4q$ gilt.

5.25. BEMERKUNG. Wir können zu jedem obigen Summanden eine Stammfunktion angeben. Dazu schränken wir $\frac{P}{Q}$ zunächst auf ein Intervall ein, das keinen der Punkte x_1, \dots, x_k enthält. Für $n \geq 2$ gilt

$$\int \frac{dx}{x - c} = \log|x - c| \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{(x - c)^n} = -\frac{1}{(n - 1)(x - c)^{n-1}}.$$

Für die Summanden der Form $\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^n}$ mit $p^2 < 4q$ können wir rekursiv Stammfunktionen als Linearkombinationen aus Funktionen der Form

$$\log(x^2 + px + q), \quad \arctan(rx + s) \quad \text{und} \quad \frac{tx + u}{(x^2 + px + q)^{n-1}}$$

finden (Übung). Aus Proposition 5.23 folgt also, dass man Integrale über rationale Funktionen explizit ausrechnen kann.

1.2.22

Aus der Kettenregel 4.8 ergibt sich mit dem Hauptsatz die Substitutionsregel. Wir formulieren sie hier für bestimmte Integrale. Die Fassung für unbestimmte Integrale betrachten wir anschließend in einem Beispiel.

5.26. PROPOSITION (Substitutionsregel). *Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $f: \text{im } g \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt*

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt .$$

Es reicht, wenn f integrierbar ist. Wir verlangen der Einfachheit hier zusätzlich, dass f stetig ist. Manchmal braucht man ein geübtes Auge, um zu sehen, dass man die Substitutionsregel anwenden kann.

5.27. BEISPIEL. Ein interessanter Spezialfall ist die sogenannte *logarithmische Ableitung*

$$\frac{d}{dx}(\log g) = \frac{g'}{g} .$$

Die Substitutionsregel (mit $f(x) = \frac{1}{x}$) impliziert

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log g(x) .$$

Als konkretes Beispiel berechnen wir

$$\int \tan x dx = - \int \frac{\cos' x}{\cos x} dx = - \log \cos x .$$

Die Version für bestimmte Integrale erhalten wir, indem wir bei jedem Integralzeichen die Unter- und Obergrenze dazuschreiben, und für jede Stammfunktion den Wert an der unteren von dem Wert an der oberen Grenze abziehen, beispielsweise mit der Notation $\Big|_{x=a}^b$.

Genauso kombinieren wir die Produktregel 4.6 (2) mit dem Hauptsatz.

5.28. PROPOSITION (Partielle Integration). *Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit Stammfunktion F , und $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_a^b (fg)(x) dx = (Fg)(x) \Big|_{x=a}^b - \int_a^b (Fg')(x) dx$$

Der Name „partielle Integration“ kommt daher, dass man nur einen Teil des Produkts integriert, und dafür einen Korrekturterm bekommt, bei dem der andere Faktor (hier g) abgeleitet wird.

5.29. BEISPIEL. Im nächsten Beispiel setzen wir $f = 1$ und $F(x) = x$. Dann erhalten wir

$$\int \log x dx = x \log x - \int x \frac{dx}{x} = x(\log x - 1) .$$

Für Umkehrfunktionen im Allgemeinen gibt es auch eine Integrationsregel, die man aus der Substitutionsregel herleiten kann (Übung). Die folgende Definition hätten wir schon früher machen können. Aber mit Hilfe des Hauptsatzes ist es leichter, Beispiele zu finden.

5.30. DEFINITION. Es sei $[a, b) \subset \mathbb{R}$ ein halboffenes Intervall mit $a < b \leq \infty$ und $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir nennen f *einfach uneigentlich integrierbar*, wenn $f|_{[a, c]}$ für alle $a < c < b$ integrierbar ist und das *uneigentliche Integral*

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x) dx \in \mathbb{R}$$

existiert. Analog definieren wir das einfache uneigentliche Integral über Intervalle der Form $(a, b]$ mit $-\infty \leq a < b$. Eine Funktion $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt einfach uneigentlich integrierbar, wenn es ein $c \in (a, b)$ gibt, so dass das folgende uneigentliche Integral in \mathbb{R} existiert:

$$(2) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx .$$

Seien schließlich $a = x_0 < \dots < x_n = b$, so dass f auf jedem Intervall (x_{i-1}, x_i) einfach uneigentlich integrierbar ist. Dann heißt f *uneigentlich integrierbar* mit *uneigentlichem Integral*

$$(3) \quad \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx .$$

5.31. BEISPIEL. Wir haben alle bekannten Integrationstechniken zur Verfügung, bevor wir zum Grenzwert übergehen. Deshalb finden wir jetzt recht leicht Beispiele und Gegenbeispiele.

- (1) Sei $s \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^{-s}$ ist genau dann uneigentlich integrierbar, wenn $s > 1$. In diesem Fall gilt

$$\int_1^\infty x^{-s} dx = \frac{1}{s-1} .$$

- (2) Auf $(0, 1]$ ist die obige Funktion genau dann uneigentlich integrierbar, wenn $s < 1$. In diesem Fall gilt

$$\int_0^1 x^{-s} dx = \frac{1}{1-s} .$$

- (3) Es sei $a < 0 < b$. Betrachte $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $[a, b] \setminus \{0\}$. Nach (2) ist f nicht integrierbar, nicht einmal uneigentlich. Man betrachtet manchmal den *Cauchy-Hauptwert*

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x) dx \right) ,$$

hier bei $x_0 = 0$ mit Wert $\log b - \log(-a)$. Allerdings wollen wir das Integral nicht als seinen Cauchy-Hauptwert definieren, da dann manche Sätze über Integrale falsch würden.

5.32. BEMERKUNG. Es folgen einige Bemerkungen zu Definition 5.30.

- (1) Wegen Additivität 5.4 ist (2) unabhängig von der Wahl von c . Aus dem gleichen Grund können wir in (3) zusätzliche „Ausnahmepunkte“ x_i hinzunehmen, ohne den Wert des Integrals zu verändern. Wir haben daher $x_0 = a$ und $x_n = b$ gesetzt, obwohl das vielleicht nicht nötig gewesen wäre.
- (2) Wir können den Hauptsatz 5.19 auch für uneigentlich integrierbare Funktionen formulieren, allerdings gilt die Aussage $F'(x) = f(x)$ nur noch für $x \in [a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$. Wir wollen F auch in dieser Situation eine Stammfunktion nennen.
- (3) Die Stammfunktion F aus (2) ist stetig, da alle links- und rechtsseitigen Grenzwerte existieren und dort, wo beide definiert sind, übereinstimmen. Aus diesem Grund bleibt Folgerung 5.21 auch für uneigentliche Integrale gültig.

- (4) Substitutionsregel und partielle Integration basieren auf dem Hauptsatz und lassen sich daher auf uneigentliche Integrale verallgemeinern. Wir wollen hier aber keine allgemeinen Formulierungen angeben. In den Beweisen der Propositionen 5.26 und 5.28 haben wir je ein Paar aus einem Integranden und einer Stammfunktion betrachtet (nämlich $(f \circ g) \cdot g'$ und $F \circ g$ beziehungsweise $f'g + fg'$ und fg). Im Einzelfall muss man überprüfen, ob diese Funktionenpaare den Hauptsatz im Sinne von (2) erfüllen.
- (5) Für die Cauchy-Hauptwerte aus Beispiel 5.31 (3) gilt die Substitutionsregel im obigen Sinne nicht.

5.d. Integral und Ableitung von Potenzreihen

2.2.22

Wir haben in Abschnitt 3.c gesehen, dass Folgen stetiger Funktionen nicht unbedingt gegen stetige Funktionen konvergieren. Hier wollen wir untersuchen, wann eine Folge differenzierbarer Funktionen gegen eine differenzierbare Funktion konvergiert, und zwar so, dass auch die Folge der Ableitungen gegen die Ableitung der Grenzfunktion konvergiert. Damit erhalten wir beispielsweise die Möglichkeit, auch beliebige Potenzreihen abzuleiten.

5.33. SATZ. *Es sei I ein Intervall, $x_0 \in I$, und $(f_n)_n$ eine Folge in $C^1(I)$, so dass die Folge $(f'_n)_n$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ und $(f_n(x_0))_n$ gegen $y_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert. Dann konvergiert $(f_n)_n$ punktweise gegen eine Grenzfunktion $f \in C^1(I)$ mit $f' = g$.*

5.34. BEMERKUNG. In den Übungen sehen wir, dass wir die gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen wirklich benötigen.

Wenn das Intervall I beschränkt ist, konvergiert $(f_n)_n$ sogar gleichmäßig; das ergibt sich aus dem Beweis. Falls I unbeschränkt ist, gilt das immer noch für jedes kompakte Teilintervall. Wir sagen dann, dass $(f_n)_n$ lokal gleichmäßig konvergiert.

Mehr als lokal gleichmäßige Konvergenz können wir nicht erwarten, wie das Beispiel $f_n(x) = \frac{x}{n}$ mit $f'_n \equiv \frac{1}{n}$ zeigt.

Wir erinnern uns jetzt an Potenzreihen aus Abschnitt 2.f, insbesondere an den Konvergenzradius aus Satz 2.71. Aus Lemma 2.70 folgt, dass Potenzreihen auf jedem Kreis mit kleinerem Radius sogar gleichmäßig konvergieren. Im Beweis von Folgerung 3.37 haben wir damit bewiesen, dass Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzkreises stetige Funktionen darstellen.

5.35. FOLGERUNG. *Jede Potenzreihen ist im Inneren ihres Konvergenzkreises integrierbar und unendlich oft differenzierbar. Stammfunktionen und Ableitungen lassen sich gliedweise bestimmen.*

Mit „gliedweise“ ist gemeint, dass man jeden einzelnen Summanden $a_k X^k$ einzeln integriert beziehungsweise ableitet, bevor man die unendliche Summe bildet.

5.36. BEISPIEL. Der Logarithmus \log ist bei 0 nicht definiert und lässt sich daher nicht unmittelbar als Potenzreihe darstellen. Für beliebige $x_0 > 0$ erhalten wir mit Hilfe der obigen Folgerung und der Summenformel für die geometrische Reihe aus Beispiel 2.51 die Reihenentwicklung

$$\log(x + x_0) = \log x_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k x_0^k} x^k \quad \text{für alle } x \in (-x_0, x_0).$$

Wir können das umschreiben als

$$\log x = \log x_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k x_0^k} (x - x_0)^k \quad \text{für alle } x \in (0, 2x_0).$$

Wir nennen das die „Entwicklung des Logarithmus um x_0 “, siehe unten.

Man kann zeigen, dass die obige Reihe für $x_0 = 1$ auch auf dem Intervall $[1, 2]$ gleichmäßig konvergiert (Übung). Damit erhalten wir den Grenzwert der alternierenden harmonischen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2,$$

siehe Beispiel 2.55. Man merkt aber, dass die obige Reihe viel zu langsam konvergiert, als dass man mit ihrer Hilfe $\log 2$ berechnen würde. Erfolgversprechender ist es, stattdessen $-\log 2 = \log \frac{1}{2}$ mit der obigen Potenzreihe auszurechnen.

5.37. DEFINITION. Es sei $A \subset \mathbb{R}$ und $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir nennen f *analytisch* bei $x_0 \in A$, wenn es eine Zahl $r > 0$ und eine Potenzreihe P mit Konvergenzradius $\rho \geq r$ gibt, so dass

$$f(x) = P(x - x_0)$$

für alle $x \in A \cap (x_0 - r, x_0 + r)$. In diesem Fall heißt P die *Potenzreihenentwicklung von f um x_0* . Wir nennen f *analytisch*, wenn sie in jedem Punkt von A analytisch ist.

Nach Folgerung 5.35 sind analytische Funktionen insbesondere unendlich oft differenzierbar. Bisher haben wir fast nur analytische Funktionen kennengelernt; das wird sich aber bald ändern. Man beachte, dass wir nur $r \leq \rho$ fordern, nicht $r = \rho$. Das gibt uns später mehr Flexibilität, Funktionen zu konstruieren, die nicht überall analytisch sind.

Außerdem beachten wir, dass wir nicht *eine* Potenzreihenentwicklung für die gesamte Funktion f fordern, sondern nur eine um jeden Punkt. Anhand von Beispiel 5.36 sehen wir, dass das im Falle des Logarithmus sinnvoll ist.

Völlig analog würden wir komplexwertige Funktionen auf Teilmengen von \mathbb{C} behandeln, allerdings ersetzen wir dann das Intervall $(x_0 - r, x_0 + r)$ in der obigen Definition durch den Kreis

$$B_r(x_0) = \{ x \in \mathbb{C} \mid |x - x_0| < r \}.$$

Solche Funktionen betrachtet man später in der Vorlesung „Funktionentheorie“.

Aus dem folgenden Ergebnis folgt nicht nur, dass jede Funktion an einer festen Stelle x_0 höchstens durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann. Wir werden mit dieser Proposition auch zeigen, dass manche Funktionen überhaupt nicht durch Potenzreihen dargestellt werden können.

5.38. SATZ (Identitätssatz für Potenzreihen). *Es sei P eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Falls es eine Folge $(x_n) \in (-\rho, \rho) \setminus \{0\}$ Grenzwert 0 gibt, so dass $P(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt bereits $P = 0$.*

Mit etwas mehr Mühe kann man sogar zeigen, dass eine analytische Funktion auf einem Intervall bereits durch ihre Werte auf einer Folge von Punkten festgelegt ist, die innerhalb des Intervalls konvergiert. Er gilt analog für analytische Funktionen auf zusammenhängenden Teilmengen von \mathbb{C} und wird in der Funktionentheorie bewiesen.

5.39. BEISPIEL. Wir geben Konstruktionen für C^∞ -Funktionen an, die man später häufig braucht.

(1) Wir definieren eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \text{ und} \\ e^{-1/x} & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Dann gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach dem Identitätssatz 5.38 ist f bei 0 nicht analytisch.

- (2) Die Funktion f ist Grundlage für die Konstruktion sogenannter „Abschneidefunktionen“. Das sind C^∞ -Funktionen, die auf einer gegebenen abgeschlossen Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ konstant den Wert 1 haben und auf einer dazu disjunkten abgeschlossenen Teilmenge $B \subset \mathbb{R}$ verschwinden. Solche Funktionen sind in der Regel nicht analytisch. Als Beispiel einer Abschneidefunktion mit $A = [x_1, \infty)$ und $B = (-\infty, x_0]$ für $x_0 < x_1$ betrachte

$$g(x) = \frac{f(x - x_0)}{f(x - x_0) + f(x_1 - x)} \in [0, 1].$$

- (3) Sei jetzt $x_2 < x_0$ und $h \in C^\infty((x_2, \infty))$ beliebig. Wir können g auch benutzen, um mit Hilfe von h eine C^∞ -Funktion auf ganz \mathbb{R} durch

$$x \mapsto \begin{cases} (gh)(x) & \text{für } x > x_2, \text{ und} \\ 0 & \text{für } x < x_0 \end{cases}$$

zu definieren. Sie verhält sich auf A wie h und verschwindet auf B . So konstruierte Funktionen sind in der Regel nicht analytisch.

5.e. Der Satz von Taylor

8.2.22

Der Satz von Taylor ist eine Aussage über Approximation von Funktionen durch Polynome mit Hilfe der höheren Ableitungen, und gehört damit eher zur Differentialrechnung. Allerdings lässt er sich mit verschiedenen Restgliedern formulieren, von denen eins auf mehrfacher partieller Integration beruht, und taucht daher erst in diesem Kapitel auf.

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine n -fach differenzierbare Funktion, für $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, und $x_0 \in I$. Dann definieren wir das k -te *Taylorpolynom* von f an der Stelle x_0 als

$$T_n(f; x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Für $n = \infty$ nennt man $T(f; x_0) = T_\infty(f; x_0)$ die *Taylorreihe* von f bei x_0 , und falls $x_0 = 0$, manchmal auch die *Maclaurin-Reihe* von f . Falls eine Funktion f überhaupt eine Potenzreihenentwicklung um x_0 besitzt, dann hat sie die obige Gestalt. Zunächst einmal geht es aber darum, wie gut f durch die Taylorpolynome approximiert wird.

5.40. SATZ (Taylor). *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$, und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.*

- (1) *Peano-Restglied. Wenn f eine n -fach differenzierbare Funktion ist, dann existiert eine Funktion $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0$, so dass*

$$f(x) = T_n(f; x_0)(x - x_0) + h(x)(x - x_0)^n.$$

- (2) *Lagrange-Restglied. Wenn f eine $(n+1)$ -fach differenzierbare Funktion ist, dann existiert für jedes $x \in I$ ein ξ zwischen x und x_0 , so dass*

$$f(x) = T_n(f; x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

- (3) *Integral-Restglied. Wenn f eine $(n+1)$ -fach stetig differenzierbare Funktion ist, dann gilt*

$$f(x) = T_n(f; x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt.$$

Für kleine n enthält der Satz von Taylor nichts Neues. Variante (1) mit Peano-Restglied ist im Falle $n = 0$ äquivalent zur Stetigkeit bei x_0 nach Proposition 3.17 (2), und im Falle $n = 1$ zur Differenzierbarkeit bei x_0 nach Proposition 4.3 (3), siehe auch Bemerkung 4.4. Hier kommt es also nur auf das Verhalten von f nahe bei x_0 an.

Variante (2) mit Lagrange-Restglied ist äquivalent zum Mittelwertsatz 4.16 der Differentialrechnung. Insbesondere benötigen wir Differenzierbarkeit von f auf dem ganzen offenen Intervall zwischen den Punkten x und x_0 , andernfalls finden wir Gegenbeispiele.

Variante (3) mit Integral-Restglied ist für $n = 0$ äquivalent zur Folgerung (5.21) aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Die Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit lässt sich ein wenig abschwächen, siehe etwa Bemerkung 5.32 (3).

5.41. BEMERKUNG. Es gibt gewisse Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Restgliedern.

- (1) Wenn f eine k -fach differenzierbare Funktion mit $k \geq 1$ ist, haben wir sowohl das Peano-Restglied für $n = k$ als auch das Lagrange-Restglied für $n = k - 1$ zur Verfügung. Wenn f sogar k -fach stetig differenzierbar ist, ergibt sich das Peano-Restglied aus dem Lagrange-Restglied im Grenzübergang $x \rightarrow x_0$.
- (2) Für $f \in C^{n+1}(I)$ ergibt sich das Lagrange-Restglied aus dem Integral-Restglied mit Hilfe des Mittelwertsatzes 5.17 der Integralrechnung mit Gewichtsfunktion $(x - t)^n$.

5.42. BEMERKUNG. Es sei I ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bei x_0 analytisch. Mit Folgerung 5.35 kann man nachrechnen, dass die Taylor-Reihe bei x_0 mit der Potenzreihenentwicklung von f um x_0 übereinstimmt. Somit existiert $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$ gilt, dass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n .$$

Als Beispiele dazu betrachte beliebige Polynome, die geometrische Reihe aus Beispiel 2.51 (1), die Exponentialreihe aus Beispiel 2.73, die Winkelfunktionen vor Proposition 2.80 und die Logarithmusreihe aus Beispiel 5.36.

Der Satz von Taylor beschreibt, wie gut das n -te Taylor-Polynom von f bei x_0 die Funktion f approximiert. Um das kurz und prägnant formulieren zu können, führen wir die *Landau-Symbole* ein. Sie werden auch in der Physik und in der Informatik häufig benutzt.

5.43. DEFINITION. Es sei I ein Intervall, $x_0 \in I$, und $g, h: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ seien zwei Funktionen. Dann definiert man die *Landau-Symbole*

$$\begin{aligned} h = o(g) \text{ bei } x_0 & \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = 0 , \\ \text{und } h = O(g) \text{ bei } x_0 & \iff \text{es gibt } \varepsilon > 0 \text{ und } C \in \mathbb{R}, \text{ so dass } |h(x)| \leq C |g(x)| \\ & \text{für alle } x \neq x_0 \text{ mit } |x - x_0| < \varepsilon . \end{aligned}$$

Analog definiert man o und O auch bei $x_0 = -\infty$ oder ∞ .

Man schreibt „bei x_0 “ nicht mit, wenn die Stelle aus dem Zusammenhang klar ist. Man beachte, dass $o(g)$ und $O(g)$ Mengen von Funktionen beschreiben. Man muss diese Notation also mit genauso großer Vorsicht benutzen wie die Notation für das unbestimmte Integral in Bemerkung 5.20.

5.44. BEMERKUNG. Mit den Landau-Symbolen können wir die Genauigkeit der Taylor-Approximation angeben.

- (1) Der Satz 5.40 von Taylor mit Peano-Restglied (1) ist äquivalent zu

$$f(x) = T_n(f; x_0)(x) + o((x - x_0)^n) .$$

- (2) Mit Integral-Restglied (3) folgt sogar

$$f(x) = T_n(f; x_0)(x) + O((x - x_0)^{n+1}) .$$

Für das Lagrange-Restglied (2) gilt das auch, falls $f^{(n+1)}$ nahe x_0 beschränkt ist. Dass wir eine stärkere Aussage erhalten, liegt an den stärkeren Voraussetzungen. Die Funktion $f(x) = x \sqrt[3]{x}$ ist bei $x_0 = 0$ einmal differenzierbar mit $T_1(f; x_0) = 0$, und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, \quad \text{aber} \quad \frac{f(x)}{x^2} \text{ ist unbeschränkt.}$$

Folglich erhalten wir

$$f(x) = T_1(f; x_0) + o(x), \quad \text{aber nicht} \quad f(x) = T_1(f; x_0) + O(x^2).$$

- (3) Der Satz von Taylor besagt ausdrücklich nicht, dass für festes $x \neq x_0$ die Approximation dadurch besser wird, dass wir n größer machen, wie bereits Beispiel 5.39 zeigt. Bemerkung 5.42 gilt nur für analytische Funktionen.
- (4) Für nicht analytische C^∞ -Funktionen f kann es sein, dass die Taylor-Reihe wie in Beispiel 5.39 konvergiert, aber nicht die Funktion f darstellt. Es kann aber auch passieren, dass die Taylor-Reihe von f überhaupt nicht konvergiert (also Konvergenzradius 0 hat). Dennoch werden auch diese Funktionen für x nahe genug bei x_0 durch ihre Taylorpolynome approximiert.

5.45. BEISPIEL. Die Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+tx} dt$$

ist unendlich oft differenzierbar, aber ihre Taylorreihe bei $x_0 = 0$ divergiert.

5.f. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine wichtige Motivationsquelle für Differential- und Integralrechnung ist die Physik. Einfache Probleme, zum Beispiel in der klassischen Mechanik, lassen sich durch Differentialgleichungen an Funktionen in einer Variablen beschreiben. Aber auch in anderen Naturwissenschaften kommen solche Differentialgleichungen vor. Wir lernen exemplarisch ein paar einfache Differentialgleichungen und dazu passende Lösungstechniken kennen. Insbesondere verstehen wir, warum das explizite Lösen einer Differentialgleichung manchmal „Integrieren“ genannt wird. Für eine systematische Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen inklusive Existenz- und Eindeutigkeitsüberlegungen verweisen wir auf das kommende Semester. Partielle Differentialgleichung (in denen die Funktionen von mehr als einer Veränderlichen abhängen) können Sie in speziellen Vorlesungen kennen und lösen lernen.

5.46. BEMERKUNG. Eine gewöhnliche Differentialgleichung k -ter Ordnung beschreibt eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ durch eine Gleichung in t und $f(t), \dots, f^{(k)}(t)$. Etwas allgemeiner könnten wir auch \mathbb{R}^n -wertige Funktionen betrachten, die alle von der gleichen Variablen t abhängen. In diesem Fall spricht man auch von „gekoppelten“ Differentialgleichungen.

- (1) Eine implizite gewöhnliche Differentialgleichung k -ter Ordnung ist gegeben durch einen Ausdruck der Form

$$G(t, x_0, \dots, x_k) = 0,$$

Dabei ist G auf einer geeigneten Teilmenge des \mathbb{R}^{k+2} definiert. Eine Lösung auf einem Intervall I ist eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$G(t, f(t), \dots, f^{(k)}(t)) = 0 \quad \text{für alle } t \in I.$$

Insbesondere müssen die Argumente für alle t im Definitionsbereich von G liegen. Hier sieht man bereits, dass wir im allgemeinsten Fall einiges Wissen über Funktionen in mehreren Veränderlichen brauchen, was uns zur Zeit noch fehlt.

- (2) Wir betrachten daher zunächst Differentialgleichungen in expliziter Form, das heißt, wir lösen nach der höchsten Ableitung auf, so dass

$$f^{(k)}(t) = F(t, f(t), \dots, f^{(k-1)}(t)) ,$$

wobei F jetzt nur noch von $(k + 1)$ Variablen t und x_0, \dots, x_{k-1} abhängt. Wir nennen F einfach die „rechte Seite“ der Gleichung. Man kann jetzt verschiedene Spezialfälle unterscheiden.

5.47. BEMERKUNG. Wenn die rechte Seite nur von t , aber nicht von x_0, \dots, x_{k-1} abhängt, erhalten wir eine Lösung durch sukzessives Bilden von Stammfunktionen. Das heißt, wir setzen

$$f_{k-1} = \int F(t) dt , \quad f_{k-2} = \int f_{k-1}(t) dt , \quad \dots , \quad f = f_0 = \int f_1(t) dt .$$

Aus dem Hauptsatz folgt, dass f die Differentialgleichung löst. Da wir in jedem Schritt eine additive Konstante frei wählen dürfen, erhalten wir am Ende eine Lösung, die von k Parametern abhängt.

5.48. BEISPIEL. Ein einfaches Beispiel ist der *freie Fall* aus der Physik. Es sei $g > 0$ die Erdbeschleunigung, die auf einen Körper wirkt. Die Funktion $f(t)$ beschreibe die Höhe des Körpers zur Zeit t . Dann wird der freie Fall beschrieben durch die Differentialgleichung

$$f''(t) = -g .$$

Bei der Wahl einer Stammfunktion können wir zwei Parameter vorgeben, zum Beispiel die Höhe h_0 und die vertikale Geschwindigkeit v_0 zur Zeit 0. Als Stammfunktionen erhalten wir Geschwindigkeit und Höhe zur Zeit t , und zwar

$$f_1(t) = -gt + v_0 \quad \text{und} \quad f(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0t + h_0 .$$

Andere Fragestellungen sind möglich, zum Beispiel: „mit welcher Geschwindigkeit müssen wir einen Ball hochwerfen, damit er zur Zeit $T > 0$ wieder in unserer Hand landet?“ In diesem Fall soll $f(T) = h_0$ gelten, und wir erhalten

$$h_0 = -\frac{g}{2}T^2 + v_0T + h_0 \quad \text{mit der Lösung} \quad v_0 = \frac{g}{2}T .$$

5.49. BEMERKUNG. Eine Differentialgleichung, deren rechte Seite nicht von t abhängt, heißt *autonom*. Im Falle $k = 1$ sei also $f'(t) = F(f(t))$. Wir raten Lösungen auf einem Intervall $I = [t_0, t_1]$ mit Hilfe der folgenden Umformung:

$$t_1 - t_0 = \int_{t_0}^{t_1} 1 dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{f'(t)}{F(f(t))} dt = \int_{f(t_0)}^{f(t_1)} \frac{dx}{F(x)} = g(f(t_1)) - g(f(t_0))$$

für eine Stammfunktion g von $\frac{1}{F}$. Somit ist die Lösung f die Umkehrfunktion einer Stammfunktion von $\frac{1}{F}$. Dieser Ansatz funktioniert nur dann problemlos, wenn F stetig ist und nirgends den Wert 0 annimmt. Aber mitunter lassen sich Lösungen über solche kritischen Punkte hinweg fortsetzen.

5.50. BEISPIEL. Wir geben zwei einfache Beispiele.

- (1) *Exponentielles Wachstum*. Wenn die Änderungsrate proportional zum Wert ist (wie beispielsweise bei kontinuierlicher Verzinsung, siehe Proposition 2.74), erhalten wir die Differentialgleichung

$$f' = \lambda f .$$

Wir wissen bereits, dass $C \exp(\lambda t)$ für jedes $C \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist. Die soeben skizzierte Methode liefert

$$g(x) = \int \frac{dx}{\lambda x} = \log \frac{|x|}{\lambda} + c ,$$

und somit $f(t) = \pm e^{\lambda(t-c)}$. Wir finden alle Lösungen bis auf $f \equiv 0$.

- (2) *Logistische Differentialgleichung.* Wir nehmen an, dass der Proportionalitätsfaktor in (1) linear abnimmt und an einer oberen Grenze $K > 0$ verschwindet. Es tritt also eine Art „Sättigung“ ein, sobald sich die Lösung der „Kapazität“ K annähert. Wir erhalten die Differentialgleichung

$$f' = \lambda f \cdot \left(1 - \frac{f}{K}\right).$$

Für die Lösung benutzen wir die Partialbruchzerlegung aus Proposition 5.23:

$$g(x) = \int \frac{dx}{\lambda x(1-x/K)} = \frac{1}{\lambda} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{\lambda} \int \frac{dx}{K-x} = \frac{1}{\lambda} \log \left| \frac{x}{K-x} \right| + c$$

Wir erhalten als Umkehrfunktion

$$f(t) = K \frac{e^{\lambda(t-c)}}{e^{\lambda(t-c)} \pm 1}.$$

Mit dem Minuszeichen erhalten wir eine negative Lösung auf $(-\infty, c)$ sowie eine Lösung auf (c, ∞) , die überall größer als K ist. Beide Lösungen sind *maximal* in dem Sinne, dass sie sich nicht auf ein größeres Definitionsintervall ausdehnen lassen. Wenn wir das Pluszeichen wählen, erhalten wir eine Funktion auf ganz \mathbb{R} mit Werten in $(0, K)$, die für $t \rightarrow -\infty$ gegen 0 und für $t \rightarrow \infty$ gegen K konvergiert. Das ist die Familie von Lösungen (in Abhängigkeit von c), die wir suchen. Außerdem gibt es noch die konstanten Lösungen $f \equiv 0$ und $f \equiv K$.

5.51. BEMERKUNG. Der obige Trick lässt sich verallgemeinern auf Differentialgleichungen der Form

$$f'(t) = q(t) \cdot r(f(t)).$$

Hier hängt die rechte Seite zwar sowohl von t als auch von $f(t)$ ab, hat aber immer noch eine sehr spezielle Form. Man rät eine Lösung durch *Trennung der Variablen* mit dem Ansatz

$$\int_{t_0}^{t_1} q(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{f'(t)}{r(f(t))} dt = \int_{f(t_0)}^{f(t_1)} \frac{dx}{r(x)}.$$

Sei also Q eine Stammfunktion von q und P eine Stammfunktion von $p = \frac{1}{r}$ mit Umkehrfunktion h , dann sollte $h \circ Q$ eine Lösung der obigen Differentialgleichung sein. Wir können zu P oder zu Q eine Integrationskonstante hinzufügen, um etwas allgemeiner die Lösung $f(t) = h(Q(t) + c)$ zu erhalten.

5.52. BEISPIEL. Als Beispiel betrachten wir etwa

$$f'(t) = t f(t)^2 + t.$$

In der obigen Notation ist $q(t) = t$ mit Stammfunktion $Q(t) = \frac{x^2}{2}$ und $p(x) = \frac{1}{1+x^2}$ mit Stammfunktion $P(x) = \arctan x$. Somit erhalten wir als Lösungsansatz

$$f(t) = \tan \left(\frac{t^2}{2} + c \right).$$

Die Funktion $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ ist an den Stellen $(n + \frac{1}{2})\pi$ für $n \in \mathbb{Z}$ nicht definiert, da $\cos((n + \frac{1}{2})\pi) = 0$. Wir erhalten maximale Lösungen $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ der obigen Differentialgleichung, wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} & t^2 + 2c \in ((2n-1)\pi, (2n+1)\pi) \quad \text{für alle } t \in (a, b), \\ \text{und} \quad & \lim_{t \searrow a} (t^2 + 2c), \quad \lim_{t \nearrow b} (t^2 + 2c) \in \{(2n-1)\pi, (2n+1)\pi\}. \end{aligned}$$

Literatur

- [1] H. Amann, J. Escher, *Analysis I*, Grundstudium Mathematik, 2. Aufl. Birkhäuser, Basel, 2002
- [2] O. Forster, *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, Grundkurs Mathematik, 12. Aufl., Springer Spektrum, Heidelberg, 2016
- [3] S. Goette, *Lineare Algebra I-II*, <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/goette/Skripten/LA.pdf>
- [4] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis. Teil 1*, 7. Aufl., Teubner, Stuttgart, 1990
- [5] E. Kuwert, *Analysis I*, <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/lehre/skripten/AnalysisI.pdf>
- [6] H. Mildenberger, *Lineare Algebra I*, 2021
- [7] F. Modler, M. Kreh, *Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1*, 4. Aufl., Springer Spektrum, Berlin, 2018