2. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I
im Wintersemester 2021/22 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Abgabe ist am Mittwoch, den 27.10.

Aufgabe 1 1. Es seien A, B, C Mengen. Zeigen Sie die folgenden Behauptungen möglichst nur mit den Methoden der Vorlesung.

(a) $A \cup B = B \cup A$

(b) $A \cap B = B \cap A$

(c) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

(d) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

Stellen Sie die Mengen (c) und (d) zusätzlich in einem Mengendiagram dar

Aufgabe 2 Es sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Abbildung. Geben Sie für die folgenden Konstrukte rekursive Definitionen an; überlegen Sie sich dabei stets auch den richtigen Wert für $n = 0$. Sie dürfen die Grundrechenarten für reelle Zahlen verwenden.

(a) $\{f(1), \dots, f(n)\}$,

(b) $\sum_{i=1}^{n} f(i)$,

(c) $\prod_{i=1}^{n} f(i)$,

(d) $\binom{x}{k}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 Berechnen Sie die folgenden Summen und Produkte, und beweisen Sie Ihr Ergebnis jeweils mit vollständiger Induktion.

(a) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$,

(b) $\sum_{i=1}^{n} i^2$,

(c) $\prod_{i=1}^{n}(1+1/i)$,

(d) $\prod_{i=1}^{n}(1-1/i)$.

Aufgabe 4

(a) Visualisieren Sie die folgende Beziehung und begründen Sie sie anschaulich:

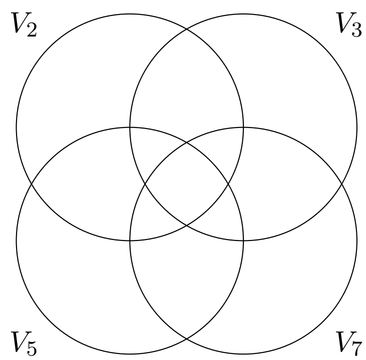
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Vergleichen Sie mit dem formal-mathematischen Beweis:

$$\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\iff (x \in A) \text{ und } (x \in B \cup C) \\
&\iff (x \in A) \text{ und } (x \in B \text{ oder } x \in C) \\
&\iff (x \in A \text{ und } x \in B) \text{ oder } (x \in A \text{ und } x \in C) \\
&\iff (x \in A \cap B) \text{ oder } (x \in A \cap C) \\
&\iff x \in (A \cap C) \cup (A \cap D)
\end{aligned}$$

Diskutieren Sie die Vor- und Nachteile der anschaulichen bzw. der formal-mathematischen Begründung für dieses Beispiel.

(b) Jemand hat das folgende Mengendiagramm für die Vielfachenmengen V_2, V_3, V_5 und V_7, wobei $V_k = \{\, kn \mid n \in \mathbb{N}\}$, gezeichnet:



„Beweisen" Sie mit Hilfe des Bildes die folgende Aussage:

$$x \notin V_2 \wedge x \in V_3 \wedge x \in V_5 \implies x \in V_7$$

Warum scheint der „Beweis" zu funktionieren? Warum ist die Aussage dennoch falsch?

(c) Diskutieren Sie ausgehend von den Erfahrungen in (a) und (b) die Stärken und Schwächen der formal-mathematischen und der anschaulichen Begründungsweise. Wie sind Anschaulichkeit und formale Korrektheit in Bezug auf die Schule zu bewerten?