10. Übungsblatt (Weihnachtsübungsbaltt) zur Vorlesung Analysis I im Wintersemester 2021/22 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 12.1.2022 in die Briefkästen in der Ernst-Zermelo-Straße 1. Auf dieses Übungsblatt gibt es 16 Punkte + 16 Bonuspunkte.

Aufgabe 1 (4 Punkte) Es seien r, $s \in (0, \infty)$, $\varphi \in (0, \pi)$. Bestimmen Sie mit Hilfe des Cosinus-Satzes den Winkel γ im Dreieck mit den Ecken $A = r$, $B = se^{i\varphi}$, $C = 0 \in \mathbb{C}$ (übliche Bezeichnungen im Dreieck angenommen). Zur „Längenmessung“ benutzen Sie bitte den komplexen Absolutbetrag, siehe Bemerkung 2.47 (5–7).

Aufgabe 2 (4 Punkte) Beweisen Sie

$$\cos' = -\sin\,, \qquad \sin' = \cos\,,$$
$$\cosh' = \sinh\,, \qquad \sinh' = \cosh\,.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte) Wir betrachten den Tangens $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ und seine Umkehrfunktion, den Arcus-Tangens. Zeigen Sie

(a) der Tangens steigt auf jedem Intervall $\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi, \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ streng monoton;

(b) $\tan' = 1 + \tan^2$;

(c) man kann eine Umkehrfunktion $\arctan \colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ definieren;

(d) es gilt $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Es sei $b > 1$. Der Logarithmus von $x \in (0, \infty)$ zur Basis b ist diejenige Zahl $y = \log_b x$, die

$$b^y = x$$

erfüllt. zeigen Sie:

(a) Es gilt $\log_b x = \frac{\log x}{\log b}$

(b) Es sei $c > 1$. Gilt die Formel

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}\,?$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) Wir betrachten für reelle Folgen $(a_n)_n$ das Rekursionsgesetz

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}. \tag{$\star$}$$

(a) Bestimmen Sie alle $c \in \mathbb{R}$, für die die geometrische Folge $a_n = c^n$ das Rekursionsgesetz $(\star)$ erfüllt.

(b) Gibt es eine Linearkombination zweier solcher geometrischer Folgen (das heißt, existieren b_1, b_2, c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$, so dass) $a_n = b_1 c_1^n + b_2 c_2^n$,die ebenfalls $(\star)$ erfüllt, und mit $a_0 = a_1 = 1$?

Bemerkung: Falls Sie bereits Lineare Algebra hören oder gehört haben, überlegen Sie sich, dass alle Folgen, die $(\star)$ erfüllen, einen Vektorraum bilden. Was ist dessen Dimension?

Aufgabe 6 (4 Punkte) Wir betrachten die Folge $(g_n)_n$ von Funktionen mit $g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch

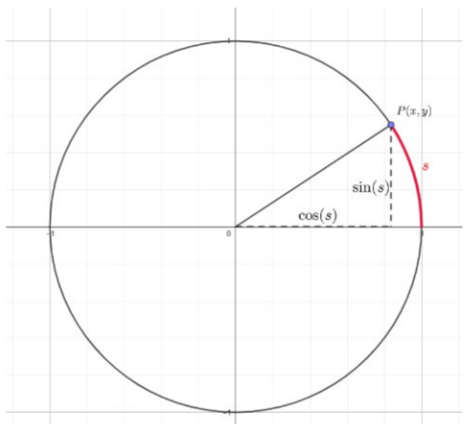
$$g_n(x) = \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{n}}.$$

Zeigen Sie, dass $(g_n)_n$ gleichmäßig konvergiert und geben Sie eine Grenzfunktion an.

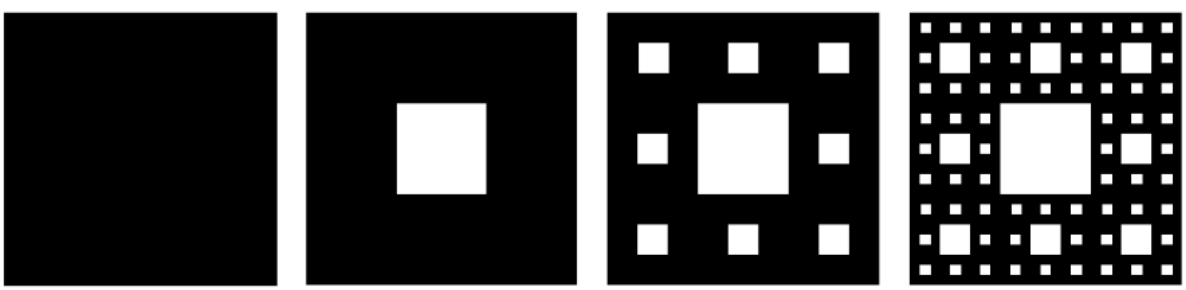
Aufgabe 7 (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Funktionswerte für cos und sin für die Werte $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{3}$.
Tipp: Die Additionstheoreme aus Kapitel 2 und Proposition 3.45 sind hier hilfreich.

(b) In der Oberstufe haben Sie gelernt, den Sinus und Cosinus am Einheitskreis zu deuten, siehe Bild. Damit lassen sich die Werte aus (a) mit recht einfachen geometrischen Mitteln bestimmen (Satz des Pythagoras, Winkelsumme in einem Dreieck $180° = \pi$) und auch geometrisch deuten.
Tipp: (Gleichseitiges Dreieck, Quadrat)



Aufgabe 8 (4 Punkte) Die Folge $(a_n)_n$ beschreibt den Umfang und die Folge $(b_n)_n$ den Flächeninhalt folgender Figuren. Dabei hat die erste Figur ($n = 0$) einen Umfang von $a_0 = 4$. (Die Seitenlänge des Quadrats ist also 1)



$n = 0$ | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 3$

(a) Geben Sie eine rekursive Darstellung der Folgen a_n und b_n an.

(b) Prüfen Sie, ob die Folgen konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den/die Grenzwerte.

(c) Wenn wir eine Fläche der Größe A durch Quadrate der Seitenlänge 3^{-n} überdecken, benötigen wir mindestens $3^{2n} \cdot A$ Quadrate.

Bei einem Geradenstück erwarten wir, dass es eine Zahl c gibt, so dass wir mit $3^{1n}c$ Quadraten der Seitenlänge 3^{-n} auskommen.

Finden Sie eine Konstante c und einen möglichst kleinen Exponenten $k \in \mathbb{R}$, so dass Sie die Figur in Aufgabe 4 (a) stets mit $3^{kn} \cdot c$ Quadraten der Seitenlänge 3^{-n} überdecken können. Somit hätte die Figur „Dimension“ k.