11. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I
im Wintersemester 2021/22 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 19.1.2022 in die Briefkästen in der Ernst-Zermelo-Straße 1.

Aufgabe 1 (4 Punkte) Es seien $f, g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (0,\infty)$. Zeigen Sie:

(a) Wenn $\lim_{x\searrow 0} f(x)$, $\lim_{x\searrow 0} g(x) \in \{-\infty, \infty\}$ und $\lim_{x\searrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann gilt

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\searrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(b) Wenn $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Hinweis: Benutzen Sie Bemerkung 4.24

Aufgabe 2 (4 Punkte) Wir definieren $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = x^2 \sin(\tfrac{1}{x}).$$

(a) Zeigen Sie, dass sich f differenzierbar auf $\mathbb{R}$ fortsetzen lässt.

(b) Ist $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig?

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x) = 2x^2 + f(x)$ ein absolutes Minimum bei $x = 0$ hat.

(d) Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ die Funktion g' einen Vorzeichenwechsel auf $(0, \varepsilon)$ hat.

(e) **(2 Bonuspunkte)** Erklären Sie, warum der Grenzwert bei 0 der Funktion $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ existiert, sich aber nicht mit der Regel von l'Hospital berechnen lässt.

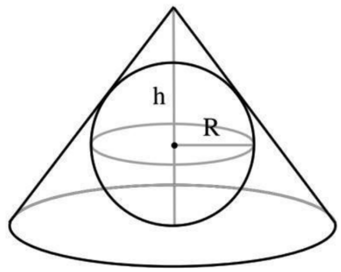
Aufgabe 3 (4 Punkte) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte mit der Regel von l'Hospital :

(a) $\lim_{x\to\infty} x^{-n} e^x$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\lim_{x\to 0} x \log x$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Höhe des Kegels, bei dem Kegelvolumen minimal wird. Für den Radius der Kugel gilt: $R = 1$. (Sie können die Formel für das Kegelvolumen und Satz des Pythagoras verwenden)



(b) Eine Straße soll durch am Straßenrand stehende Lampen beleuchtet werden. Wie hoch müssen die Lampen angebracht werden, damit die Mitte der Straße möglichst hell beleuchtet wird, wenn die Beleuchtungsstärke B im Punkt M zu dem Kosinus des Winkel α proportional und zu dem Quadrat des Abstandes r von der Lichtquelle umgekehrt proportional ist.