12. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I
im Wintersemester 2021/22 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 26.1.2022 in die Briefkästen in der Ernst-Zermelo-Straße 1.

Aufgabe 1 (4 Punkte=1+1+1+1 Punkte) Beweisen Sie (a) und (b) per Induktion und folgern Sie daraus (c) und (d) wie in der Vorlesung.

(a) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ konvex. Es seien $x_1, \ldots, x_n \in I$ und $s_1, \ldots, s_n \geq 0$ mit $s_1 + \cdots + s_n = 1$ gegeben. Dann gilt

$$f(s_1 x_1 + \cdots + s_n x_n) \leq s_1 f(x_1) + \cdots + s_n f(x_n) .$$

(b) Falls f strikt konvex ist, gilt genau dann Gleichheit in (a), wenn es ein $x \in I$ gibt, so dass $x_i = x$ für alle i mit $s_i \neq 0$ gilt.

(c) Es seien $p_1, \ldots, p_n > 1$ mit $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$ und $x_1, \ldots, x_n \geq 0$. Zeigen Sie die Youngsche Ungleichung

$$\prod_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} x_i^{p_i}.$$

Unter welchen Bedingungen gilt Gleichheit?

(d) Es seien $x_1, \ldots, x_n \geq 0$. Zeigen Sie die verallgemeinerte Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Unter welchen Bedingungen gilt Gleichheit?

Aufgabe 2 (4 Punkte) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.

(a) Es bezeichne $S = \{\, x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \,\}$. Zeigen Sie, dass S entweder leer, einelementig, zweielementig oder ein Intervall ist und finden Sie Beispiele von konvexen Funktionen für alle diese Fälle.

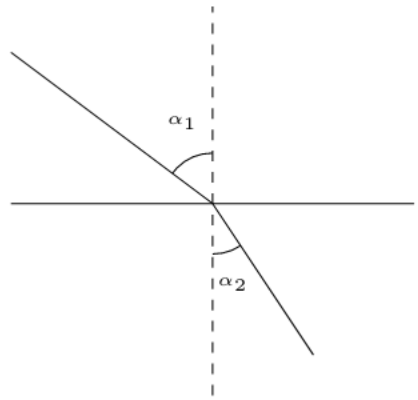
(b) Was können Sie über S sagen, wenn f strikt konvex ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für alle } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{wobei } \frac{p}{q} \text{ ein gekürzter Bruch sei, und} \\ 0 & \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass g integrierbar ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)



Wir betrachten den $\mathbb{R}^2$. Für alle Punkte über der x-Achse sei die Lichtgeschwindigkeit c_1 und für alle Punkte unter der x-Achse sei die Lichtgeschwindigkeit c_2 . Bestimmen Sie den Weg von $P_1 = (-1, 1)$ zum Punkt $P_2 = (1, -1)$, für den das Licht die kürzeste Zeit braucht (Benutzen Sie dafür, dass bei konstanter Geschwindigkeit der Weg mit kürzester Zeit immer ein Geradenabschnitt ist, und die benötigte Zeit ist Weglänge dividiert durch Geschwindigkeit). Was gilt dann für $\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)}$?