13. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I
im Wintersemester 2021/22 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 2.2.2022 in die Briefkästen in der Ernst-Zermelo-Straße 1.

Aufgabe 1 (4 Punkte=1+1+2 Punkte) Es seien p, $q \in \mathbb{R}$ mit $p^2 < 4q$.

(a) Finden Sie Konstanten r, s, $t \in \mathbb{R}$, so dass

$$\frac{d}{dx}\big(r \arctan(sx+t)\big) = \frac{1}{x^2+px+q} \ .$$

(b) Seien d, $e \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Ableitungen von $\log(x^2+px+q)$ sowie $\frac{dx+e}{(x^2+px+q)^k}$.

(c) Bestimmen Sie rekursiv Stammfunktionen von $\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^n}$ für alle $n \geq 1$ und $b, c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte) Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, auf (a,b) differenzierbar, $c \in \mathbb{R}$ und $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$ Zeigen Sie:

$$f'(x) \leq c \qquad \text{für alle } x \in [a,b] \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_2) - f(x_1) \leq c(x_2 - x_1) \ , \tag{a}$$

$$f'(x) \geq c\, f(x) \qquad \text{für alle } x \in [a,b] \qquad \Longrightarrow \qquad e^{-cx_2} f(x_2) \geq e^{-cx_1} f(x_1) \ . \tag{b}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte=2+1+1 Punkte) Betrachten Sie die Folge $(f_n)_n$ von Funktionen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

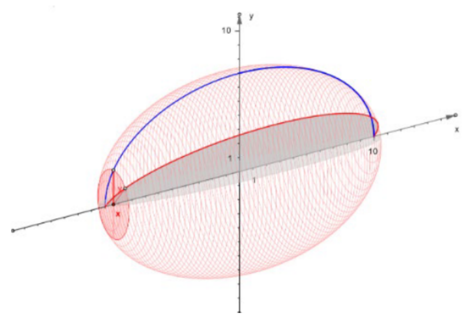
$$f_n(x) = x - \frac{\log(1+nx)}{n}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f_n gleichmäßig konvergiert, und bestimmen Sie die Grenzfunktion f und ihre Ableitung.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n')_n$ punktweise konvergiert, und bestimmen Sie die Grenzfunktion.

(c) Konvergiert $(f_n')_n$ gleichmäßig?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

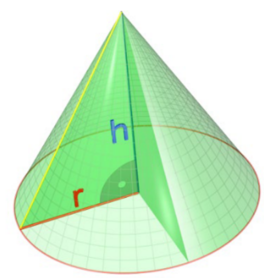


(a) Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^+$ eine stetige Funktion. Durch Rotation des Funktionsgraphen um die x-Achse entsteht ein rotationssymmetrischer Körper. Zeigen Sie, dass das Volumen des Körpers durch

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

berechnet werden kann.

Hinweis: Gehen Sie wie bei der Definition des Integrals vor. Anstelle von Rechtecken verwenden Sie diesmal jedoch Zylinder, um sich dem Volumen des Körpers anzunähern. Sie dürfen verwenden, dass ein Zylinder mit Radius r und Höhe h ein Volumen von $\pi \cdot r^2 \cdot h$ hat.



(b) Nutzen Sie das Integral aus a) und vergleichen Sie das Volumen einer Halbkugel, Zylinder und Kegel jeweils mit gleicher Grundfläche πr^2 und Höhe ($h = r$).