

14. ÜBUNGSBLATT (UNBEWERTET) zur Vorlesung Analysis I im Wintersemester 2021/22 bei Prof. Dr. S. Goette

Dieses Blatt müssen Sie NICHT abgeben und wird auch nicht bewertet, die Punkteverteilung dient lediglich zur Orientierung. Es wird Musterlösungen geben.

Aufgabe 1 (4 Punkte=1+1+1+1 Punkte) Es seien I, J Intervalle und $f: I \rightarrow J$ stetig und umkehrbar mit Umkehrfunktion g , siehe Satz 3.28. Es seien $a, b \in I$. Wir können uns die Integrale

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy$$

als Flächen zwischen dem Graph der Funktion f und der x - beziehungsweise y -Achse vorstellen.

- Fertigen Sie eine Skizze an und schreiben Sie die Summe der obigen Integrale als Differenz zweier Rechteckflächen.
- Es sei F eine Stammfunktion von f . Geben Sie mit Hilfe von F eine Formel für das zweite der obigen Integrale an und beweisen Sie diese Formel mit Hilfe der Integrationsregeln aus der Vorlesung.
- Geben Sie eine Stammfunktion von g mit Hilfe von F an.
- Was liefert Ihre Formel speziell für $f = \exp, g = \log$?

Aufgabe 2 (4 Punkte) Zeigen Sie mit Hilfe des Leibniz-Kriteriums 2.54, dass für $x \in [0, 1]$ die Logarithmus-Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

gleichmäßig konvergiert. Folgern Sie wie in Beispiel 5.36 skizziert, dass sie für $x = 1$ den Wert $\log 2$ annimmt, siehe Beispiel 2.55.

Aufgabe 3 (4 Punkte= 1+1+1+1 Punkte) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen

- $\int p(x) \log(x) dx$ für ein beliebiges Polynom $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$.
- $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$
- $\int \sin^2(x) dx$
- $\int \frac{dx}{x \log(x)}$

Aufgabe 4 (4 Punkte =2+2 Punkte) Existieren die folgenden (uneigentlichen) Integrale?

- $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x) dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$