15. Übungsblatt (unbewertet) zur Vorlesung Analysis I im Wintersemester 2021/22 bei Prof. Dr. S. Goette

Dieses Blatt müssen Sie NICHT abgegeben und wird auch nicht bewertet, die Punkteverteilung dient lediglich zur Orientierung. Es wird Musterlösungen geben.
Falls Sie Analysis hören, jedoch noch nicht Lineare Algebra, können Sie den Brückenkurs Lineare Algebra im Sommersemester belegen. Dieser besteht aus betreutem Selbststudium der für Analysis II relevanten Teilen der Linearen Algbera. Alle informationen finden Sie unter `https://home.mathematik.uni-freiburg.de/knies/lehre/bkla/index1.html`

Aufgabe 1 (4 Punkte) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $\arctan\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 = 0$. Betrachten Sie dazu die erste Ableitung und begründen Sie, warum Sie daraus die Taylorreihe ableiten können. Bestimmen Sie außerdem ihren Konvergenzradius.

Aufgabe 2 (4 Punkte=1+1+1+1 Punkte) Es sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion, $n > 1$, derart,dass für ein $c \in (a, b)$ gilt

$$f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)} = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(c) \neq 0.$$

(a) Bestimmen Sie das n-te Taylorpolynom von f um den Entwicklungspunkt c.

(b) Es sei n ungerade. Zeigen Sie, dass c ein Sattelpunkt von f ist.

(c) Es sei n gerade. Zeigen Sie, dass c ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum ist.

(d) Es sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 0$. Wenden Sie (b) bzw (c) auf $f(x) = x^k$ an um zu sehen, welche Art von Extremstelle $x = 0$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte= 1+2+1 Punkte) Wir betracheten die Funktion $f\colon D\colon \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

(a) Finden Sie $D \subseteq \mathbb{R}$ maximal, so dass f wohldefiniert ist.

(b) Zeigen Sie dass, $f(x + 1) = xf(x)$, falls $x, x + 1 \in D$.

(c) Berechnen Sie $f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte=3+1 Punkte) Die Fallgeschwindigkeit $x'(t)$ eines Fallschirmspringers wird (idealisiert) durch die Differentialgleichung

$$x''(t) = x'(t)^2 - \beta x'(t) - g$$

für konstanten $\beta, g > 0$ beschrieben.

(a) Finden Sie eine Lösung $x(t)$ für diese Differentialgleichung, so dass $x'(0) = 0$ gilt, wir nehmen also an, dass der Fallschirmspringer zur Zeit $t = 0$ abspringt.
Hinweis: Orientieren Sie sich an Beispiel 4.18, um eine einfache Darstellung für x' zu finden.

(b) Zeigen Sie, dass für diese Lösung $\lim_{t\to\infty} x'(t) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und $c < 0$. Interpretieren sie dieses Ergebnis, wenn sie annehmen, dass negative Geschwindigkeit bedeutet, dass der Fallschirmspringer fällt und nicht steigt.

Bemerkung: Die obige Gleichung ist eine vereinfachte Form der Gleichung

$$mx''(t) = \alpha x'(t)^2 - \beta x'(t) - mg.$$

Hier ist mx'' die Kraft die auf eine Masse m wirkt, $\alpha x'^2$ ist die turbulente oder Newton'sche Reibung, $-\beta x'$ ist die Stoke'sche Reibung und $-mg$ ist die Gewichtskraft.