3. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I
im Wintersemester 2021/22 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 10.11.

Aufgabe 1 (4 Punkte) Beweisen Sie für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

(b) Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $xy \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{4\varepsilon} y^2$.
Hinweis: Sie dürfen Quadratwurzeln ziehen.

Aufgabe 2 (4 Punkte) Es sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Für $A \subset M$, $C \subset N$ schreiben wir

$$f^{-1}(C) = \{\, m \in M \mid f(m) \in C \,\}$$
$$f(A) = \{ f(m) \mid m \in A \} \subset N$$

Beweisen **ODER** widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für $C, D \subset N$ gilt $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

(b) Für $C, D \subset N$ gilt $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

(c) Für $A, B \subset M$ und f injektiv gilt $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

(d) Für $A, B \subset M$ und f surjektiv gilt $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte=1+2+1 Punkte) Es sei $\Bbbk$ ein angeordneter Körper mit der Relation $<$. Beweisen Sie die Punkte (5),(6) und (7) aus Bemerkung 1.32, also:

(a) Es sei $x \neq 0$, dann gilt $0 < x^2$.

(b) Es sei $0 < x$, dann gilt $0 < \frac{1}{x}$.

(c) Falls $x < y$ und $0 < x$, dann gilt $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Warum hat $(*,**9)^2$ genau sechs Nachkommastellen und was ist die letzte Nachkommastelle? Was wäre, wenn die Ziffer 9 durch eine andere Ziffer ersetzt wird?

(b) Nutzen Sie (a), um zu zeigen, dass $\sqrt{2}$ keine Dezimalzahl mit endlich vielen Nachkommastellen sein kann.