4. ÜBUNGSBLATT zur Vorlesung Analysis I
im Wintersemester 2021/22 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 17.11.

Aufgabe 1 (4 Punkte+2 Bonuspunkte=2+2+2 Punkte) Es sei $c \in \mathbb{R}$ mit $c > 1$. Wir definieren die reellen Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & b_0 &= c \\ a_{n+1} &= \frac{c}{b_{n+1}}, \qquad \text{wobei} & b_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(b_n - a_n) < \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$.

(c)* Berechnen Sie die ersten 4 Folgenglieder der beiden Folgen für $c = 2$ in Dezimaldarstellung, zum Beispiel mit dem Taschenrechner. Versuchen Sie eine bessere Abschätzung für $b_n - a_n$ in Teil (b) zu finden, die Ihre Beobachtung erklärt.

Hinweis: Die Ergebnisse von (a) und (b) sind genau die Schritte, die in Beispiel 2.18 noch fehlen um zu zeigen, dass $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ gegen $\sqrt{c}$ konvergieren.

Aufgabe 2 (4 Punkte) Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ reelle Folgen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

(a) Zeigen Sie: Für $b > 0$ folgt, dass $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$

Konstruieren Sie eine Folge $(b_n)_n$ mit $b = 0$ so, dass

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = c$ für ein beliebiges $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

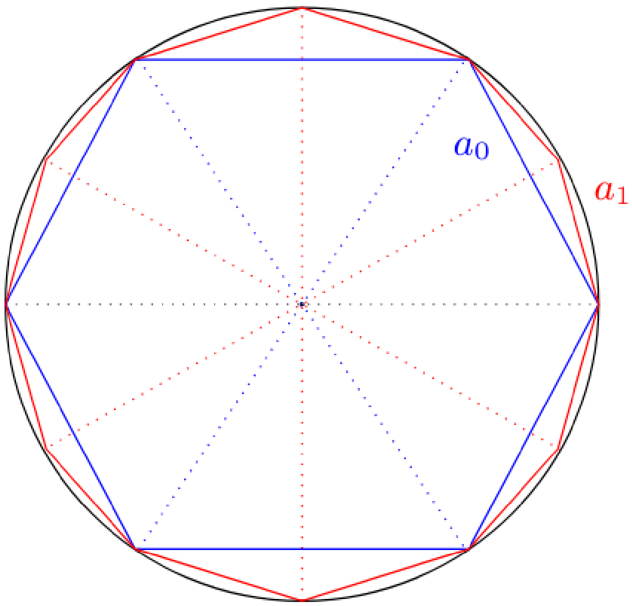
(d) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Es sei $(a_n)_n$ eine konvergente reelle Folge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und Grenzwert a. Zeigen Sie:

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$

(b) Die Folge der Mittelwerte $(b_n)_n$ mit $b_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} a_n$ konvergiert auch gegen a.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Es sei V_0 das im Kreis mit Radius 1 einbeschriebene reguläre Sechseck. Wir definieren rekursiv die regulären Vielecke V_n, derart dass V_n doppelt so viele Ecken wie V_{n-1} hat. Sei a_n die Länge einer Seite von V_n.



(a) Zeigen Sie, dass $a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$.

Hinweis: Sie dürfen den Satz des Pythagoras und weitere aus der Schule bekannte Sätze voraussetzen.

(b) Stellen Sie den Flächeninhalt f_n des Vielecks V_n in Abhängigkeit von a_n dar.

(c) Zeigen Sie, dass die Folge f_n konvergiert.

Hinweis: Sie können verwenden, dass für zwei Polygone P_1, P_2, wobei P_1 vollständig in P_2 liegt, der Flächeninhalt von P_1 immer kleiner gleich dem Flächeninhalt von P_2.

Man kann diese Folge verwenden, um π als den Grenzwert dieser Folge zu definieren.