5. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I
im Wintersemester 2021/22 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 24.11. in die Briefkästen in der Ernst-Zermelo-Straße 1.

Aufgabe 1 (4 Punkte) Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir sagen: „∞ ist ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_n$" wenn für alle $C > 0$ und alle $N \in \mathbb{N}$ ein $n > N$ existiert, so dass $C < a_n$. Zeigen Sie, dass für eine Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) ∞ ist Häufungspunkt von $(a_n)_n$.

(b) eine Teilfolge von $(a_n)_n$ konvergiert gegen ∞.

(c) $(a_n)_n$ ist nicht von oben beschränkt.

Zeigen Sie dann:
Jede Folge besitzt einen Häufungspunkt in $\overline{\mathbb{R}}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte=1+1+2 Punkte) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f\colon I \to I$ eine *Kontraktion*, d.h. es existiert ein $q \in (0,1)$, so dass $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$ für alle $x, y \in I$. Ein *Fixpunkt* von f ist ein $x \in I$, so dass $f(x) = x$.

(a) Zeigen Sie, dass f maximal einen Fixpunkt hat.

(b) Es sei $x_0 \in I$ und $x_{n+1} = f(x_n)$. Zeigen Sie, dass $(x_n)_n$ gegen den eindeutigen Fixpunkt von f konvergiert.

(c) Es sei k_n der Anteil von Kindern mit Grippe in einer Kindergartengruppe am Tag n. Wir nehmen an, dass bei jedem Kontakt zwischen zwei Kindern, von welchen ein Kind krank und eines gesund ist, eine Grippevirusübertragung möglich ist. Die Infektionswahrscheinlichkeit durch Gruppengröße sei hier $\alpha \in [0, 1)$. Außerdem sei ein Kind, wenn es krank ist, nur einen Tag lang krank, und es gibt keine Immunität nach erfolgter Krankheit. Das Modell ist dann näherungsweise $k_{n+1} = \alpha k_n(1-k_n)$. Benutzen Sie (b) um zu zeigen, dass k_n konvergiert. Was ist der Grenzwert bei gegebenem k_0?

Aufgabe 3 (4 Punkte) Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ Folgen in $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: wenn beide Folgen beschränkt sind, dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

(b) Wie verhalten sich die obigen $\limsup$, falls eine oder beide Folgen nicht beschränkt sind?

Aufgabe 4 (4 Punkte) Es sei $q \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Folge $(s_n)_n$ in $\mathbb{R}$ durch

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} q^i.$$

Zeigen Sie:

(a) Für $q \in (-1, 1)$ konvergiert $(s_n)_n$ gegen $s := \frac{1}{1-q}$.

Der Wert kann auch ohne die Kenntnis dieser Formel wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} s &= 1 + q + q^2 + q^3 + \dots \quad & | \cdot q \\ qs &= 0 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots \quad & |\text{Differenzbildung} \\ 1 &= s - qs = (1-q)s & \end{aligned}$$

(b) Wendet man die gleiche Idee auf die Folge $(s_n)_n$ mit $q > 1$ erhält man das offensichtlich unsinnige Ergebnis, dass der Grenzwert kleiner 0 ist. Erklären Sie worin das Problem besteht.

(c) Nutzen Sie die obige Idee für die Herleitung der Formel

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

für $q \neq 1$ ohne eine Induktion durchzuführen.