6. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I
im Wintersemester 2021/22 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 1.12. in die Briefkästen in der Ernst-Zermelo-Straße 1.

Aufgabe 1 (4 Punkte=2+1+1 Punkte) Für den Beweis von Proposition 2.43 (1) haben wir in der Vorlesung die Ungleichung

$$|x_i| \leq \|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$ verwendet.

(a) Zeigen Sie diese Ungleichung.

(b) Beweisen Sie die folgende Aussage aus Proposition 2.43 (2): Es seien $(x^{(k)})_k$ und $(y^{(k)})_k$ zwei konvergente Folgen in $\mathbb{R}^n$, dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \langle x^{(k)}, y^{(k)} \rangle = \langle \lim_{k\to\infty} x^{(k)}, \lim_{k\to\infty} y^{(k)} \rangle$$

(c) Es seien $(z_n)_n$ und $(w_n)_n$ zwei konvergente Folgen komplexer Zahlen. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} z_n w_n = (\lim_{n\to\infty} z_n)(\lim_{n\to\infty} w_n).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte) Es sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Finden Sie $u, v \in \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von x und y so, dass

$$(u + \mathrm{i}v)^2 = z.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte = 2+1+1 Punkte)

(a) Es sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

(b) Berechnen Sie den Grenzwert von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

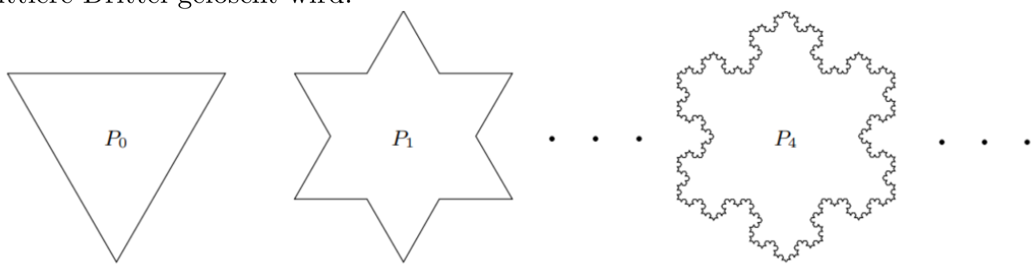
(c) Zeigen sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Aufgabe 4 (4 Punkte=2+2 Punkte)

(a) Es sei $M_0 = [0, 1]$. Wir definieren eine Folge aus Mengen M_n, wobei jedes M_n eine disjunkte Vereinigung von Intervallen ist, rekursiv wie folgt: Die Menge M_{n+1} entsteht aus M_n indem jedes der Intervalle von M_n gedrittelt wird und das mittlere entfernt wird.

Es sei s_n die Summe der Längen der Intervalle von M_n. Bestimmen sie s_n, untersuchen Sie die Folge $(s_n)_n$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(b) Es sei P_0 das Dreieck mit Seitenlänge 1. Wir definieren die Polygone P_n rekursiv wie folgt: P_{n+1} entsteht aus P_n, in dem jede Kante des Polygons gedrittelt wird, auf dem mittleren Drittel ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge gleich dem mittleren Drittel gesetzt wird und dann dieses mittlere Drittel gelöscht wird.



Es sei ℓ_n der Umfang und A_n der Flächeninhalt des Polygons P_n.

(i) Bestimmen Sie ℓ_n und zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \ell_n = \infty$ gilt.

(ii) Bestimmen Sie $A_n - A_{n-1}$. Zeigen Sie, dass A_n für $n \to \infty$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.