

7. ÜBUNGSBLATT zur Vorlesung Analysis I im Wintersemester 2021/22 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 8.12. in die Briefkästen in der Ernst-Zermelo-Straße 1.

Aufgabe 1 (4 Punkte=1+3 Punkte) Es sei $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ eine Reihe und $(s_k)_k$ die Folge ihrer Partialsummen. Wir haben in Aufgabe 3 von Übungsblatt 4 schon gesehen, dass wenn die Reihe konvergiert, dass auch $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k$ gegen den gleichen Grenzwert konvergiert.

- (a) Zeigen Sie: $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_i$.
- (b) Finden Sie eine Folge $(a_i)_i$, sodass $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ divergiert und $(\sigma_n)_n$ konvergiert.

Aufgabe 2 (4 Punkte=1+2+1 Punkte) Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} X^n$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} X^n$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} X^n$ (*Hinweis:* Setzen Sie $x \in \mathbb{R}$ ein und benutzen Sie das Quotientenkriterium.)

Aufgabe 3 (4 Punkte) Bilden Sie das Cauchy-Produkt der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} X^k$ mit sich selbst und berechnen Sie die Koeffizienten. Geben Sie dann den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} k X^k$ an und bestimmen Sie wenn möglich den Grenzwert.

Aufgabe 4 (4 Punkte) In dieser Aufgabe gehen wir von einer jährlichen Verzinsung aus.

- (a) Sie zahlen zu Beginn jeden Jahres einen festen Betrag K auf ein Sparkonto ein (angefangen bei $n = 0$). Das Konto wird mit einem festen Zinssatz $p > 0$ verzinst und die Zinsen werden dem Konto gutgeschrieben. Zeigen Sie: Das Gesamtkapital K_n nach n Jahren ist dann

$$K_n = \frac{K}{p}((1+p)^{n+1} - 1).$$

- (b) Umgekehrt haben Sie ein Darlehen D zu einem Festzinssatz $p > 0$ geliehen. Jährlich zahlen Sie die feste Rate R zurück. Finden Sie eine vergleichbare Formel zur Beschreibung der Restschulden.