

## 8. ÜBUNGSBLATT zur Vorlesung Analysis I im Wintersemester 2021/22 bei Prof. Dr. S. Goette

---

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 15.12. in die Briefkästen in der Ernst-Zermelo-Straße 1.*

**Aufgabe 1 (4 Punkte)** Beweisen oder widerlegen Sie:

- (a) Es seien  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen und  $x_0 \in \mathbb{R}$  gegeben so, dass  $fg$  an der Stelle  $x_0$  stetig ist, dann ist eine der beiden Funktionen stetig in  $x_0$ .
- (b) Es seien  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen so, dass  $f$  beschränkt ist und  $g$  stetig. Dann ist die Funktion  $fg$  in allen Punkten  $x$  mit  $g(x) = 0$  stetig.
- (c) Eine Funktion  $f$  ist stetig, genau dann wenn für alle Folgen  $(x_n)_n$  für die der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  existiert auch der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  existiert.
- (d) Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so dass  $|f|$  stetig. Dann ist auch  $f$  stetig.  
*Hinweis:* Die Funktion  $|f|$  ist gegeben durch  $|f|(x) = |f(x)|$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 2 (4 Punkte)** Es seien  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in \mathbb{Q}$ . Zeigen Sie, dass  $f = g$ , das heißt  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 3 (4 Punkte=1+3 Punkte)** Es seien  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wie in Beispiel 3.2 (6) gegeben, also

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für alle } x \in \mathbb{Q}, \text{ und} \\ 0 & \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$
$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für alle } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ wobei } \frac{p}{q} \text{ ein gekürzter Bruch sei, und} \\ 0 & \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  für kein  $x_0 \in \mathbb{R}$  existiert. An welcher Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}$  ist  $f$  stetig?
- (b) Zeigen Sie, dass  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  für alle  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  gilt. An welcher Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}$  ist  $g$  stetig?

**Aufgabe 4 (4 Punkte)** Zeigen Sie:

- (a) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $\exp(x) \geq 1 + x$ .
- (b) Für alle  $x < 1$  gilt  $\exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$ .