9. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I
im Wintersemester 2021/22 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 22.12. in die Briefkästen in der Ernst-Zermelo-Straße 1.

Aufgabe 1 (4 Punkte) Es seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f \colon [a,b] \to [a,b]$ stetig.

(a) Zeigen Sie, dass es ein $x \in [a,b]$ gibt mit $f(x) = x$.

(b) Gilt die Aussage für ein offenes oder halboffenes Intervall auch noch?

Aufgabe 2 (4 Punkte) Wir definieren den hyperolischen Sinus $\sinh \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und den hyperbolischen Kosinus $\cosh \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sinh(x \pm y) &= \sinh(x)\cosh(y) \pm \sinh(y)\cosh(x) \qquad \text{und} \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(y)\sinh(x). \end{aligned}$$

(b) Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte) Zeigen Sie Punkt (3) aus Bemerkung 3.37, also für zwei Funktionen $f, g \colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\|f + g\|_{\sup} \leq \|f\|_{\sup} + \|g\|_{\sup}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte=1+2+1 Punkte) Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 1$. Sie haben a^x in der Vorlesung mittels der Exponentialfunktion definiert, dies geht aber auch direkt. Für $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ definieren wir $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

(a) Es sei $(\frac{p_n}{q_n})_n$ eine Nullfolge in $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{p_n}{q_n}} = 1$.

(b) Es sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und es sei $(\frac{p_n}{q_n})_n$ eine Folge in $\mathbb{Q}$ mit $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = x$. Wir definieren

$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{\frac{p_n}{q_n}}.$$

Zeigen Sie, dass der Grenzwert existiert und nicht von der gewählten Folge abhängt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $(a^{\frac{p_n}{q_n}})_n$ beschränkt ist und anschließend, dass es sich um eine Cauchyfolge handelt.

(c) Zeigen Sie, dass $f(x) = a^x$ stetig ist und folgern Sie daraus, dass die Potenzgesetze aus Proposition 3.43 ebenfalls gelten.