PROBEKlausur: "Analysis I" WS 2021/2022

Tipp: Schreiben Sie die Probeklausur unter möglichst realitätsnahen Bedingungen.

Datum und Uhrzeit: - Uhr
Prüfungsdauer: 2 Stunden
Raum: -
Prüfer: Prof. Dr. Sebastian Goette

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Fach: ....

Unterschrift: ....

Anmerkungen:

- Zusätzliche Blätter sind mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Für jede Aufgabe ist eine neue Seite/Bogen zu beginnen.
- Mobiltelefone müssen ausgeschaltet und am Eingang abgegeben werden.
- Elektronische Hilfsmittel (Taschenrechner,...) jeglicher Art sind **nicht** zugelassen.
- Erlaubte Hilfsmittel: ein doppelseitig handschriftlich beschriebenes DIN A4 Blatt
- **Alle Ergebnisse sind zu begründen bzw. herzuleiten. Aussagen aus der Aufgabenstellung vorangegangener Aufgabeteile dürfen Sie im Rest der Aufgabe verwenden.**

	Max. Anzahl Punkte	Erreichte Punkte	Bemerkung
Aufgabe 1	4		
Aufgabe 2	4		
Aufgabe 3	4		
Aufgabe 4	4		
Aufgabe 5	4		
Summe:	**20**		

Note: ....

Klausur eingesehen am: ....

Unterschrift des Prüfers: ....

Aufgabe 1: (4 Punkte=1+1+1+1 Punkte)
Beantworten Sie die folgenden Fragen mit Ja oder Nein **und** geben Sie nur eine knappe Begründung, z.B. ein Gegenbeispiel (ein oder zwei Sätze; kein vollständiges Argument!). Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung nutzen, geben Sie die entsprechende Aussage jedoch inklusive Annahmen und Behauptung komplett an.

1. Es sei $(a_n)_n$ eine nichtnegative reelle Nullfolge, dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$.

2. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, so dass $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ für ein $x \in (a,b)$ gilt, dann hat nimmt f bei x ihr Minimum an.

3. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar, dann ist die Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & \text{für } x \neq x_0 \\ f'(x_0), & \text{für } x = x_0 \end{cases},$$

stetig.

4. Es sein $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und es sei $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, dann ist F differenzierbar.

Aufgabe 2: (4 Punkte=2+1+1 Punkte)
Es sei $f(x) = \tanh(2x^3 - 9x^2 + 12x - 3)$.

1. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$.
2. Hat f im Intervall $[0, 1]$ eine Nullstelle?
3. Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in [1, 2]$ gibt mit $f'(x_0) = \tanh(1) - \tanh(2)$.

Hinweis: Der Tangens hyperbolicus ist eine streng monoton wachsende Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ mit $\tanh(0) = 0$.

Aufgabe 3: (4 Punkte=2+2 Punkte)
Es seien $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei mal stetig differenzierbar mit $f(a) = g(a)$ und $f(b) = g(b)$. Zeigen Sie:

1. Es existiert ein $x \in (a, b)$ mit $f'(x) = g'(x)$.
2. Es sei $f''(x) < g''(x)$ für alle $x \in (a, b)$, dann gilt $f(x) < g(x)$ für alle $x \in (a, b)$

Aufgabe 4: (4 Punkte=1+1+1+1 Punkte)
Es sei $a < b$ und $f \in C^0([a, b])$. Zeigen Sie:

1. Es existiert genau dann eine Stammfunktion $g \in C^1([a, b])$ von f mit $g(a) = g(b) = 0$, wenn
$$\int_a^b f(x)\,dx = 0\,. \tag{*}$$

2. Es existiert genau dann eine Funktion $h \in C^2([a, b])$ mit $h'' = f$ und $h'(a) = h'(b) = 0$, wenn (*) gilt.

3. Seien h_1, $h_2 \in C^2([a, b])$ zwei Funktionen wie in (b), dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $h_2(x) = h_1(x) + c$ für alle $x \in [a, b]$.

4. Falls (*) gilt, existiert genau eine Funktion h wie in (b) mit
$$\int_a^b h(x)\,dx = 0\,.$$

Aufgabe 5: (4 Punkte=1+1+1+1 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}$ gleich 1 ist und berechnen Sie ihren Wert für alle $x \in (-1, 1)$.
2. Berechnen Sie $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)-3\sin(x)}{x^3}$
3. Finden Sie eine Stammfunktion für $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$
4. Geben Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = e^{x^2-1}$ im Punkt 0 an.