Seminar: Funktionalanalysis und Geometrie

1 Spektraltheorie des Laplaceoperators auf beschränkten Gebieten

1.1 Fortsetzungsoperatoren

Funktionalanalysis

Es ist oft einfacher Eigenschaften von $W^{k,p}(\Omega)$ für den Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$ zu beschreiben. Daher wäre es hilfreich eine Funktion $u \in W^{k,p}(\Omega)$ zu einer Funktion $v \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ fortzusetzen. Dies ist nicht immer möglich, wenn das Gebiet Ω jedoch besonders schön ist, dann kann man immer eine Fortsetzung finden. Dies ist sogar durch einen stetigen linearen Operator

$$P\colon W^{k,p}(\Omega) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$$

zu erreichen. Zeigen Sie die Existenz und die Stetigkeit dieses Operators.
Quellen: [3]: Kapitel 9.2

1.2 Die Einbettungssätze von Sobolev und Morrey

Funktionalanalysis

Wie schon bei den Hölderräumen, haben auch die Sobolevräume Beziehungen untereineander. In der Vorlesung haben wir bereits gesehen, dass für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Lipschitz-Rand die Inklusionen

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p}(\Omega)$$

kompakt sind. Die Einbettungssätze von Sobolev und Morrey beinhalten nun auch beziehungen mit verschiedenen p's. Zeigen Sie diese Einbettungssätze und folgern Sie den Satz von Rellich-Kondrachov.
Quellen: [3]: Kapitel 9.3

1.3 Regularitätstheorie

Funktionalanalysis

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass der Laplaceoperator auf beschränkten Gebieten immer schwache Eigenfunktionen hat. Unter stärkeren Voraussetzungen an den Rand des Gebiets, kann

man sogar zeigen, dass die Eigenfunktionen von der Klasse C^∞ sind. Zeigen Sie hierzu die Regularität der Lösungen es Dirichlet-Problems und wenden Sie die Resultate auf die Eigenfunktionen des Laplaceoperators an.
Quellen: [3]: Kapitel 9.6 + Theorem 9.31

2 C^*-Algebren

2.1 C^*-Algebren, Spektra und das Gel'fand-Naimark-Theorem

Funktionalanalysis, Topologie

Definieren Sie C^*-Algebren, das Spektrum eines Elements, den Spektralradius, Charaktere und Morphismen von C^*- Algebren. Motivieren Sie die Definitionen anhand des Beispiels von beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum. Das Gel'fand-Naimark-Theorem besagt, dass jede kommutative C^*-Algebren isomorph ist zu den komplexwertigen stetigen Funktionen auf einem lokalkompakten Hausdorff-Raum. Beweisen Sie dieses Theorem und erkären Sie das "Topologie-Algebra-Wörterbuch".
Quellen: [1]: Kapitel II.1.1-II.2.2, [4]: Kapitel 1.1-1.4, [7]: Tabelle Seite 3.

2.2 Der stetige Kalkül und Positivität

Funktionalanalysis

Mit Hilfe des Gel'fand-Naimark Theorems lässt sich der stetige Kalkül einer C^*-Algebra definieren, der dem Ausdruck $f(a)$ für ein normales Algebraelement a und eine stetige Funktion f Bedeutung gibt. Definieren Sie den stetigen Kalkül und beweisen Sie das Spectral-Mapping-Theorem. Zeigen Sie mit Hilfe dieses, dass das Spektrum eines Elements nicht von der Umgebenden C^*-Algebra abhängt.

Eine erste Anwendung des stetigen Kalküls ist eine intrinische Definition von Positivität in einer C^*-Algebra. Definieren Sie positive hermitesche Elemente und zeigen Sie, dass es eine zugehörige partielle Ordnung auf den hermiteschen Elementen gibt.
Quellen: [1]: Kapitel II.2.3-II.3.1, [4]: Kapitel 1.5-1.6,

2.3 Darstellungen von C^*-Algebren auf Hilberträumen und die GNS-Konstruktion

Funktionalanalysis

Wie in der Algebra üblich spielt auch in der Theorie der C^*-Algebren die Darstellungstheorie eine große Rolle. Definieren Sie Darstellungen von C^*-Algebren und beweisen Sie, dass jede C^*-Algebra ein treue Darstellung besitzt (GNS-Konstruktion). Für den Beweis werden die Begriffe Positivität und Zustand benötigt. Definieren Sie diese und beweisen Sie alle für den Beweis relevanten Eigenschaften dieser. (Sie können sich auf C^*-Algenren mit $\nVdash$ beschränken.)
Quellen: [1]: Kapitel II.6.1-II.6.4, [4]: Kapitel 2.1-2.6

2.4 Moritaäquivalenz von C^*-Algebren

Funktionalanalysis, Algebra

Der Begriff von *Isomorphie* von C^*-Alegebren ist für viele Anwendung zu stark, weshalb man sich auf eine andere Art von Äquivalenz beschränkt: Moritaäquivalenz. Zwei C^*-Algebren heißen (stark) Moritaäquivalent, wenn ihre (rechts-) Modulkategorien äquivalent sind. Definieren Sie Hilbertmoduln und starke Moritaäquivalenz via Äquivalenzbimoduln und zeigen Sie die Einführungsaussage. Zeigen Sie, dass Moritaäquivalente C^*-Algebren Homömorphe Spektren besitzen und somit insbesondere zwei kommutative C^*-Algebren Moritaäquivalent sind, genau dann wenn sie isomorph sind. (Sie können sich auf C^*-Algebren mit $\nVdash$ beschränken)
Quellen: [1]: Kapitel II.7

2.5 Hausdorff-Étale-Gruppoide

Algebra, Topologie

Einige singuläre Räume können durch (Äquivalenzklassen von) topologischen Gruppoiden beschrieben werden. Zum Beispiel werden Orbifaltigkeiten durch eigentliche Étale-Liegruppoide beschrieben. Definieren Sie Gruppoide anhand von Beispielen, topologische Gruppoide und schließlich lokal komapkte Hausdorff-Étale-Gruppoide, ihre Quotienten und Äquivalenzen. Zeigen Sie anhand von Beispielen, dass der Quotienteraum beliebig pathologisch werden kann.
Quellen: [6]: Kapitel 8 und Kapitel 9 Definition 9.1.4

2.6 Die C^*-Algebra eines Hausdorff-Étale-Gruppoids

Funktionalanalysis, Algebra, Topologie

Anstatt die Quotientenräume eines Gruppoids als solche zu betrachten, kann man die Information des Gruppoids in Form einer (nicht-kommutativen) C^*-Algebra speichern. Die Idee ist also, die (kommutative) C^*-Agebra des Quotienten durch eine größere und nicht-kommutative C^*-Algebra zu ersetzen. Definieren Sie nun die C^*-Algebra eines lokal kompakten Hausdorff-Étale-Gruppoids und zeigen Sie, dass zwei äquivalente Gruppoide zu Moritaäquivalenten C^*- Algebren führen.
Quellen: [6]: Kapitel 9

2.7 Nichtkommutative Geometrie*

Funktionalanalysis, Funktionentheorie, Topologie, Differenitalgeometrie

Alle vorherigen Themen lassen sich in dem Begriff "nichtkommutative Topologie" zusammenfassen. Wie in der Differentialgeometrie benötigen wir für den Begriff von Glattheit zusätzliche Bedingungen und Eigenschaften des zugrundeliegenden topologischen Raums. In nichtkommutativer Geometrie ist diese zusätzliche Information gegeben durch ein Spektraltripel. Spektraltripel sind das nichtkommutative Äquivalent von Riemannschen Spinmannigfaltigkeiten. Erklären Sie die Idee eines Spektraltripels anhand der Riemannsphäre, dem einfachsten Vertreter dieser Klasse.
Quellen: [7]: Kapitel 2 und 3.

3 Hodge-Theorie

3.1 Die de Rham Kohomologie

Differentialgeometrie, Topologie

Die de Rham Kohomologie ist ein zentraler Bestandteil die Topologie von glatten Mannigfaltigkeiten zu verstehen. Definieren Sie den de Rham Komplex zunächst für offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und zeigen Sie, dass das de Rham Differential einen Satz von Axiomen erfüllt. Zeigen Sie danach das Poincaré-Lemma für zusammenziehbare Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Erkären Sie danach wie man den de Rham Komplex auf Mannigfaltigkeiten globalisiert und zeigen Sie, dass die de Rham Kohomologie eine Homotopieinvariante ist.
Quellen: [2]: Kapitel 1.1, 2.1-2.2, 4.1

3.2 Der Satz von Stokes

Differentialgeometrie

Ein fundamentales Werkzeug die de Rham Kohomologie zu verstehen ist der allgemeine Satz von Stokes. Dieser verallgemeinert alle Integralsätze, die Sie aus Analysis III kennen. Definieren Sie Mannigfaltigkeiten mit Rand und das Integral einer n-Form über eine (kompakte) orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand. Beweisen Sie dann den Satz von Stokes. Und zeigen Sie damit, dass

$$\int_M : H^n_{dR}(M) \to \mathbb{R}$$

ein Isomorphismus für eine orientierbare kompakte Mannigfaltigkeit M ohne Rand ist.
Quellen: [2]: Kapitel 3

3.3 Das duale des de Rham Differentials

Funktionalanalysis, Differentialgeometrie

Einer kompakten orientierbaren Riemannschen Mannigfaltigkeit lässt sich mit Hilfe der Metrik, des Riemannschen Volumenelelemnts und des Integrals ein Skalarprodukt auf dem de Rham Komplex definieren. Die Hilbertraum-Vervollständigung entspricht einer Verallgemeinerung der quadratintegrieberaren Funktionen. Definieren Sie diesen Hilbertraum und die zugehörigen Sobolevräume und zeigen Sie, dass diese nicht von der gewählten Metrik abhängen. Das de Rham Differential besitzt einen Adjungierten Operator. Berechnen Sie diesen und definieren Sie den zugehörigen Laplace operator.

3.4 Das Hodge-Theorem für Differentialformen

Funktionalanalysis, Differentialgeometrie

Das Hodge-Theorem besagt, dass das Spektrum des Laplaceoperators auf einer kompakten Riemannchen Mannigfaltigkeit (M, g) diskret ist und die Eigenvektoren eine Hilbertbasis von $L^2(M, g)$ bilden. Zeigen Sie das Hodge-Theorem unter der Annahme, dass der Integralkern der Wärmeleitungsgleichung

glatt ist.
Quellen: [5]: 1.3.1-1.3.3 (Das meiste aus 1.3.1 ist aus der Vorlesung Funktionalanalysis bekannt)

3.5 Die Hodge-Zerlegung des de Rham Komplexes

Funktionalanalysis, Differentialgeometrie

In der Differentialgeometrie ist man weniger an der L^2-Theorie einer Mannigfaltigkeit, sonder an der C^∞-Theorie interessiert. Mit Hilfe der Wärmleitungsgleichung kann man zeigen, dass alle Eigenvektoren des Laplaceoperators sogar glatt sind. Zeigen Sie diese Aussage. Und zeigen Sie damit die Hodge-Zerlegung des de Rham Komplexes und schließlich, dass der Kern des Laplaceoperators isomorph zur de Rham Kohomologie ist.
Quellen: [5]: 1.3.4, 1.5

Literatur

[1] Blackadar, B.: *Operator Algebras: Theory of C*-Algebras and von Neumann Algebras* . Springer, 2005.

[2] Bott, R., Tu, L.W.: *Differential Forms in Algebraic Topology.* Springer, 1982.

[3] Brezis, H.: *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Springer, 2010.

[4] Dixmier, J.: *C^*-Algebras.* North-Holland, 1982.

[5] Rosenberg, S.: *The Laplacian on a Riemannian Manifold.* Cambridge University Press, 1997.

[6] Sims, A., Szabó, G., Williams, D.: *Operator Algebras and Dynamics: Groupoids, Crossed Products, and Rokhlin Dimension.* Birkhäuser, 2020.

[7] Várilly, J. C. : *An Introduction to Noncommutative Geometry.* European Mathematical Society, 2006.