1. ÜBUNGSBLATT zur Vorlesung Analysis III
im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. Sebastian Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie ihre Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Abgabe: Montag, 31.10.2022 vor der Vorlesung.

Präsenzübung 1 Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir definieren eine Abbildung $\bar{\mu}\colon \mathcal{P}(M) \to [0, \infty]$ durch

$$\bar{\mu}(B) \coloneqq \inf\{\, \mu(A) \mid A \in \mathcal{A}, B \subset A \,\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\bar{\mu}$ ist ein äußeres Maß.

(b) Alle $A \in \mathcal{A}$ sind $\bar{\mu}$-messbar.

(c) Für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$.

Präsenzaufgabe 2 Es sei M eine Menge. Wir betrachten $\mu\colon \mathcal{P}(M) \to [0, \infty]$ mit

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A = \emptyset, \\ 1, & \text{falls } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass μ ein äußeres Maß auf M definiert.

(b) Bestimmen Sie die Menge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(M)$ aller μ-messbaren Mengen und überzeugen Sie sich, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 1 (10 Punkte = 6+4 Punkte) Es sei M eine Menge. Zeigen Sie:

(a) Die Menge

$$\mathcal{A} = \{\, A \subseteq M \mid A \text{ abzählbar oder } M \setminus A \text{ abzählbar} \,\}$$

ist eine σ-Algebra.

(b) Sei

$$\mathcal{E} = \{\, A \subseteq M \mid \#A < \infty \,\},$$

dann ist $\mathcal{A}$ aus der vorherigen Teilaufgabe die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra.

Aufgabe 2 (10 Punkte = 2+2+2+4 Punkte) Wir definieren Teilmengen $A_i \subseteq \mathbb{R}$ für $i \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}$ durch

$$A_0 \coloneqq [0,1], \qquad A_k \coloneqq A_{k-1} \setminus \bigcup_{i=0}^{4^k-1} \left(4^{-k}(i+1/2) - 4^{-2k}, 4^{-k}(i+1/2) + 4^{-2k}\right) \quad \text{und} \quad A \coloneqq \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k.$$

(a) Zeichnen Sie A_0, A_1 und A_2.

Zeigen Sie:

(b) A ist kompakt,

(c) das Innere $\mathring{A}$ von A ist leer,

(d) $\lambda^1(A) > 0$.

Aufgabe 3 (10 Punkte = 4+3+3 Punkte) Sei $\mu_i \colon \mathcal{P}(M) \to [0,\infty]$ eine Folge äußerer Maße.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mu(A) \coloneqq \sup\{\, \mu_i(A) \mid i \in \mathbb{N} \,\}$$

ein äußeres Maß definiert.

(b) Es gelte nun zusätzlich $\mu_i \leq \mu_j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \leq j$. Wenn $A \subseteq M$ für alle $i \in \mathbb{N}$ μ_i-messbar ist, dann ist A auch μ-messbar.

(c) Was passiert, wenn wir in der vorherigen Teilaufgabe auf die Bedingung „$\mu_i \leq \mu_j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \leq j$“ verzichten?

Aufgabe 4 (10 Punkte = 7+3 Punkte) Es sei (M,d) ein metrischer Raum. Für $A \subseteq M$ definieren wir den *Durchmesser (diameter)*

$$\operatorname{diam} A \coloneqq \begin{cases} \sup\{\, d(x,y) \mid x, y \in A \,\} \in [0,\infty], & \text{falls } A \neq \emptyset, \\ 0, & \text{falls } A = \emptyset. \end{cases}$$

Für $s > 0$ und $\delta > 0$ definieren wir

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \coloneqq \inf\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} C_i}{2}\right)^s \mid C_i \subseteq M,\ \operatorname{diam} C_i < \delta,\ A \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} C_i \right\},$$

wobei eine Konstante ist. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{H}^s_\delta$ ist ein äußeres Maß,

(b) $\mathcal{H}^s_{\delta_1} \geq \mathcal{H}^s_{\delta_2}$ falls $0 < \delta_1 < \delta_2$,