2. ÜBUNGSBLATT zur Vorlesung Analysis III
im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. Sebastian Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie ihre Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Abgabe: Montag, 7.11.2022 vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (10 Punkte) Es sei M eine Menge, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(M)$ und $\lambda\colon \mathcal{C} \to [0,\infty]$ gegeben mit $\emptyset \in \mathcal{C}$ und $\lambda(\emptyset) = 0$. Zeigen Sie, dass

$$\mu(A) \coloneqq \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(C_i) \;\middle|\; C_i \in \mathcal{C} \text{ für alle } i,\ A \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} C_i \right\}$$

ein äußeres Maß auf M definiert.
Hinweis: Für $\emptyset \subseteq [0,\infty]$ gilt $\inf \emptyset = \infty$.

Aufgabe 2 (10 Punkte = 2+6+2 Punkte) Auf einem metrischen Raum (M,d) seien die äußeren Maße $\mathcal{H}^s_\delta$ aus Aufgabe 4 von Blatt 1 definiert, dann ist der Grenzwert

$$\mathcal{H}^s = \lim_{\delta \to 0} H^s_\delta$$

wieder ein äußeres Maß nach Aufgabe 3 von Blatt 1. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{H}^s$ ist metrisch.

(b) Falls $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ für ein $s \in (0,\infty)$, so ist $\mathcal{H}^t(A) = 0$ für alle $t > s$.

(c) Für jede Teilmenge $A \subseteq M$ existiert eine eindeutige Zahl $d(A) \in [0,\infty]$, sodass

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(A) &= \infty && \text{für alle } s \in (0, d(A)), \\ \mathcal{H}^s(A) &= 0 && \text{für alle } s \in (d(A), \infty). \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (10 Punkte = 4 + 2 + 4 Punkte) Es sei $\mathcal{H}^s$ das äußere Maß aus der vorherigen Aufgabe auf $\mathbb{R}^n$ und sei $d\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ wie dort definiert.

(a) Für $A \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ sei

$$rA \coloneqq \{\, rx \mid x \in A \,\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}^s(rA) = r^s \cdot \mathcal{H}^s(A)$ gilt.

(b) Folgern Sie $d(A) = d(rA)$.

(c) Gegeben seien $\mathcal{H}^d$-messbare Mengen $A_1, \dots, A_k \subseteq \mathbb{R}^n$, wobei $d \coloneqq d(A_1 \cup \dots \cup A_k) > 0$ und $\mathcal{H}^d(A_i \cap A_j) = 0$ für $1 \le i < j \le k$. Es gebe ein $r > 0$, sodass jedes $A_1, \dots, A_k$ zu $r(A_1 \cup \dots \cup A_k)$ isometrisch ist. Berechnen Sie d anhand von r und k.

Aufgabe 4 (10 Punkte = 4 + 6 Punkte) Es sei μ ein äußeres Maß auf M. Für $A, B \subseteq M$ definiere die symmetrische Differenz durch

$$\Delta(A,B) = A \setminus B \cup B \setminus A.$$

Es sei ferner

$$\mathcal{E}(\mu) \coloneqq \{\, A \subseteq M \mid \mu(A) < \infty \,\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Auf $\mathcal{E}(\mu)$ definiert

$$A \sim B \Leftrightarrow \mu\big(\Delta(A,B)\big) = 0$$

eine Äquivalenzrelation.

(b) Auf der Menge der Äquivalenzklassen $\mathcal{E}(\mu)/\sim$ definiert

$$d_\mu\big([A],[B]\big) \coloneqq \mu\big(\Delta(A,B)\big) \in [0,\infty)$$

eine Metrik.