3. ÜBUNGSBLATT zur Vorlesung Analysis III
im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. Sebastian Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie ihre Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Abgabe: Montag, 14.11.2022 vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (10 = 2+2+2+2+2 Punkte) Wir wollen beweisen, dass jede Isometrie $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ von der Form $F(x) = Ax + b$ mit $A \in O(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$ ist. Dazu betrachten wir $G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $G(x) = F(x) - F(0)$. Zeigen Sie:

(a) G ist eine Isometrie.

(b) G bildet Geraden auf Geraden ab.

(c) $G(\lambda x) = \lambda G(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$.

(d) G erhält das Skalarprodukt.

(e) G ist linear.

Hinweis: Sie dürfen die Aussagen der vorausgeganenen Teilaufgaben benutzen, auch wenn Sie sie nicht bewiesen haben.

Aufgabe 2 (10 = 2+2+2+2+2 Punkte) Es sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton steigend. Wir definieren ein äußeres Maß μ auf $\mathbb{R}$ wie in Aufgabe 1 von Blatt 2. Dazu sei $\mathcal{C} = \{\, (a,b) \mid a < b \,\} \cup \{\emptyset\}$, $\lambda(\emptyset) = 0$ und

$$\lambda((a,b)) = \lim_{x \nearrow b} F(x) - \lim_{x \searrow a} F(x) \,.$$

Zeigen Sie:

(a) $\mu([a,b]) = \lim_{x \searrow b} F(x) - \lim_{x \nearrow a} F(x)$.

(b) $\mu((a,b)) = \lambda((a,b))$.

(c) Alle Intervalle sind μ-messbar

(d) μ is Radon-Maß

(e) Jedes Radon-Maß auf $\mathbb{R}$ entsteht auf diese Weise.

(f*) Wann liefern zwei monotone Funktionen F und G dasselbe äußere Maß? (2 Zusatzpunkte)

.

Aufgabe 3 (10 = 4+2+4 Punkte) Es seinen $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ μ-messbare Funktionen. Zeigen Sie, dass die drei Mengen

$$\begin{aligned}
\{f < g\} &\coloneqq \{x \in M \mid f(x) < g(x)\} \\
\{f \leq g\} &\coloneqq \{x \in M \mid f(x) \leq g(x)\} \\
\{f = g\} &\coloneqq \{x \in M \mid f(x) = g(x)\}
\end{aligned}$$

μ-messbar sind.

Aufgabe 4 (10 = 5+5 Punkte) Es sei μ ein äußeres Maß auf einer Menge M. Zeigen Sie:

(a) „μ-fast überall gleich“ definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Funktionen von M nach $\mathbb{R}$.

(b) Sei f eine μ-messbare Funktion von M nach $\mathbb{R}$ und sei $g = f$ fast überall. Dann ist auch g μ-messbar.