4. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis III
im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. Sebastian Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie ihre Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Abgabe: Montag, 21.11.2022 vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (10 = 6+4 Punkte) Zeigen Sie:

(a) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, dann ist $f\chi_{[a,b]}$ Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\int_{[a,b]} f d\lambda^1 = \int_a^b f(x)dx.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass jede Riemann integrierbare Funktion Lebesgue-messbar ist.

(b) Die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist auf $\mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar, aber nicht Lebesgue integrierbar.

Aufgabe 2 (10 = 3+4+3 Punkte) Es sei M eine Menge, $x \in M$ und δ_x das Dirac-Maß aus Beispiel 10.3 (2). Sei $f\colon M \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass f eine δ_x-messbare Funktion ist.

(b) Bestimmen Sie $\int_M f d\delta_x$.

(c) Unter welchen Bedingungen ist f δ_x-integrierbar?

Aufgabe 3 (10 = 4+3+3 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Wenn $f\colon M \to [0,\infty]$ μ-integrierbar ist, dann gilt

$$\mu\bigl(\{x \in M \mid f(x) \geq s\}\bigr) \leq \frac{1}{s} \int_M f d\mu$$

für alle $s \in (0,\infty)$.

(b) Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos(x^2)$ Lebesgue-integrierbar?

(c) Ist f uneigentlich Riemman-integrierbar?

Aufgabe 4 (10 = 3+3+4 Punkte) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ eine λ^n-messbare Funktion.

(a) Bestimmen Sie (nicht notwendigerweise disjunkte) λ^n-messbare Teilmengen $A_n^\pm \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass

$$f^\pm(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_{A_n^\pm}(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

(b) Schreiben Sie $f^\pm$ als abzählbare Summe von Funktionen $f_k^\pm \in T^+(\lambda^n)$.

Eine Funktion $g\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ heiße Borel-messbar, wenn für jede Borelmenge $B \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ auch $g^{-1}(B) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Borelmenge ist.

(c) Finden Sie Borel-messbare Funktionen $g, h\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $g \leq f \leq h$, sodass λ^n-fast überall $g = h$ gilt.