5. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis III
im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. Sebastian Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie ihre Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Abgabe: Montag, 28.11.2022 vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (10 = 2+3+2+3 Punkte) Es sei μ ein äußeres Maß auf M. Wir definieren

$$L^1(M,\mu) = \{\, f\colon M \to \mathbb{R} \mid f \ \mu\text{-integrierbar} \,\}/\sim,$$

wobei $f \sim g$ genau dann, wenn μ-fast überall $f = g$ gilt. Zeigen Sie:

(a) Die Äquivalenzrelation $\sim$ ist verträglich mit punktweiser Addition und Multiplikation mit $r \in \mathbb{R}$.

(b) $L^1(M,\mu)$ bildet mit den Verknüpfungen aus (a) einen Vektorraum.

(c) Für $[f] \in L^1(M,\mu)$ verschwindet

$$\int_M |f| \, \mathrm{d}\mu \tag{1}$$

genau dann, wenn $0 \sim f$.

(d) Formel (1) definiert eine Norm auf $L^1(M,\mu)$, siehe Definition 6.37.

Aufgabe 2 (10 = 3+2+2+3 Punkte) Es sei μ ein äußeres Maß auf M und es sei $\vartheta\colon M \to [0,\infty]$ eine μ-messbare Funktion. Wir definieren

$$\mu_\vartheta(E) := \inf\left\{ \int_A \vartheta \, \mathrm{d}\mu \,\middle|\, A \ \mu\text{-messbar}, E \subseteq A \right\}.$$

Zeigen Sie:

(a) μ_ϑ ist ein äußeres Maß auf M.

(b) Sei E μ-messbar, dann gilt

$$\mu_\vartheta(E) = \int_E \vartheta \, \mathrm{d}\mu.$$

(c) Alle μ-messbaren Mengen sind auch μ_ϑ-messbar.

(d) Es sei $f\colon M \to [0,\infty]$ eine μ-messbare Funktion. Dann ist f auch μ_ϑ-messbar und es gilt

$$\int_M f \, \mathrm{d}\mu_\vartheta = \int_M f\vartheta \, \mathrm{d}\mu.$$

(e*) Finden Sie λ^1-integrierbare Funktionen $f, \vartheta\colon \mathbb{R} \to [0,\infty]$, sodass f nicht λ^1_ϑ-integrierbar ist. (2 Zusatzpunkte).

Aufgabe 3 (10 = 5+3+2 Punkte) Sei μ ein äußeres Maß auf M.

(a) Sei $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge μ-integrierbarer Funktionen mit $\sum_{k=0}^{\infty}\int_M |g_k|\,\mathrm{d}\mu < \infty$. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$ wieder eine μ-integrierbare Funktion ist und dass folgende Gleichung gilt:

$$\int_M \sum_{k=0}^{\infty} g_k\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{\infty}\int_M g_k\,\mathrm{d}\mu.$$

(b) Zeigen Sie, dass für beliebige positive reelle Zahlen $x, y > 0$ gilt:

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t^y}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+ny}.$$

(c) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Aufgabe 4 (10 = 7+3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von

$$f(t) := \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

explizit und geben Sie eine geschlossene Form von f an (d.h. keine Integraldarstellung).
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\int_a^b \mathrm{e}^{cx}dx = c^{-1}(\mathrm{e}^{cb} - \mathrm{e}^{ca})$ für alle $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(b) Berechnen Sie das uneigentliche Riemann-integral

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$