6. ÜBUNGSBLATT zur Vorlesung Analysis III
im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. Sebastian Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie ihre Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Abgabe: Montag, 05.12.2022 vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (10 = 2+4+2+2 Punkte) Sei A die Menge von Aufgabe 2 auf Blatt 01.

(a) Zeigen Sie, dass die charakteristischen Funktionen $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ und χ_A messbar sind.

(b) Sind die beiden Funktionen aus Teil (a) Riemann-integrierbar?

(c) Gibt es eine Riemann-integrierbare Funktion, die λ^1-fast überall mit $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ übereinstimmt?

(d) Gibt es eine Riemann-integrierbare Funktion, die λ^1-fast überall mit χ_A übereinstimmt?

Aufgabe 2 (10 = 3+7 Punkte) Das Standardsimplex im $\mathbb{R}^n$ sei die folgende Menge

$$\Delta^n \coloneqq \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n x_j \leq 1,\ x_j \geq 0 \text{ für alle } 1 \leq j \leq n \right\}.$$

(a) Fertigen Sie ein Skizze für Δ^1, Δ^2 und Δ^3 an.

(b) Berechnen Sie das Volumen $\lambda^n(\Delta^n)$.

Aufgabe 3 (10 = 5+5 Punkte) Für eine kompakte Menge im $\mathbb{R}^n$ definieren wir den *Schwerpunkt* $s = s(K) \in \mathbb{R}^n$ als den Vektor mit den Einträgen

$$s_j \coloneqq \frac{1}{\mathrm{Vol}(K)} \int_K x_j \,\mathrm{d}\lambda^n(x), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt

(i) der oberen Halbkugel $\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \geq 0, ||x|| \leq 1 \}$,

(ii) des Simplex Δ^3 wie definiert in Aufgabe 2.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Es sei $D^2 = \{ x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| \leq 1 \}$ die Einheitsscheibe im $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{D^2} \log(||x||) \,\mathrm{d}\lambda^2(x).$$

Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten.