7. ÜBUNGSBLATT zur Vorlesung Analysis III
im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. Sebastian Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie ihre Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Abgabe: Montag, 12.12.2022 vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (10 = (4+4+2 Punkte)

(a) Für $p > 0$ und $q > 0$ definieren wir

$$B(p,q) := \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t.$$

Beweisen Sie, dass der Integrant Lebesgue-integrierbar ist und beweisen Sie die Identität

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Transformation $(0,\infty)^2 \to (0,\infty)\times(0,1)$, $(t,\tau) \mapsto (t+\tau, t/(t+\tau))$.

(b) Für $a, b, \alpha, \beta > 0$ definieren wir das (offene) *verallgemeinerte Simplex* als die Menge

$$\Delta_{a,b}^{\alpha,\beta} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x, y > 0,\ \left(\frac{x}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{b}\right)^\beta < 1 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass für $p > 0$ und $q > 0$ die Funktion $(x,y) \mapsto x^{p-1}y^{q-1}$ auf $\Delta_{a,b}^{\alpha,\beta}$ Lebesgue-integrierbar ist und berechnen Sie das Integral

$$\int_{\Delta_{a,b}^{\alpha,\beta}} x^{p-1}y^{q-1}.$$

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt einer Ellipse

$$\mathcal{E}_{a,b} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 < 1 \right\}.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte) Sei K eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $T \in GL_n(\mathbb{R})$ eine invertierbare, lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt, definiert in Aufgage 3 auf Blatt 06, sich kovariant transformiert. Mit anderen Worten, es gilt:

$$s_{T(K)} = T(s_K).$$

Aufgabe 3 (10 = 4+2+4 Punkte) Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv mit $L(\gamma) < \infty$, wobei L die Bogenlänge aus Definition 8.8 bezeichne. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $[a,b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto L(\gamma|_{[a,t]})$ ist stetig und streng monoton steigend.

(b) Es gibt eine Umparametrisierung, das heißt einen Homöomorphismus $\varphi\colon [0, L(\gamma)] \to [a,b]$, sodass für alle $0 \le s \le t \le b$ gilt
$$L\left((\gamma \circ \varphi)|_{[s,t]}\right) = t - s.$$

(c) Für das eindimensionale Hausdorffmaß $\mathcal{H}^1$ gilt
$$2\mathcal{H}^1(\operatorname{im}\gamma) \le L(\gamma).$$

Aufgabe 4 (10 = 5+5 Punkte) Es sei $\gamma\colon [0,l] \to \mathbb{R}^n$ stetig, injektiv und $L(\gamma) < \infty$. Zeigen Sie:

(a) $||\gamma(t) - \gamma(s)|| \le 2\mathcal{H}^1(\gamma([s,t]))$ für alle $0 \le s \le t \le l$.

(b) Es gilt $L(\gamma) \le 2\mathcal{H}^1(\operatorname{im}\gamma)$.

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass es in der Definition von $\mathcal{H}^1_\delta$ in Aufgabe 4 von Blatt 1 ausreicht, offene Mengen $C_i \subseteq \mathbb{R}^n$ zu betrachten und nutzen Sie die Kompaktheit von $\gamma([s,t])$ aus.