8. ÜBUNGSBLATT zur Vorlesung Analysis III
im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. Sebastian Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie ihre Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Abgabe: Montag, 19.12.2022 vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (10 = (4+2+4 Punkte) Seien $a, b > 0$ und $R > r > 0$ reelle Zahlen. Der *Ellipsoid* $\mathcal{E}$ und der zwei-dimensionale *Torus* T sind gegeben durch

$$\mathcal{E} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \right\} \quad \text{und} \quad T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2 \right\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{E}$ und T sind Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^3$.

(b) Berechnen Sie das von $\mathcal{E}$ eingeschlossene Volumen.

(c) Berechnen Sie die Oberfläche des Torus.

Aufgabe 2 (10 = 2+4+4) Punkte) Sei $GL_2(\mathbb{R})$ die Menge aller Matrizen $A \in M_2(\mathbb{R})$ mit $\det(A) \neq 0$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $g \in GL_2(\mathbb{R})$ ist die *Linksmultiplikation* $\ell_g \colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ gegeben durch $\ell_g(A) = g \cdot A$ ein Diffeomorphismus.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Determinante von ℓ_g.

(c) Zeigen Sie, dass es ein $k \in \mathbb{R}$ gibt, sodass das Maß $\lambda^4_{\det(\cdot)^k}$ auf $GL_2(\mathbb{R})$ unter ℓ_g invariant ist.

(d*) Wiederholen Sie die obigen Schritte für die Rechtsmultiplikation $r_g \colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ mit $r_g A = A \cdot g$. Ist das Maß μ aus (c) auch unter r_g invariant? (Je einen zusätzlichen Punkt pro Teilaufgabe).

Aufgabe 3 (10 Punkte) Sei $h > 0$ und $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(r, \vartheta) := (r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta), h\vartheta).$$

Zeigen Sie, dass die *Wendelfläche* $W := \varphi(\mathbb{R}^2)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist und berechnen Sie die Gramsche Determinante von φ. Berechen Sie desweiteren folgendes Integral

$$\int_W \exp(-||(x,y,z))||^2).$$

Aufgabe 4 (10 Punkte) Sei $p, q, r > 0$ reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass die Funktion $|x|^{p-1}|y|^{q-1}|z|^{r-1}$ über S^2 integrierbar ist und dass in diesem Fall gilt:

$$\int_{S^2} |x|^{p-1}|y|^{q-1}|z|^{r-1} = 2\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q+r}{2}\right)}.$$