9. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis III
im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. Sebastian Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie ihre Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Auf diesem Zettel werden 40 Punkte als 100% gezählt, d.h. es gibt 40 Zusatzpunkte.

Abgabe: Montag, 09.01.2023 vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (10 Punkte) Sei $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie bezüglich der euklidischen Metrik und sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass $T(M)$ ebenfalls eine Untermannigfaltigkeit ist und zeigen Sie

$$\mathrm{vol}_{T(M)} = T_* \mathrm{vol}_M .$$

Aufgabe 2 (10 Punkte) Sei $p = (0, 0, a) \in \mathbb{R}^3$ und $S_r^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid ||x|| = r\}$. Man zeige

$$u(p) := \int_{S_r^2} \frac{\rho}{||x-p||} = \begin{cases} 4\pi\rho r, & \text{falls } |a| \le r, \\ \frac{4\pi r^2 \rho}{|a|}, & \text{falls } |a| \ge r. \end{cases}$$

Aufgabe 3 (10 = 3+4+3 Punkte) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir berachten die Funktionenräume

$$\begin{aligned} BC^0(\Omega) &= \{\, f \in C^0(\Omega) \mid \sup_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty \,\}, \\ C_c^0(\Omega) &= \{\, f \in C^0(\Omega) \mid \exists K \text{ kompakt mit } f|_{\Omega\setminus K} = 0 \,\}, \\ C_0^0(\Omega) &= \{ f \in C^0(\Omega) \mid \forall \varepsilon > 0\, \exists K \subseteq \Omega \text{ kompakt mit } \forall x \in \Omega \setminus K : |f(x)| < \varepsilon \}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) $\big(BC^0(\Omega), ||\cdot||_{\sup}\big)$ ist ein Banachraum.

(b) Der Abschluss von $C_c^0(\Omega)$ in $BC^0(\Omega)$ ist $C_0^0(\Omega)$.

(c) Der Raum $C_0^0(\Omega)$ ist ein Banachraum, $C_c^0(\Omega)$ jedoch nicht.

Aufgabe 4 (10 = 5+5 Punkte) Wir benutzten die Notation von Aufgabe 3. Für $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ bezeichne mit $\bar{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Fortsetzung durch 0, das heißt

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } x \notin \Omega. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Für $f \in C_0^0(\Omega)$ ist $\bar{f}$ stetig.

(b) Sei Ω beschränkt und $f \in C^0(\Omega)$. Wenn $\bar{f}$ stetig ist, gilt $\bar{f} \in C_0^0(\Omega)$.

Aufgabe 5 (10 = 4+3+3 Punkte) Es sei μ ein äußeres Maß auf M und es gelte $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Zeigen Sie:

(a) Folgern Sie aus der Hölderungleichung, dass $\|fg\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^q} \|g\|_{L^r}$.

(b) Falls $\mu(M) < \infty$, so gilt $\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^q}\, \mu(M)^{1/r}$. Insbesondere folgt dann $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$ aus $q \geq p$.

(c) Falls $\mu(M) < \infty$, so gilt $\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$ für alle $f \in L^\infty(M)$

Aufgabe 6 (10 Punkte) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. Zeigen Sie, dass $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ genau dann, wenn $f \cdot \varphi$ integrierbar ist für alle $\varphi \in C^0_c(\Omega)$.

Aufgabe 7 (10 = 2+2+3+3) Punkte) Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die *Faltung* $f * g$ durch

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\, \mathrm{d}\lambda^n(y).$$

Zeigen Sie:

(a) $||f * g||_1 \leq ||f||_1 \cdot ||g||_1$ und folgern Sie $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(b) Die Faltung ist assoziativ und kommutativ, das heißt, es gilt:

$$(f * g) * h = f * (g * h) \quad \text{und} \quad f * g = g * f.$$

(c) Angenommen, es gelte zusätzlich $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und dass für jeden Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mit $|\alpha| \leq k$ die partielle Ableitung $\partial^\alpha g$ integrierbar ist, dann ist $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und es gilt die Gleichung

$$\partial^\alpha (f * g) = f * \partial^\alpha g.$$

Die Aufgabe ist mit diesen Voraussetzungen nicht lösbar. Es muss statdessen angenommen werden, dass $\partial^\alpha g$ beschränkt ist.

(d) $\operatorname{supp}(f * g) \subseteq \overline{\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)} := \overline{\{x + y \,|\, x \in \operatorname{supp}(f), y \in \operatorname{supp}(g)\}}$.

(e*) Gibt es eine Funktion $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $f * \varphi = f$ für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$? (3 Zusatzpunkte)

Aufgabe 8 (10 = 7+3 Punkte) Eine Folge glatter Funktionen $\delta_n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *Folge von Dirac-Kernen*, wenn folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

$$\operatorname{supp}(\delta_n) \subseteq B_{1/n}(0) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \delta_n(x)\, \mathrm{d}\lambda^n(x) = 1.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $||f - f * \delta_n||_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(b) Folgern Sie, dass die Menge $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ aller glatten Funktionen mit kompakten Träger dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt.

Hinweise:

- Zeigen Sie für (a) die Aussage zuerst für charackteristische Funktionen von Quadern und reduzieren Sie den allgemeinen Fall darauf.

- Argumentieren Sie, warum es für (b) genügt nur kompakt getragene Funktionen zu betrachten und reduzieren Sie für diese Funktionen den allgemeinen Fall auf $p = 1$.

Wir wünschen Ihnen fröhliche Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!