10. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis III
im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. Sebastian Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie ihre Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Abgabe: Montag, 16.01.2023 vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (10 = (4+4+2 Punkte)

(a) Konstruieren Sie eine Funktion $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, sodass $f \in L^1(\mathbb{R})$, aber $f^p \notin L^1(\mathbb{R})$ für alle $p > 1$.

(b) Konstruieren Sie eine Funktion $f\colon (-\infty,0] \to [0,\infty)$, sodass $f \in L^1(\mathbb{R})$, aber $f^p \notin L^1(\mathbb{R})$ für alle $0 < p < 1$.

(c) Konstruieren Sie für jedes $p \geq 1$ eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ mit $f \in L^p(\mathbb{R})$, aber $f \notin L^q(\mathbb{R})$ für alle $q \neq p$.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

an jedem Punkt differenzierbar ist, aber nicht schwach differenzierbar ist.

Aufgabe 3 (10 = 5+5 Punkte) Zeichnen Sie die folgenden Funktionen in $L^2(-\pi,\pi)$ und berechnen Sie ihre Fourierreihen:

(a) $f(x) = x/\pi$.

(b) Für $a < \pi$:

$$f(x) = \begin{cases} x/a, & \text{falls } x \in [-a,a], \\ \frac{\pi-x}{\pi-a}, & \text{falls } x \in (a,\pi), \\ \frac{-(\pi+x)}{\pi-a}, & \text{falls } x \in (-\pi,-a). \end{cases}$$

Aufgabe 4 (10 = 2+2+2+2+2 Punkte) Betrachten Sie den Raum aller 2π-periodischen glatten Funktionen

$$C^\infty(S^1;\mathbb{C}) = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) \,\middle|\, \varphi(x+2\pi) = \varphi(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir interpretieren $C^\infty(S^1;\mathbb{C}) \subseteq L^2((-\pi,\pi);\mathbb{C})$ indem wir φ mit $[\varphi]$ identifizieren. Eine Funktion $f \in L^2((-\pi,\pi);\mathbb{C})$ heiße *schwach differenzierbar auf S^1 mit Ableitung $g \in L^2((-\pi,\pi);\mathbb{C})$*, wenn die Gleichung

$$\int_{-\pi}^{\pi} f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda^1 = -\int_{-\pi}^{\pi} g\varphi \,\mathrm{d}\lambda^1$$

für alle $\varphi \in C^\infty(S^1;\mathbb{C})$ erfüllt ist.

Zeigen Sie:

(a) $C^\infty(S^1;\mathbb{C})$ liegt dicht in $L^2(-\pi,\pi)$ und aus $\int_{-\pi}^{\pi} f\varphi = 0$ für alle $\varphi \in C^\infty(S^1;\mathbb{C})$ folgt $f = 0$.

Sei nun f schwach differenzierbar auf S^1 mit Ableitung g. Zeigen Sie weiter:

(b) f ist auf $(-\pi,\pi)$ schwach differenzierbar mit Ableitung g.

(c) Es gilt $\hat{g}_k = ik\hat{f}_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(d) Eine Funktion $f \in L^2((-\pi,\pi);\mathbb{C})$ ist genau dann schwach differenzierbar auf S^1, wenn $(k\hat{f}_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$.

(e) Die Funktion $f(x) = x$ ist schwach differenzierbar auf $(-\pi,\pi)$, aber nicht schwach differenzierbar auf S^1.