11. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis III
im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. Sebastian Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie ihre Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Abgabe: Montag, 23.01.2023 vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (10 = 3+4+3 Punkte) Wählen Sie eine der zwei Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aus Bemerkung 7.11 (3), (4) und bezeichnen Sie diese mit h. Dann sind $\partial_x h$ und $\partial_y h$ fast überall definiert.

(a) Gilt $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$?

(b) Gilt $\partial_x h$, $\partial_y h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$?

(c) Ist h schwach differenzierbar?

Aufgabe 2 (10 Punkte) Es sei $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Halbmetriken auf einer Menge M und es sei d wie in Lemma 12.28 konstruiert. Wir nehmen an, dass d eine Metrik ist.

(a) Beweisen Sie Lemma 12.28 (4).

(b) Seien $F_k\colon M \to M_k$ wie in Bemerkung 12.31 gegeben, insbesondere gelte $(*)$. Es sei $(p_i)_i$ eine Cauchy-Folge in (M, d) und es existiere ein $q \in M$, sodass

$$F_k(q) = \lim_{i\to\infty} F_k(p_i) \in M_k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(p_i)_i$ in (M, d) gegen q konvergiert.

Aufgabe 3 (10 = 3+4+3 Punkte) Es sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $V = BC^\infty(\Omega)$, $C^0(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, oder $L^1_{loc}(\Omega)$ einer der Räume Ihrer Wahl aus Beispiel 12.32 mit Halbnormen $||\cdot||_k$ und zugehöriger Fréchet-Metrik d.

(a) Sind die $||\cdot||_k$ Normen? Ist d eine Metrik?

(b) Finden Sie vollständige Funktionenräume $(W_k, ||\cdot||_{W_k})$ und Abbildungen $F_k\colon V \to W_k$, sodass

$$\max\{||f||_0, \dots, ||f||_k\} = ||F_k(f)||_{W_k}$$

für alle k und alle $f \in V$ gilt.

(c) Sei $(v_i)_i$ eine Cauchy-Folge in (V, d). Zeigen Sie, dass ein $v \in V$ existiert, sodass

$$\lim_{i\to\infty} F_k(v_i) = F_k(v)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Es sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ zweimal schwach differenzierbar mit schwachen Ableitungen f', $f'' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Betrachten Sie die Funktion u, v auf $\mathbb{R}^2$ mit

$$u(x,t) = f(x+t) \qquad \text{und} \qquad v(x,t) = f(x-t).$$

(a) Zeigen Sie, dass $u, v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ wohldefiniert und zweimal schwach differenzierbar sind und bestimmen Sie die ersten und zweiten Ableitungen.

(b) Zeigen Sie, dass u und v die schwache Wellengleichung

$$\partial_x^2 g - \partial_t^2 g = 0$$

erfüllen.

(c*) Es sei $w = (u+v)/2$. Diskutieren Sie die Aussage:

w löst die Wellengleichung mit Anfangsbedingungen $w|_{t=0} = f$ und $\partial_t w|_{t=0} = 0$.

(5 Zusatzpunkte).