12. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis III
im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. Sebastian Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie ihre Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Abgabe: Montag, 30.01.2023 vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (10 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformation von $g := \mathcal{F}(\chi_{[-b,b]})$ für alle $b > 0$. Zeigen Sie weiter, dass $g \notin L^1(\mathbb{R})$ aber $g \in L^2(\mathbb{R})$ und bestimmen Sie $||g||_{L^2}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Faltung $\chi_{[a_1,b_1]} * \chi_{[a_2,b_2]}$.

(b) Berechnen Sie die Fouriertransformation der *Keilfunktion* $k \in L^1(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$k(x) = \begin{cases} x+1, & \text{falls } x \in [-1,0], \\ 1-x, & \text{falls } x \in [0,1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3 (10 = 3+4+3 Punkte) Eine Funktion $u = u(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ erfüllt die *Wärmeleitungsgleichung* mit Startwert $f \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, wenn folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(\cdot,0) &= f \quad \text{auf } \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

wobei $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2$ den Laplaceoperator bezeichne. Im folgendem bezeichnen wir mit $\hat{u}$ die Fouriertransformation in x-Koordinaten, sprich wir setzen $\hat{u}(\xi,t) := \widehat{u(\cdot,t)}(\xi)$.

Zeigen Sie:

(a) Erfüllt die Schwartzfunktion u das obige Anfangswertproblem, so erfüllt $\hat{u}$ das Anfangswertproblem folgender gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{u} + ||\xi||^2 \hat{u} &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ \hat{u}(\cdot,0) &= \hat{f} \quad \text{auf } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie $\hat{u}$ und folgern Sie mittels inverser Fouriertransformation die Gleichung

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) f(y)\,\mathrm{d}y.$$

(c) Zeigen Sie: Die Formel aus (b) liefert eine echte Lösung der Wärmeleitungsgleichung.

(d*) Es gilt außerdem $u(x,0) = f$, sofern f zusätzlich beschränkt ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ eine stetige Funktion, deren Fouriertransformation $\hat{f}$ außerhalb des Intervalls $(-b, b)$ verschwindet. Dann gilt für jedes $T < \pi/b$ die Gleichung

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(kT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(x - kT)\right),$$

wobei $\operatorname{sinc}(x) := \sin(x)/x$. Informell: Solche Funktionen sind schon durch abzählbar viele Punkte eindeutig bestimmt.

Hinweis: Fassen Sie die beiden Faktoren im inversen Fourierintegral als periodische Funktionen über $(-\pi/T, \pi/T)$ auf und nutzen Sie die Formel von Parseval für Fourierreihen.