# 13. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis III
## im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. Sebastian Goette

---

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie ihre Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.*

**Abgabe:** Montag, 06.02.2023 vor der Vorlesung.

**Aufgabe 1 (10 Punkte)** Betrachten Sie die Funktionen $H_n$ und $h_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{d^n}{d^n x} \mathrm{e}^{-x^2} \qquad \text{und} \qquad h_n(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2} H_n(x).$$

Zeigen Sie:

(a) $H_n(x)$ ist ein Polynom von Grad $n$, welche die folgenden Funktionalgleichungen erfüllt:

$$H_0' = 0, \qquad H_n'(x) = 2n H_{n-1}(x).$$

(b) Es gilt für $n \geq m \geq 1$ die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)\, H_m(x) \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = 2m \int_{-\infty}^{\infty} H_{n-1}(x)\, H_{m-1}(x) \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x.$$

(c) Es gilt $\langle h_m, h_n \rangle_{L^2} = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}$.

(d) $h_n$ ist eine Schwartzfunktion und es gilt $h_{n+1}(x) = x h_n(x) - h_n'(x)$.

(e) Es gilt $\hat{h}_n = (-\mathrm{i})^n\, h_n$.

**Hinweis:** Vollständige Induktion über $n$. Zeigen Sie für den Induktionsschritt zuerst

$$\hat{h}_{n+1}(\xi) = -\mathrm{i}\xi\, \hat{h}_n(\xi) + \widehat{x h_n}(\xi)\ .$$

**Bemerkung:** Man kann sogar zeigen, dass $h_n$ eine Orthogonalbasis von $L^2(\mathbb{R})$ bilden. Diese Aufgabe zeigt daher, dass die $h_n$ eine Eigenbasis für Fouriertransfomation bilden.

**Aufgabe 2 (10 Punkte)** Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ eine Schwartzfunktion. Zeigen Sie

$$||xf||_{L^2} \cdot ||\xi \hat{f}||_{L^2} \geq \frac{1}{2} ||f||_{L^2}^2.$$

**Hinweis:** Wenden Sie zum einen die Cauchy-Schwartz Ungleichung auf $|\langle xf, f' \rangle|$ an und zum anderen partielle Integration auf $\langle xf, f' \rangle$.

**Aufgabe 3 (10 = 2+3+5 Punkte)** Sei $n \geq 3$ und $a \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $N_a\colon \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$N_a(x) := \frac{x-a}{||x-a||^n}$$

divergenzfrei ist.

(b) Berechnen Sie für alle $r > 0$ das Integral

$$\int_{rS^{n-1}} \langle N_0(x), \nu(x) \rangle \, \mathrm{d}x$$

(c) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand. Zeigen Sie für alle $a \notin \partial G$ die Gleichung

$$\int_{\partial G} N_a(x) = \begin{cases} \mathrm{vol}(S^{n-1}), & \text{falls } a \in G \\ 0, & \text{falls } a \notin G. \end{cases}$$

**Aufgabe 4 (10 = 3+3+4 Punkte)** Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge mit glatten Rand und sei $f$ eine $C^2$-Funktion, die auf einer offenen Umgebung von $G$ definiert ist, und dort harmonisch ist, d.h. es gilt $\Delta f = 0$, wobei $\Delta$ der Laplaceoperator von Blatt 12 ist.

Zeigen Sie:

(a) $\int_{\partial G} \partial_\nu f = 0$.

(b) $\int_{\partial G} f \partial_\nu f = \int_G ||\mathrm{grad}(f)||^2$.

(c) Ist $G$ zusammenhängend und gilt $\partial_\nu f = 0$, so ist $f$ auf $G$ konstant.

**Erinnerung:** $\mathrm{grad}(f) := (\partial_{x_1} f, \ldots, \partial_{x_n} f)$ und es gilt $\Delta(f) = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}(f)$.