PROBEKLAUSUR zur Vorlesung Analysis III im Wintersemester 2022 bei Prof. Dr. Sebastian Goette

Bitte versuchen Sie, die folgenden Aufgaben unter Klausur-ähnlichen Bedingungen zu bearbeiten. Für die eigentliche Klausur gelten die folgenden Regeln::

- Sie haben 120 Minuten Zeit von 10.00 Uhr bis 12.00 Uhr.
- Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben, die jeweils mit 10 Punkten bewertet werden.
- Begründen Sie alle Ihre Aussagen!
- Aussagen aus vorangegangenen Aufgabenteilen dürfen Sie im Rest der Aufgabe verwenden, auch wenn Sie sie noch nicht bewiesen haben.
- Benutzen Sie bitte für die Abgabe nur die ausgehändigten Blätter. Zusätzliche Blätter erhalten Sie jederzeit bei der Aufsicht.
- Elektronische Hilfsmittel jeglicher Art sind nicht zugelassen. Mobiltelefone und Taschenrechner sind am Eingang abzugeben.
- Bücher, Skripte, vorher angefertigte Notizen sind nicht gestattet, ausser einem doppelseitig handbeschriebenen DINA4-Blatt.

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe	Note
Punkte							

Aufgabe 1 Beantworten Sie die folgenden Fragen mit Ja oder Nein und geben Sie eine knappe Begründung oder ein Gegenbeispiel an. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung nutzen, geben Sie die entsprechende Aussage jedoch inklusive Annahmen und Behauptung komplett an.

(a) Es sei μ ein Radon-Maß auf $\mathbb{R}$ bezüglich der Standardtopologie. Dann ist jede endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ eine μ-Nullmenge.

(b) Das Lebesgue-Maß ist das einzige translationsinvariante Maß auf $\mathbb{R}^n$.

(c) Jede total differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist schwach differenzierbar.

(d) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \bar{\mathbb{R}}$ Lebesgue-messbar, dann ist $g : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ ebenfalls Lebesgue-messbar, wobei g gegeben ist durch

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, \cdot\,)\,\mathrm{d}\lambda^1.$$

(e) Es seien $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbare Funktionen für alle $k \in \mathbb{N}$, und es existiere $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wenn $f_i \leq f_j$ für alle $i \leq j$ gilt, dann ist f Lebesgue-integrierbar mit

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,\mathrm{d}\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}\lambda^n.$$

Aufgabe 2 Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar mit $f \geq 0$ λ^1-fast überall und sei weiter

$$X := \Big\{ x \in \mathbb{R} \,|\, \big(f(x+n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist keine Nullfolge} \Big\},$$
$$X_l := \{ x \in \mathbb{R} \,|\, f(x+n) > 1/l \text{ für unendliche viele } n \in \mathbb{N} \}.$$

Zeigen Sie:

(a) Alle X_l sind λ^1-messbar, und es gilt $X = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} X_l$.

(b) Wenn $\lambda^1(X_l) = 0$ für alle $l \in \mathbb{N}$, so folgt $\lambda^1(X) = 0$.

(c) Ist $\lambda^1(X_l) > 0$ für ein $l \in N$, so gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$, sodass $\lambda^1(X_l \cap (m, m+1)) > 0$.

(d) Wenn $\lambda^1(X_l) > 0$ für ein $l \in \mathbb{N}$, so folgt $\lambda^1(X_l) = \infty$.

(e) Für fast alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $(f(x+n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 für $n \to \infty$.

Aufgabe 3 Es sei

$$H = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ |z| < \sinh 1 \right\}$$

ein Rotationshyperboloid.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Psi\colon (-1, 1) \times (0, 2\pi) \to H \qquad (r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} \cosh r \cos\varphi \\ \cosh r \sin\varphi \\ \sinh r \end{pmatrix}$$

die Menge H bis auf eine Nullmenge parametrisiert.

(b) Berechnen Sie die Gramsche Determinante von $D\Psi$.

(c) Sei $f\colon H \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ gegeben. Berechnen Sie das Integral

$$\int_H f \,\mathrm{dvol}_H.$$

Aufgabe 4 Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine quadrat-integrierbare Funktion, sprich $f \in L^2(\mathbb{R})$.

(a) Für $c \in \mathbb{R}$ sei $g_c(x) := f(x+c)$. Zeigen Sie, dass $\hat{g}_c(\xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}c\xi}\hat{f}(\xi)$.

(b) f heiße *gerade*, falls $f(-x) = f(x)$ für λ^1-fast alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass sich jedes gerade $h \in L^2(\mathbb{R})$ durch gerade Schwartzfunktionen approximieren lässt.

(c) Zeigen Sie: Ist f gerade, so ist $\hat{f}$ eine reellwertige Funktion.

Aufgabe 5 Es sei $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ und $X\colon U \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$X(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot}(X)$.

(b) Berechnen Sie $\int_\gamma \langle X, \cdot\rangle$, wobei $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ gegeben ist durch

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Gibt es eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad}(f) = X$?

(d) Gibt es eine kompake, normal orientierte C^1-Fläche $E \subset U$ mit $\partial E = \operatorname{im}(\gamma)$?