Übungsblatt 0

Abgabe: —

Übung 0.1 (Lie algebren) Es sei $\mathfrak{g}$ ein $\mathbb{k}$-Vektorraum. Eine bilineare Abbildung $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ heißt *Lie-Klammer*, falls

(i) $[\xi,\eta] = -[\eta,\xi]$

(ii) $[\xi,[\eta,\chi]] = [[\xi,\eta],\chi] + [\eta,[\xi,\chi]]$

für alle $\xi,\eta,\chi\in\mathfrak{g}$. Wir nennen das Tupel $(\mathfrak{g},[\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ Lie-Algebra. Eine lineare Abbildung $\phi\colon\mathfrak{k}\to\mathfrak{g}$ heißt *Lie-Algebramorphismus*, wenn $\phi([\xi,\eta]) = [\phi(\xi),\phi(\eta)]$ für alle $\xi,\eta\in\mathfrak{k}$. Ein Unterraum $\mathfrak{h}\subseteq\mathfrak{g}$ heißt

- *Lie-Unteralgebra*, wenn $[\xi,\eta]\in\mathfrak{h}$ für alle $\xi,\eta\in\mathfrak{h}$.
- *Lie-Ideal*, wenn $[\xi,\eta]\in\mathfrak{h}$ für alle $\xi\in\mathfrak{h}$ und $\eta\in\mathfrak{g}$.

(i) Zeigen Sie, dass die Verkettung von zwei Lie-Algebramorphismen wieder ein Lie-Algebramorphismus ist.

(ii) Zeigen Sie, dass das Bild (bzw. der Kern) eines Lie-Algebramorphismus eine Lie-Unteralgebra (bzw. Lie-Ideal) ist.

(iii) Es sei $\mathfrak{h}\subseteq\mathfrak{g}$ ein Lie-Ideal. Zeigen Sie, dass der Quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ eine kanonische Lie-Klammer besitzt, so dass die Quotientenabbildung $\pi\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ein Lie-Algebramorphismus ist.

(iv) Es sei $\mathscr{A}$ eine assoziative Algebra. Zeigen Sie, dass die bilineare Abbildung $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]\colon\mathscr{A}\times\mathscr{A}\to\mathscr{A}$, die durch
$$[a,b] = ab - ba$$
definiert ist, $\mathscr{A}$ zu einer Lie-Algebra macht.

Übung 0.2 (Graduierungen) Es sei $\mathscr{A}^\bullet = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathscr{A}^i$ ein graduierter $\mathbb{k}$-Vektorraum. Ein assoziatives Produkt $\mu\colon\mathscr{A}^\bullet\times\mathscr{A}^\bullet\to\mathscr{A}^\bullet$ heißt *graduiert kommutativ*, wenn

- $ab := \mu(a,b)\in\mathscr{A}^{k+\ell}$ und
- $ab = (-1)^{k\ell}ba$

für alle $a\in\mathscr{A}^k$ und $b\in\mathscr{A}^\ell$. Eine Derivation vom Grad k ist eine lineare Abbildung $D\colon\mathscr{A}^\bullet\to\mathscr{A}^\bullet$, so dass

- $D(A) \in \mathscr{A}^{k+\ell}$ für alle $a \in \mathscr{A}^\ell$,
- $D(ab) = D(a)b + (-1)^{k\ell} a D(b)$ für alle $a \in \mathscr{A}^\ell$ und $b \in \mathscr{A}^\bullet$.

Den Vektorraum der Derivationen vom Grad k bezeichnen wir mit $\operatorname{Der}^k(\mathscr{A}^\bullet)$ und wir bezeichnen mit $\operatorname{Der}^\bullet(\mathscr{A}^\bullet) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{Der}^k(\mathscr{A}^\bullet)$. Zeigen Sie, dass

$$[D, E] = D \circ E - (-1)^{k\ell} E \circ D$$

für $D \in \operatorname{Der}^k(\mathscr{A}^\bullet)$ und $E \in \operatorname{Der}^\ell(\mathscr{A}^\bullet)$ eine Derivation vom Grad $k + \ell$ ist und dass $\operatorname{Der}^\bullet(\mathscr{A}^\bullet)$ mit $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ zu einer graduierten Lie-Algebra wird, d.h.

(i) $[D, E] \in \operatorname{Der}^{k+\ell}(\mathscr{A}^\bullet)$

(ii) $[D, E] = -(-1)^{k\ell}[E, D]$

(iii) $[D, [E, F]] = [[D, E], F] + (-1)^{k\ell}[E, [D, F]]$

für alle $D \in \operatorname{Der}^k(\mathscr{A}^\bullet)$, $F \in \operatorname{Der}^\ell(\mathscr{A}^\bullet)$ und $F \in \operatorname{Der}^\bullet(\mathscr{A}^\bullet)$.

Übung 0.3 (Grassmann'sche und symmetrische Algebra) Es sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{k}$-Vektorraum mit $\dim V = n$, wobei $\mathbb{k}$ ein Körper der Charakteristik 0 ist. Es sei außerdem $T^k V = V^{\otimes k} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k\text{-mal}}$ die k-te Tensorpotenz von V mit $T^0 V = \mathbb{k}$ und

$$T^\bullet V := \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k V.$$

(i) Zeigen Sie, dass $(T^\bullet V, \otimes)$ eine assoziative Algebra mit Eins ist, wobei $\alpha \otimes v = v \otimes \alpha = \alpha v$ für $\alpha \in \mathbb{k}$ und $v \in V$. (Sie dürfen die Assoziativität des Tensorprodukts verwenden.)

(ii) Zeigen Sie, dass die lineare Fortsetzung von

$$\sigma \triangleright v_1 \otimes \cdots \otimes v_k = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}$$

eine Darstellung der symmetrischen Gruppe S_k auf $T^k V$ definiert und, dass

$$\mathit{Alt}_k = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sign}(\sigma) \sigma \triangleright \quad \text{und} \quad \mathit{Sym}_k = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma \triangleright$$

Projektoren auf $T^k V$ sind. (Eine lineare Abbildung P heißt Projektor, wenn $P^2 = P$.) Zeigen Sie schließlich, dass $\mathit{Alt} = \bigoplus_k \mathit{Alt}_k$ und $\mathit{Sym} = \bigoplus_k \mathit{Sym}_k$ auch Projektoren sind, wobei wir $\mathit{Alt}_0 = \mathrm{id} = \mathit{Sym}_0$ setzen.

(iii) Es sei $\Lambda^\bullet(V) := \mathit{Alt}(T^\bullet V)$ und es sei $\mathrm{S}^\bullet(V) := \mathit{Sym}(T^\bullet V)$. Zeigen Sie, dass

$$\Lambda^\bullet(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(V), \text{ where } \Lambda^k(V) = \mathit{Alt}_k(T^k V)$$

und

$$\mathrm{S}^\bullet(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{S}^k(V), \text{ where } \mathrm{S}^k(V) = \mathit{Sym}_k(T^k V).$$

(*iv*) Es sei $\wedge\colon \Lambda^\bullet(V) \times \Lambda^\bullet(V) \to \Lambda^\bullet(V)$ die bilineare Fortsetzung von

$$v \wedge w = \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} Alt_{k+l}(v \otimes w)$$

für $v \in \Lambda^k(V)$ und $w \in \Lambda^\ell(V)$ und es sei $\vee\colon \mathrm{S}^\bullet(V) \times \mathrm{S}^\bullet(V) \to \mathrm{S}^\bullet(V)$ die bilineare Fortsetzung von

$$p \vee q = \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} Sym_{k+l}(p \otimes q)$$

für $p \in \mathrm{S}^k(V)$ und $q \in \mathrm{S}^\ell(V)$. Zeigen Sie, dass $(\Lambda^\bullet(V), \wedge)$ (bzw. $(\mathrm{S}^\bullet(V), \vee)$) eine graduiert kommutative (bzw. kommutative) Algebra mit Eins ist.

(*v*) Berechnen Sie die Dimensionen von $\Lambda^k(V)$ und $\mathrm{S}^k(V)$, indem Sie Basen in Abhängigkeit von einer Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ von V angeben.

(*vi*) Ein Polyonom vom Grad $k \in \mathbb{N}_0$ auf V ist eine Abbildung $P\colon V \to \mathbb{k}$ mit $P(\lambda v) = \lambda^k P(v)$. Wir bezeichnen die Polynome vom Grad k mit $\mathrm{Pol}^k(V)$. Polynome sind abgeschlossen unter punktweiser Multiplikation: es sei $P \in \mathrm{Pol}^k(V)$ und $Q \in \mathrm{Pol}^\ell(V)$, dann ist $PQ \in \mathrm{Pol}^{k+\ell}(V)$. Somit bilden die Polynomfunktionen $\mathrm{Pol}^\bullet(V) = \bigoplus_{k=0}^\infty \mathrm{Pol}^k(V)$ eine Algebra. Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen injektiven graderhaltenden Algebramorphismus

$$J\colon \mathrm{S}^\bullet(V^*) \hookrightarrow \mathrm{Pol}^\bullet(V)$$

gibt mit $J(1) = 1$ und $J(\alpha)\colon V^* \ni v \mapsto \alpha(v) \in \mathbb{k}$ für $\alpha \in V^* \subset \mathrm{S}^\bullet(V^*)$. Ist J ein Isomorphismus? Können Sie den Beweis führen ohne eine Basis zu wählen?

Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $F\colon \mathrm{Pol}^k(V) \to Abb(\overbrace{V \times \cdots \times V}^{k\text{-mal}}, \mathbb{k})$ mit

$$F(P)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial t_1 \ldots \partial t_k} P(t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k).$$