

# Übungsblatt 1

Abgabe: 24.10.2022

**Übung 1.1 (5 Punkte)** Es sei  $G$  eine Mannigfaltigkeit mit einer Gruppenstruktur. Zeigen Sie, dass wenn die Gruppenmultiplikation glatt ist, dann ist es auch die Abbildung  $\text{inv}: G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$ .

**Übung 1.2 (5 Punkte)** Es sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ein Vektorfeld, so dass sein Fluss auf  $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  für ein  $\varepsilon > 0$  definiert ist. Zeigen Sie, dass der Fluss dann auf ganz  $M \times \mathbb{R}$  definiert ist.

**Übung 1.3 (5 Punkte=2+3 Punkte)** Es sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

- (i) Auf faktorisierenden Multivektorfeldern  $X_1 \wedge \dots \wedge X_k$  und  $Y_1 \wedge \dots \wedge Y_\ell$  mit  $X_i, Y_j \in \mathfrak{X}(M)$  gilt:

$$\begin{aligned} \llbracket X_1 \wedge \dots \wedge X_k, Y_1 \wedge \dots \wedge Y_\ell \rrbracket_s &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} (-1)^{i+j} [X_i, Y_j] \wedge X_1 \dots \overset{i}{\wedge} \dots \wedge X_k \wedge Y_1 \wedge \dots \overset{j}{\wedge} \dots \wedge Y_\ell. \end{aligned}$$

- (ii) Für zwei Multivektorfelder  $X \in \mathfrak{X}^k(M)$  und  $Y \in \mathfrak{X}^\ell(M)$  gilt in einer lokalen Karte  $(U, x)$ :

$$\begin{aligned} \llbracket X, Y \rrbracket_s|_U &= \frac{1}{k!\ell!} \left( k X^{i_1 \dots i_k} \frac{\partial Y^{j_1 \dots j_\ell}}{\partial x^{i_k}} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_{k-1}}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_\ell}} \right. \\ &\quad \left. - \ell Y^{j_1 \dots j_\ell} \frac{\partial X^{i_1 \dots i_k}}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_2}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_\ell}} \right) \end{aligned}$$

wobei

$$X|_U = \frac{1}{k!} X^{i_1 \dots i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \quad \text{and} \quad Y|_U = \frac{1}{\ell!} Y^{j_1 \dots j_\ell} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_\ell}}.$$

**Übung 1.4 (5 Punkte)** Zeigen Sie Lemma 1.2.2.